0 068314 730006

06-83-14-73
(121.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8 класс

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Морозовой Элины Станиславовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

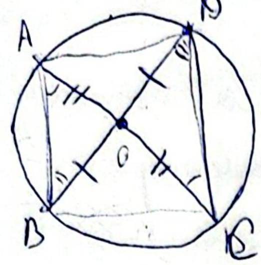
Подпись участника

Морозова

06-83-14-73 (121.6)

Черновик.

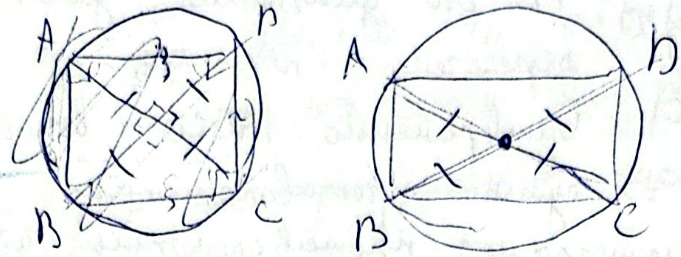
70 (социального) КБ



AB || CD

ABCD - паралел.

вписан. ABCD => все углы по 90



$\overline{abc} \vdots 9$

$\overline{abc} = 9k(a+b+c)$

~~100a+10b+c = 9ka+9kb~~

162 +
243 +
324 +
405 +
486 +
567 −
648 +
729 −
810 +
891 −
972 +

162 : 9 = 18
243 : 9 = 27
324 : 9 = 36
405 : 9 = 45
810 : 9 = 90
486 : 18 = 27
567 : 18 = 3
648 : 18 = 36
972 : 18 = 54
972 : 81 = 12

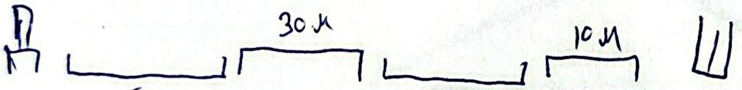
162 + 81 = 243

162 + 648 + 972 =

162 + 648 = 810

810 + 972 = 1782

18 · 9 = 162
27 · 9 = 243
36 · 9 = 324
45 · 9 = 405
16 · 3 = 48
27 · 18 = 486
36 · 18 = 648
90 · 9 = 810
54 · 18 = 972
36 + 18 = 54



30 м, 10 м, 50 м, 120 м

М 30с 50с

Л 50с 50с

$\frac{50\text{м}}{30\text{с}} = 1\frac{2}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$30\text{м} : \frac{5}{3} = 18\text{с}$

0-10 - м
10-60 - л
60-110 - м
110-160 - л

$200\text{м} : \frac{5}{3} = 120\text{с}$

$\frac{120}{160} = \frac{3}{4}$

$50 : \frac{3}{4} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$

$80 : \frac{3}{4} = \frac{320}{3} = 106\frac{2}{3}$

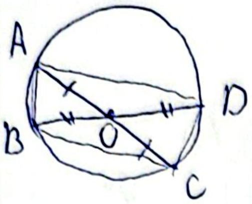
0-10 - л
10-60 - м
60-110 - л
110-160 - м

120с

Чистовик.

Задача №1.

Рассмотрим 2 хорды, которые делятся пополам.

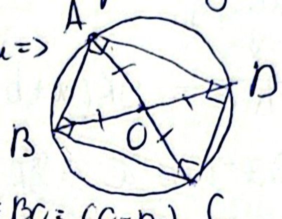


Заметим, что ABCD – параллелограм, т.к. его диагонали делятся точкой пересечения пополам.

Одновременно ABCD – вписанный четырёхугольник => сумма противоположных углов 180°.

В параллелограме противоположные углы равны => => они равны по $\frac{180°}{2} = 90°$ => ABCD – прямоугольник

В прямоугольнике диагонали равны =>



=> AC = BD => AO = DO = CO = BO. =>

=> т. O центр окружности (т.к. AO = BO = CO = DO) =>

=> 3-я хорда проходит через центр окружности => => это диаметр => т.к. радиус равен 5, то диаметр 10.

Ответ: 10.

Чистовик

Задача №6.

Дано равенство: $\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = 9k$. Тогда
$\overline{abc} = 9k(a+b+c)$. $9k(a+b+c) \vdots 9 \Rightarrow$ (чтобы было равенство) $\overline{abc} \vdots 9$. Тогда по признаку делимости на 9, раз $\overline{abc} \vdots 9$, то $a+b+c \vdots 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9k(a+b+c) \vdots 9 \cdot 9 = 81 \Rightarrow$ (чтобы было равенство)
$\overline{abc} \vdots 81$. Переберём все трёхзначные числа $\vdots 81$.

$162 : (1+6+2) = 162 : 9 = 18 \quad \vdots 9 \quad +$
$243 : (2+4+3) = 243 : 9 = 27 \quad \vdots 9 \quad +$
$324 : (3+2+4) = 324 : 9 = 36 \quad \vdots 9 \quad +$
$405 : (4+0+5) = 405 : 9 = 45 \quad \vdots 9 \quad +$
$486 : (4+8+6) = 486 : 18 = 27 \quad \vdots 9 \quad +$
$567 : (5+6+7) = 567 : 18$, но 567 - неч., а 18 чёт. Неч./чёт. $-$
$648 : (6+4+8) = 648 : 18 = 36 \quad \vdots 9 \quad +$
$729 : (7+2+9) = 729 : 18$, но 729 - неч., а 18 - чёт, Неч/чёт $-$
$810 : (8+1+0) = 810 : 9 = 90 \quad \vdots 9 \quad +$
$891 : (8+9+1) = 891 : 18$, но 891 - неч., а 18 - чёт Неч/чёт $-$
$972 : (9+7+2) = 972 : 18 = 54 \quad \vdots 9 \quad +$

(далее числа четырёхзначные, мы их не рассматриваем)
Тогда все числа: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972
Сумма 1-го, 6-го и последнего: $162 + 648 + 972 = 810 + 972 = 1782$

Чистовик. Задача №5

Дом — 50м — 30м — 120м — 10м — Школа

Люди 50с 50с

Машины 30с 50с

$v = \frac{S}{t}$

Первый светофор стал красным, т.е. станет зелёным через 30с. Тогда макс. скорость — $\frac{50м}{30с} = \frac{5}{3}\,\frac{м}{с}$ (эта скорость максимальна, т.к. мин. время на участке 50м — 30с). ~~Тогда к первому светофору она подъедет в 50м : $\frac{5}{3}\frac{м}{с}$ = 30с (в момент включения зелёного), а проедет в (50+30) : $\frac{5}{3}$ = 80 : $\frac{5}{3}$ = 48с $< 30с/50с=80$ => на красный свет не попадет.~~

Тогда ко второму светофору она подъедет как мин в $(50+30+120) : \frac{5}{3} = 200 : \frac{5}{3} = 120с$

2 светофор: 0с – 10с зелёный

10с – 60с красный

60с – 110с зелёный

110с – 160с красный

160с – 210с зелёный

120с – красный свет, значит мы должны подъезжать как мин в 160с => макс. скорост $\frac{200м}{160с} = \frac{5}{4}\,\frac{м}{с}$.

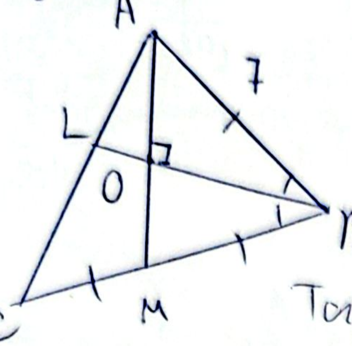
Тогда к 1 светофору подъедет в $50м : \frac{5}{4}\frac{м}{с} = 40с$ (зелёный, он начался в 30с). Проедет его в $(50+30)м : \frac{5}{4}\frac{м}{с} = 80м : \frac{5м}{4с} = 64с$ (зелёный, он закончится в 80с). Ко 2 светофору подъедет в $(50+30+120)м : \frac{5м}{4с} = 200м : \frac{5м}{4с} = 160с$ (зелёный, начался в 160с), а проедет $210м : \frac{5м}{4с} = 168с$ (зелёный, закончится в 210с) => подходит

Ответ: $1\frac{1}{4}\,\frac{м}{с}$

06-83-14-73 (121,5)

Чистовик:

Задача №4



В $\triangle ABM$ − BO бис. и высота =>

=> $\triangle ABM$ − р/б => $BM = AB = 7$

Тогда $CB = 7 \cdot 2 = 14$.

Тогда $CA + CB > AB \Rightarrow CA + 14 > 7 \Rightarrow CA + 7 > 0$ − верно

$CA + AB > CB \Rightarrow CA + 7 > 14 \Rightarrow CA > 7$

$AB + BC > AC \Rightarrow 14 + 7 > CA \Rightarrow 21 > CA$

Тогда $7 < CA < 21$. Тогда целые периметры от $8+7+14=29$, до $7+20+14=41$ (включая обе границы). Но $\triangle ABC$ − не равнобед. => $AC \neq 7$ и $AC \neq 14$.

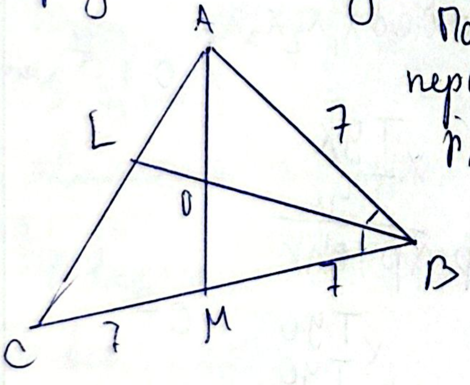
7 − не входит в диапазон AC.

Если $AC = 14$, то $P_{ABC} = 14+14+7 = 35 \Rightarrow P_{ABC} \neq 35$

Тогда $29 \leq P_{ABC} \leq 41$ и $P_{ABC} \neq 35$ (все P_{ABC} − целые)

Покажем, что все периметры возможны.

Если $29 \leq P_{ABC} \leq 41$, то $8 \leq AC \leq 20$ (такие треугольники существуют, т.к. нерав. $\triangle$ выполняется)



Покажем, что $AM \perp BL$ в любом периметре. Т.к. $AB = BM$ − то $\triangle ABM$ − р/б => BC − т.к. бис. еще высота => => $AM \perp BL$ ч.т.д.

Ответ: Все целые P_{ABC}, такие что $29 \leq P_{ABC} \leq 41$ и $P_{ABC} \neq 35$

Черновик

50 30 120 10

$\frac{50}{30} = \frac{5}{3}$

$\begin{array}{r} 42 \\ \times 4 \\ \hline 168 \end{array}$

$200 : \frac{5}{3} = 120$

$\frac{200}{160} = \frac{5}{4}$

$50 : \frac{5}{4} = 40$

$200 : \frac{5}{4} = 160$

$80 : \frac{5}{4} = 64$

$210 : \frac{5}{4} = 168$

0-10 – л.
10-60 – м
60-110 – л
110-160 м
160 - 210 л

$320 \,|\, \frac{5}{64}$

$10000 \cdot 10000 = 10^8$

$x+x+1+x+2+x+3 = 4x+6$

$\overline{abcdx_1x_2\ldots x_n} \,|\, \frac{\overline{abcd}}{1000}$

$x_1 x_2 x_3$

$\frac{(1+9)\cdot 9}{2} = 45$

3 или 7

1 –
2 –
3
4 –
5 –
6 –
7
8 –
9

$x+x+1+x+2+x+3 = 42$

$4x = 36$

$x = 9$

$\begin{array}{r} \times 9999 \\ 9999 \\ \hline 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ \hline 99980001 \end{array}$

$(100T+1)^2 =$
$= 10^4T^2 + 1 + 200T$

T=0 Простые

$(\overline{abcd})^2 = \overline{abcdx_1x_2\ldots x_n}$ $\overline{abcdx_1x_2x_3x_4}$

$K = 0, 1, 5$ или 6

$\Downarrow$

$\overline{x_1x_2x\ldots x_n} \vdots \overline{abcd}$

$\begin{array}{r} \times ТУК \\ ТУК \\ \hline ФАРТУК \end{array}$

$a = 1$

$(\overline{1bcd})^2 = \overline{1bcdx_1x_2x_3x_4}$

$\begin{array}{r} \times ТУ0 \\ ТУ0 \\ \hline (ТУ)^2 \cdot 100 \end{array}$ 0 –

$\overline{1bcdx_1x_2x_3x_4} \,|\, \frac{\overline{1bcd}}{1000}$

$x_1 x_2 x_3$

$\times ТУ1$

$ТУ1 \cdot ТУ1 = (ТУ \cdot 10 + 1)^2 = ТУ \cdot 100 + 20 \cdot ТУ + 1$

$\Downarrow y = 2y$

$y = 0$

Чистовик

Задача №2.

Пусть $n = \overline{abcd}$

Тогда $(\overline{abcd})^2 = \overline{abcd x_1 x_2 \ldots x_n}$ (где $x_1, x_2 \ldots x_n$ n-цифр в квадрате после $\overline{abcd}$)

~~т.к. $(\overline{abcd})^2$ ... $\overline{abcd x_1 x_2 \ldots x_n}$ ...~~

$$\overline{abcd} = \frac{\overline{abcd x_1 x_2 \ldots x_n}}{\overline{abcd}}$$

$$\overline{abcd} = \frac{\overline{abcd} \cdot 10^n + \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\overline{abcd}}$$

$$\overline{abcd} = 10^n + \frac{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\overline{abcd}}$$ $\Rightarrow n \leq 3$, т.к. иначе $\overline{abcd}$ — хотя бы ~~...~~ пятизначное. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $n \leq 3$, то $\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq 999 \Rightarrow$

$$\frac{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\overline{abcd}} < 1 \quad (\text{т.к. } \overline{x_1 x_2 \ldots x_n} < \overline{abcd}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\overline{abcd}} \overset{\text{(т.к. целое)}}{=} 0 \Rightarrow \overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overbrace{00\ldots0}^{n \text{ нулей}}$

Тогда ~~...~~ $\overline{abcd} = 10^n + \frac{\overline{00\ldots0}}{\overline{abcd}} = 10^n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 3$, т.к. иначе $\overline{abcd} < 1000$ и не является четырёхзнач. $\Rightarrow \overline{abcd} = 10^3 = 1000$

Проверка: $10^3 \cdot 10^3 = \overbrace{1000000}^{\text{равно } 10^3}$

Ответ: 1000.

Чистовик.

Задача №3.

ТУК × ТУК = ФАРТУК.

Мы К×К и получили на последнем месте К. Если перебрать К от 0 до 9, то К = 0, 1, 5 или 6.

Если К=0, то $ТУ\cdot 10 \cdot ТУ \cdot 10 = (ТУ)^2 \cdot 100$ =>
=> У=0, но должно быть У ≠ К Противоречие.

Если К=1 то $(ТУ\cdot 10+1)^2 = (ТУ)^2 \cdot 100 + 20ТУ + 1$ =>
=> Получаем число:

$$\begin{array}{r|r|r} (ТУ)^2 & 0 & 0 \\ 2Т & У & 0 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

=> 2У = У => Если У ≠ 0, то 2 = 1 Против (иначе 2У хотя бы У+10 => У ≥ 10, чего быть не может) У = 0.

Тогда $(Т\cdot 100+1)^2 = Т^2 \cdot 10^4 + 200Т + 1$ => (по аналогии с У) Т = 2Т => (если Т ≠ 0, то 0 = 2) Т = 0, но Т должно быть ≠ У Против.

Если К=5, то $(ТУ\cdot 10+5)^2 = (ТУ)^2 \cdot 100 + ТУ \cdot 100 + 25$.

Получаем число:

$$\begin{array}{r|r|r} (ТУ)^2 & 0 & 0 \\ 2Т & 2У & 0 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

~~Тогда У = 2У+2 (иначе 2У+2 хотя бы~~ 10+У

Тогда У = 2У+2 (иначе 2У+2 хотя бы 10+У тогда У хотя бы 8. Если У=8, то ...85·...85 в разряде десятков стоит 2, а не 8. Если У=9, то ~~в разряде~~ 2У+2 = 20 — не кончается на 9 — Против.)

⇓

К = 6

Чистовик:

Задача №7

В первой строке пусть сумма x, тогда во второй $x+1$, в третьей $x+2$ и в четвертой $x+3$

$x+x+1+x+2+x+3=4x+6$ => число которое мы убрали неч., т.к. сумма от 1 до 9 — 45, а после вычит должно остаться чёт число.

$4x+6 \not\vdots\ 4$ (т.к. $4x \vdots 4$, а 6 — нет) =>

=> т.к. $45 \overset{4}{\equiv} 1$, то убранное число т.к. неч. по модулю 4 даёт 1 или 3, но если 1, то остаток $\vdots 4$ => оно даёт остаток 3.

$\Downarrow$

Мы убрали число 3 или 7.

Если 3, то $4x+6=45-3$
$4x=36$
$x=9$ — в 1 строке сумма 9.

Если 7, то $4x+6=45-7$
$4x=32$
$x=8$ — в 1 строке сумма 8.

Черновик.

$$\times\frac{\begin{array}{r}321\\321\end{array}}{21}$$

1

1

$2x = 10 + x$

$x = 10$

$$\times\frac{\begin{array}{r}85\\85\end{array}}{25}$$

3 6

6

Чистовик

Задача №3 (Продолжение)

$\cancel{(ТУ \cdot 10+7)^2 = (ТУ)^2 \cdot 100 +}$

Тогда $У = 2$.

$(T25)^2 = (T \cdot 100+25)^2 = T^2 \cdot 10^4 + T \cdot 5000 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow T = 0$, т.е. Противоречие, т.к. ТУК - трехзначное число

Тогда $K = 6$.

$(TУ6)^2 = (TУ \cdot 10+6)^2 = (TУ)^2 \cdot 100 + TУ \cdot 120 + 36$