0751252280008

75-12-52-28
(123.21)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мосиной Ирины Евгеньевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

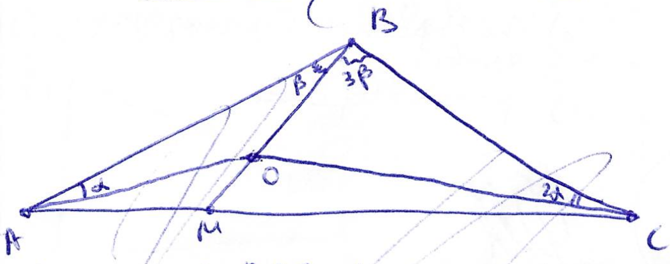
«29» марта 2026 года

Подпись участника

 50 (пятьдесят)

75-12-52-28
(123.21)

№6) ~~чистовик~~ (Черновик)



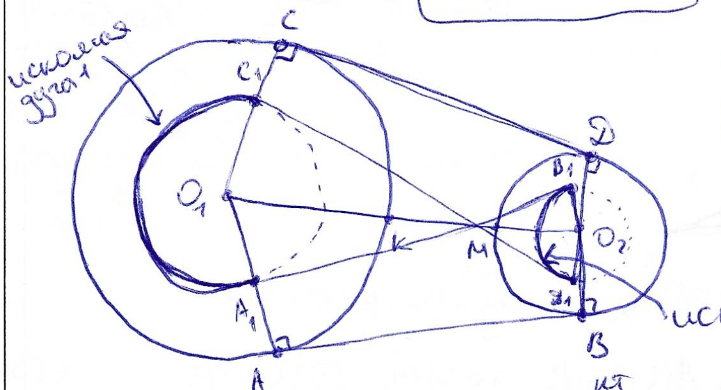
1) $\angle BCO = 2\angle BAO$. Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle BCO = 2\alpha$

2) $\angle OBC = 3\angle ABO$. Пусть $\angle ABO = \beta$, тогда $\angle OBC = 3\beta$

3) $\angle BAC = \angle BCA = 32^\circ \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$
$\angle ABC = 4\beta$ $\Rightarrow \beta = 29^\circ$

~~4) $\angle AOC + \angle OAC + \angle OCA = 180^\circ$ (т. о сумм. ∠Δ)~~
~~$\angle AOM + \angle MOC = \alpha + \beta + 3\beta + 2\alpha = 3\alpha + 4\beta$ (вн. ∠BOA и ∠BOC)~~
~~$\angle OAC = 32^\circ - \alpha$~~
~~$\angle OCA = 32^\circ - 2\alpha$~~
~~$64 - \beta$~~

№7. листовки



а) – построение траектори травы

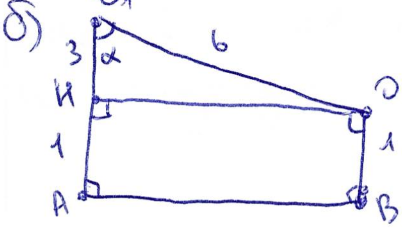
б) – рассчет длины

а) 1) Рассмотрим момент, когда косилка движится по дуге AC. Поскольку радиус данной окр. $> 1,5$, то вся трава будет на дугу A_1C_1 окружности с центром в т. O_1 и радиусом $4-1,5=2,5$, т.к. между всеми соотв. точками (соединенными радиусом большей окр.) расстояние равно 1,5.

2) Рассмотрим момент, когда косилка движется по дуге BD.
Построим окр. с центром в т. O_2 и радиусом 0,5. Пусть $DO_2 \cap$ данную окр. в т. D_1, а BO_2 – в т. B_1.
Расстояние между всеми соотв. точками дуги BD (соединенными радиусами и его продолжениями, ~~как~~ аналогично точкам D и B) будет равно $1+0,5=1,5$ (сумме радиусов окружностей с центром в т. O_2) $\Rightarrow$ когда косилка едет по дуге BD трава будет сгибаться на дугу B_1D_1 (выделенная часть, см. рис.)

3) Оставшийся след травы можно получить, соединив C_1 с D_1 и A_1 с D_1.

б)



0) $O_1A, O_2B \perp AB$ т.к. AB – касат. к окр-стям

1) $OH \perp O_1A \Rightarrow O_2B = AH = 1 \Rightarrow O_1H = 3$
(AHO_2B – п/у)

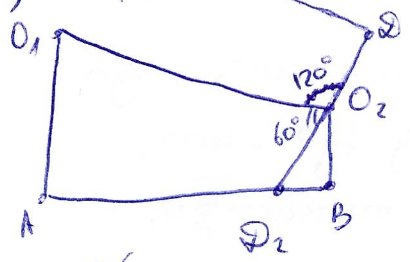
2) $\cos\angle AO_1O_2 = \dfrac{O_1H}{O_1O_2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle AO_1O_2 = 60°$

Поскольку картинка ~~чертеж~~ симметрична отн. O_1O_2,
$\angle O_2O_1A = \angle CO_1O_2 = 60° \Rightarrow \angle CO_1A = 120° = \frac{2\pi}{3}$

3) длина искомой дуги 1 $= 2\pi R - \frac{2\pi}{3}R = R\pi\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R = \frac{4}{3}\pi \cdot 2,5$
$(R = C_1O_1 = 2,5)$

(чистовик)

4) $\angle AO_1O_2 = 60^\circ \Rightarrow \angle O_1O_2B = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle O_1O_2D = 120^\circ$



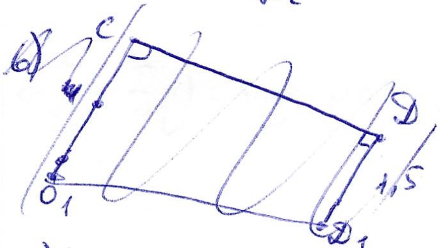
Пусть $DO_2 \cap AB = D_2$

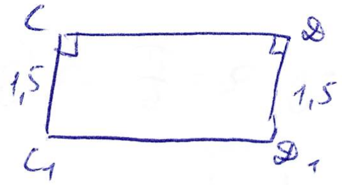
тогда $\angle O_1O_2D_2 = 180^\circ - \angle O_1O_2D = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\angle B_1O_2D_1 = 2\angle O_1O_2D = \frac{2\pi}{3}$

5) длина искомой дуги 2 =

$= \frac{2\pi}{3} r = \frac{2\pi}{3} \cdot 0{,}5$





6) $DD_1 \perp CD$
$CC_1 \perp CD$
$CC_1 = DD_1 = 1{,}5$ $\Rightarrow CC_1DD_1$ п/у. $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = C_1D_1$
$CD = AB$ (симм. отн. O_1O_2)

7) Найдем AB из первого рис. пункта 1

$AB = O_2H = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$ ← т. Пифагора $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1D_1 = 3\sqrt{3} = A_1B_1$

Итоговая длина ~~дуги~~ дорожки

длина дуги 1 + длина дуги 2 + $2 \cdot C_1D_1 = \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$.

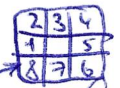
Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$.

№8

Найдем положения, в которых он может оказаться перед последним ходом.

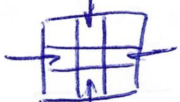
в „диагональных клетках"

пример попадания в диаг. клетку:



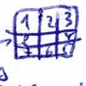
конец тут

Оказавшись в „диагональной клетке он не может сделать черный квадрат, (чтобы оказаться на такой клетке, ему нужно начать на не диагональной клетке, которых 4/8)



в „не диагональных клетках"

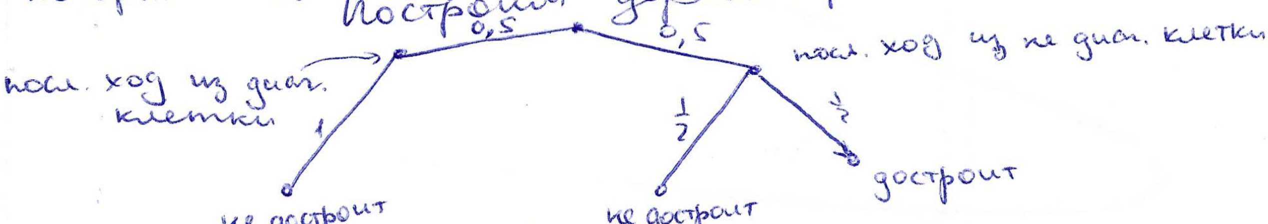
пример попадания в такую клетку



(чтобы туда попасть, нужно начать в „диагональной клетке, их 4/8)

после этого с вер-стью $\frac{1}{2}$ он делает из кольца черный квадрат.

Построим дерево вер-стей



Тогда искомая вер-сть $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{Чистовик}}$

№5.

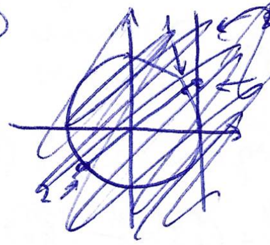
$tg x \cdot tg y \cdot tg z$

Произведение трех чисел >0 максимально, когда они равны между собой $\Rightarrow tg x \cdot tg y \cdot tg z - max$, когда $tg x = tg y = tg z$ (все данные тангенсы >0, т.к. $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$).

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{\pi}{2} \\ tg x = tg y = tg z \end{cases} \underset{(*)}{\Rightarrow} x = y = z = \frac{\pi}{6} \Rightarrow tg x = tg y = tg z = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg x \cdot tg y \cdot tg z = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

(*)

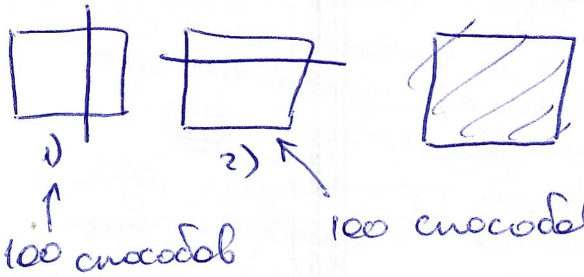


нужное значение тангенса, больше на на окружности есть ровно 2 точки, принимающие данное значение тангенса (у нас $tg x > 0$, но подходят только точки из 1-ой четверти, а такая может быть только 1).

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

№2.

П/у можно вырезать такими способами

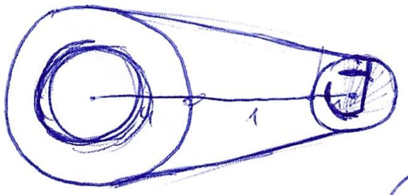


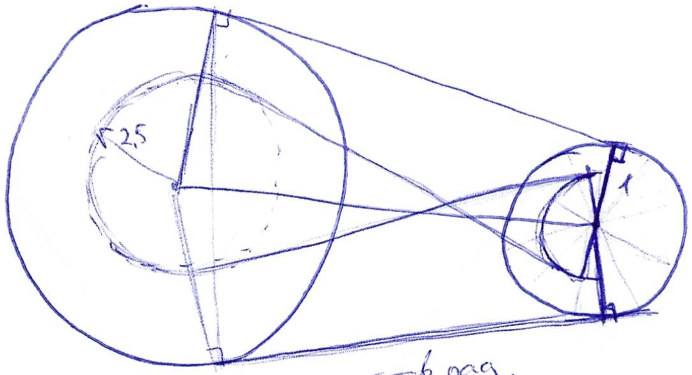
Черновик

$$\begin{array}{r} 4{,}0 \\ -1{,}5 \\ \hline 2{,}5 \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ не может

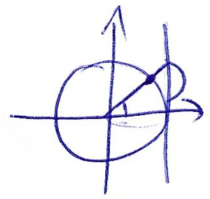
$\frac{1}{2}$ нет $\frac{1}{2}$ да

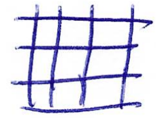


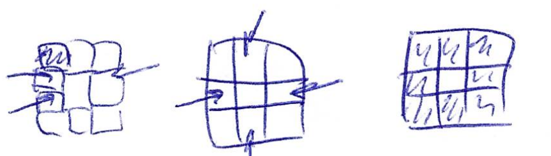


$2\pi r$ αR — 6 рад.

$120° = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$







$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$

$1 - tg\alpha\cdot tg\beta = \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}$

$tg\alpha\cdot tg\beta = 1 - \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}$

1 чет

$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cancel{\sin\beta}\,\cancel{\cos}\beta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-}$

$tg(\frac{\pi}{2}-\beta) = ctg\beta$

abc $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

$\frac{tg(\alpha+\beta) - tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}$

$tg\,30° = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$abc + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ac) = 2026$ (черновик)

min abc - ?

$2(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$

$(a+b+c)$

abc - min, значит $4(a+b+c) + 2(ab+bc+ac)$ - max

$2026 - abc$ - max

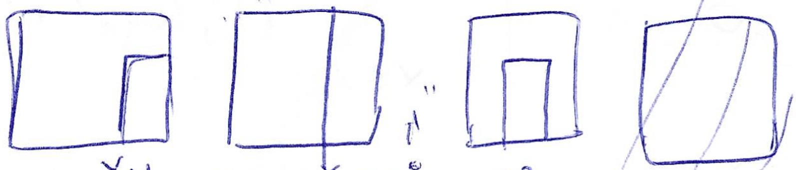
$4(a+b+c) + (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$

$(a+b+c)(4+a+b+c) - a^2 - b^2 - c^2 = 2026 - abc$ - max

$(a+b)(a+c)(b+c) = (a^2 + ac + ab + bc)(b+c) =$

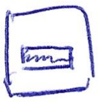
$= a^2b + a^2c + ac^2 + abc + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 =$

$= 2abc$

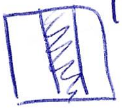


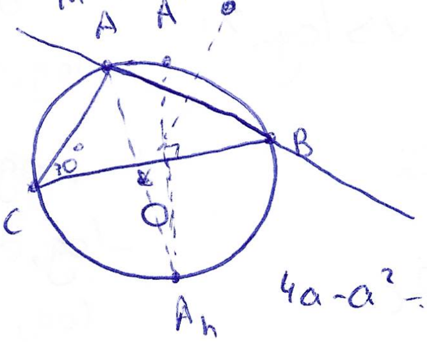
$||| \cdot \Xi \quad ||| + \Xi$

Запрещено



и



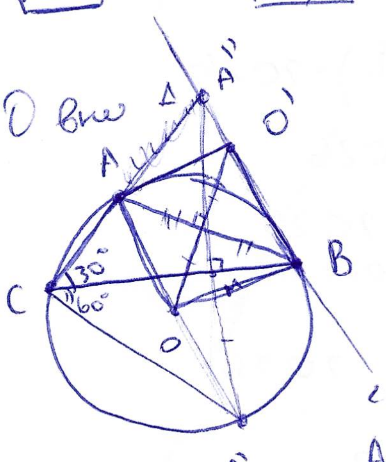


$O'BA''$

$\angle$
$64 = 3\alpha + 4\beta +$
$+ 3\beta + 2\alpha = 180°$

$4a - a^2 = a(4-a)$

O вне Δ



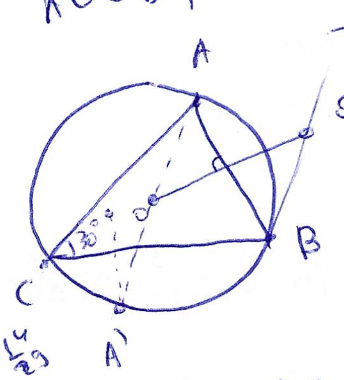
$\angle C = 30° \Rightarrow \measuredangle CA'' = 2A''M = 2AM$

AA' - диам $\Rightarrow \angle ACA' = 90°$ | $\Rightarrow CM = AM$

CM - мед

$AOO'B$ - ромб

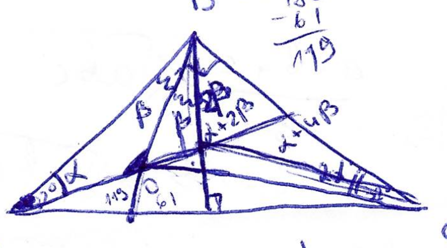
~~такого быть не может~~?



$32 + 29 = 61$

$180 - 64 = 116$

$180 - 61 = 119$



$\angle BCO = 2\angle BAO$ (α)

$\angle OBC = 3\angle ABO$ (β)

$\dfrac{\angle BOA}{\angle BAO}$

$116 : 4 = 29$, 36

$180 - 29 = 151$

$116 = 4\beta$

$\beta = 29$

$151 \quad 2\beta + \alpha$

$\dfrac{180 - \alpha - \beta}{\alpha} = \dfrac{151 - \alpha}{\alpha}$

черновик

$a^{x-1} \le 1$ $\quad \log_a a^{x-1} \le \log_a 1 \quad x-1 \le 0$

$a^{x-1} \ge 2$ $\quad \log_a a^{x-1} \ge \log_a 2 \quad x-1 \ge \log_a 2$

$\left[\begin{array}{l} x \le 1 \quad (1) \\ x \ge \log_a 2 + 1 \quad (2) \end{array}\right.$

$\log_a 2 + 1 \le x \le 1$

$a^{x-1} > 1$ $\quad \cancel{\log_a}$ $\quad x-1 > 0$

$a^{x-1} < 2$ $\quad x-1 < \log_a 2$

$\left\{\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \log_a 2 + 1 \end{array}\right.$

$\log_{\frac{1}{10}} 10 = -1$ $\quad \frac{1}{10}^2 = \frac{1}{100}$ $\quad 1 < x < \log_a 2 + 1$

$\log_{0,1} 10 = -1$

основание <1 – убывает

$\log_{0,1} 100 = -2$

нужно чтобы (2) огр (1) снизу $x \in [\log_a 2 + 1; 1]$

$(1; \log_a 2 + 1)$

$x - 1 < \log_a 1^{=0}$

$x \le 1$

$\underline{x-1<0}$ $\quad x < 1$

$\log_2 a + 1 < x < 1$

$x - 1 \cancel{\ge} \log_a 2 \quad x > \log_a 2 + 1$

$\log_2 a + 1$

$(-6; 7)$ 6 1 1 7

$6+0$ $\quad$ -6 -1 0 1 7

$1 - (\log_2 a + 1) = 2026$

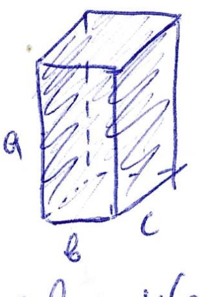
$\cancel{7+6+1+1}$ $\quad 7 \cdot (6)$

$-\log_2 a = 2026$

$2ab + 2ac + 2bc$

$\log_2 a = -2026$

$a = 2^{-2026}$



a, b, c – разл нат числа

$V + S_{пов} + 4(a+b+c) = 2026$

$\log_a 2 = -2026$

$a^{-2026} = 2$

$\frac{1}{a^{2026}} = 2$

$abc + 4(a+b+c) + 2(ab+ac+bc) =$

$2a^{2026} = 1$

$a^{2026} = \frac{1}{2}$

$= 2026$ $\quad \frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$

$\min abc$ – ?

$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ $\quad (a+b+c)^3 \ge 27abc$

$(a+b+c)(a+b+c)$

$a^2 + \cancel{ab} + ac + \cancel{ab} + b^2 + bc + \cancel{ac} + cb + \cancel{c^2} =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$ №4

ОДЗ: $\log_2 a\neq 0$ $a\neq 1,\ a>0$

~~Черновик~~ Чистовик

I случ.

$\log_2 a>0=\log_2 1$

$a>1$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geq 0$

$a^2(a^{2x-2}-3a^{x-1}+2)\geq 0$

Замена: $t=a^{x-1}$

$a^{2x-2}-3a^{x-1}+2\geq 0$

$t^2-3t+2\geq 0$

$(t-1)(t-2)\geq 0$

$+$ 1 $-$ 2 $+$ t

$\left[\begin{array}{l} t\leq 1\\ t\geq 2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\leq 1\\ a^{x-1}\geq 2\end{array}\right.$

Т.к. $a\neq 1$ можем прологарифм. обе части нер-ва по осн. a если $a>1$, то ф-я логарифма ~~логарифма~~ возр.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a a^{x-1}\leq\log_a 1\\ \log_a a^{x-1}\geq\log_a 2\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x\leq 1\\ x\geq\log_a 2+1\end{array}\right.$

В таком случае мн-вом решений нер-ва не может быть отрезок (имеется ∞ кол-во реш.).

Случай $a>1$ нам не подходит.

II случ.

$\log_2 a<0$

$a<1$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2<0$ всегда >0 ($a\neq 0$ см. ОДЗ)

$a^2(a^{2x-2}-3a^{x-1}+2)<0$

Замена: $t=a^{x-1}$

$t^2-3t+2<0$

$(t-1)(t-2)<0$

$+$ 1 $-$ 2 $+$ t

выколотые точки

$\begin{cases} t>1\\ t<2\end{cases}$ $\begin{cases} a^{x-1}>1\\ a^{x-1}<2\end{cases}$

Т.к. $a\neq 1$, то можем прологарифмировать обе части нер-ва по осн. a если $0<a<1$, то ф-я логарифма убывает

$\begin{cases}\log_a a^{x-1}<\log_a 1\\ \log_a a^{x-1}>\log_a 2\end{cases}$

$\begin{cases} x<1\\ x>\log_a 2+1\end{cases}$

$\log_a 2+1<x<1$

Здесь мн-вом реш. нер-ва ~~явл. отрезок~~ может являться отрезок длиной 2026, если

$1-(\log_a 2+1)=2026$

$-\log_a 2=2026$

$\log_a 2=-2026$ $a^{-2026}=2$

$a^{2026}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}\\ a=-\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}\end{array}\right.$

Ответ: при $\left[\begin{array}{l} a=2^{-\frac{1}{2026}}\\ a=-(2^{-\frac{1}{2026}})\end{array}\right.$