0 232847 200002

23-28-47-20
(128.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мурецкого Егора Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

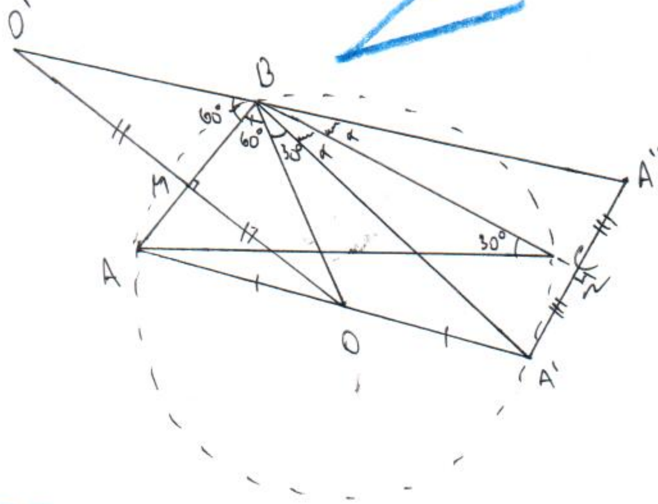
«29» марта 2026 года

Подпись участника

23-28-47-20
(128.3)

№3

60 (шестьдесят)



Найти: $\angle ABC = ?$

Решение:

1) Пусть A' – диаметрально противоположная точке A, тогда $AO = A'O = r$, где r – радиус опис. окр. $\triangle ABC$.

Проведем BO и BA', $BO = r$, т.к. радиус (O – центр, B – на окр. с ц. O)

По т. синусов: $AB = 2 \cdot \sin\angle ACB \cdot r = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r = r \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB$ – равносторонний $\Rightarrow \angle ABO = 60°$.

AA' – диаметр $\Rightarrow \angle ABA' = 90° \Rightarrow \angle OBA' = \angle ABA' - \angle ABO = 30°$.

2) Пусть $AB \cap OO' = M$, $BC \cap A'A'' = N$, тогда

$OM = O'M$ и $BM \perp OO'$, $BN \perp A'A''$ и $A'N = A''N \Rightarrow \triangle O'BO$ и $\triangle A'BA''$ – равнобедренные $\Rightarrow$ BM – бис-са и BN – бис-са $\Rightarrow \angle O'BM = \angle OBM = 60°$ и $\angle A'BN = \angle A''BN$. Пусть $\angle A'BN = \angle A''BN = \alpha$

3) O', B, A'' – на одной прямой $\Rightarrow \angle O'BA'' = 180°$

$\angle O'BA'' = \angle O'BM + \angle OBM + \angle A'BO + \angle A'BN + \angle A''BN = 60° + 60° + 30° + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 15°$

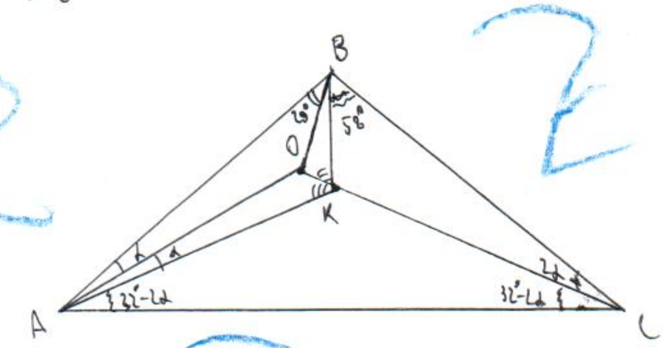
$\angle ABC = \angle ABO + \angle A'BO + \angle A'BN = 60° + 30° + 15° = 105°$

Ответ: $105°$.

№6

Найти: $\frac{\angle BOA}{\angle BAO} = ?$

Решение:



1) По сумме углов в $\triangle ABC$:

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 116°$

$\angle OBC$ в 3 раза больше $\angle ABO$ =>

$\Rightarrow \frac{\angle OBC}{\angle ABO} = 3$

$\angle OBC + \angle ABO = \angle ABC = 116° \Rightarrow \frac{\angle OBC}{\angle ABO} = \frac{\angle OBC}{116° - \angle OBC} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\angle OBC = 116 \cdot 3 \Rightarrow \angle OBC = 87° \Rightarrow \angle ABO = 29°$

Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle BCO = 2\alpha$.

Проведем из т. A прямую, образующую с AB угол равный 2α, и проходящую через внутри $\triangle ABC$. ~~Тогда~~ Пусть эта прямая пересекает OC в т. K, тогда ~~$\angle OAK = \angle BAK$~~ $\angle BAK = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAK = \angle BAK - \angle BAO = \alpha \Rightarrow$ AO – бис-са $\angle BAK$.

Проведем BK.

2) $\left.\begin{array}{l}\angle KAC = \angle BAC - \angle BAK = 32° - 2\alpha \\ \angle KCA = \angle BCA - \angle BCO = 32° - 2\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AKC$ – равнобедренный =>

$\Rightarrow AK = KC$

$\angle BAC = \angle BCA = 32° \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow AB = CB$.

$\triangle ABK = \triangle CBK$, т.к. $\angle BAK = \angle BCK = 2\alpha$, $AB = CB$ и $AK = KC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABK = \angle CBK$

$\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 116° \Rightarrow \angle ABK = \angle CBK = 58° \Rightarrow$

$\angle ABK = \angle ABO + \angle KBO \Rightarrow \angle KBO = 58° - 29° = 29° \Rightarrow$ BO – бис-са $\angle ABK$

3) В $\triangle ABK$: AO – бис-са и BO – бис-са => KO – бис-са, т.к. бис-сы треугольника пересекаются в одной точке $\Rightarrow \angle AKO = \angle BKO$.

23-28-47-20 (128.3)

$\angle AKO = 180^\circ - \angle AKC = 180^\circ - (180^\circ - \angle KAC - \angle KCA) = \angle KAC + \angle KCA = 64^\circ - 4\alpha$

$\angle BKO = 180^\circ - \angle BKC = 180^\circ - (180^\circ - \angle CBK - \angle BCK) = \angle CBK + \angle BCK = 58^\circ + 2\alpha$

$\angle AKO = \angle BKO \Rightarrow 64^\circ - 4\alpha = 58^\circ + 2\alpha \Rightarrow 6\alpha = 6^\circ \Rightarrow \alpha = 1^\circ$

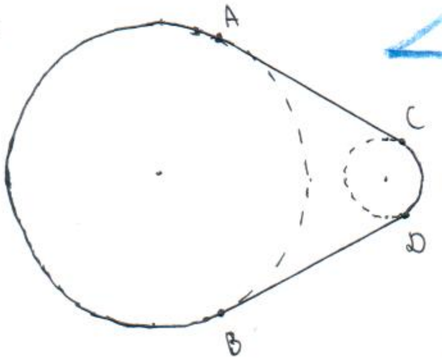
и) $\angle BOA = 180^\circ - \angle BAO - \angle ABO = 180^\circ - 1^\circ - 29^\circ = 150^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\angle BOA}{\angle BAO} = \dfrac{150^\circ}{1^\circ} = 150 \Rightarrow \angle BOA$ в 150 раз больше $\angle BAO$.

Ответ: в 150 раз.

№7

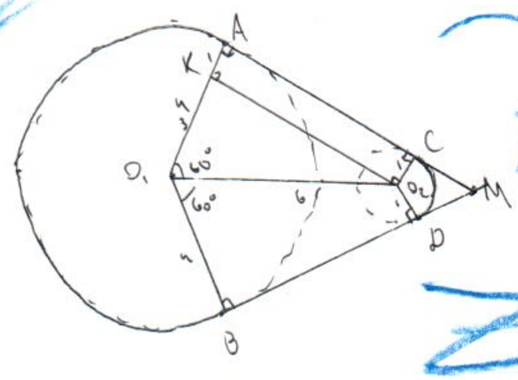
Пусть A, B — точки касания касательных окружности радиуса 4, а C, D — т. касания окр. радиуса 1 (как на рисунке)



Сначала заметим, что когда газонокосильщик едет по внешней касательной двух окружностей, он едет по прямой и эта газонокосилка отбрасывает траву в одном направлении перпендикулярно этой прямой, т.е. участок ~~где~~ дорожки из травы будет получаться параллельным переносом касательной на ~~р~~ расстояние 1,5, значит длина касательной и длина участка дорожки из травы, образованного при движении по касательной, будут равны.

Если газонокосильщик движется по окружности, то трава отбрасывается по прямой, проходящей через центр этой окружности ~~радиусом~~, т.к. она отбрасывается перпендикулярно ~~движению~~ направлению своего движения (на окружности ~~направлена~~ направление движения по касательной) $\Rightarrow$ участок дорожки из травы получается гомотетией ~~к~~ дуги окружности на коэф. $k = \frac{r-1,5}{r}$ и центром ~~ОА~~ в центре окружности.

Найдем дуги AB и CD.



Проведем радиусы в т. касания

Проведем прямую через центры окружностей. Пусть O_1 – центр окр. с рад. 4, а O_2 – с рад. 1, тогда $O_1O_2 = 6$.

Проведем из O_2 прямую параллельно AC. Пусть она пересекает O_1A в точке K.

O_2KAC – прямоугольник (все углы по $90°$ т.к. $O_2K \parallel AC$) $\Rightarrow KA = O_2C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1K = 3 \Rightarrow$

Т.к. $O_2K \parallel AC \Rightarrow$, то $\angle AKO_2 = 90° \Rightarrow \angle O_1KO_2 = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1KO_2$ – прямоугольный $\Rightarrow \cos\angle KO_1O_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle KO_1O_2 = 60°$

O_1O_2 – ось симметрии $\Rightarrow \angle BO_1O_2 = \angle KO_1O_2 = 60° \Rightarrow \angle AO_1B = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ длина большей $\frown AB$ равна $\frac{2}{3} \cdot 2\pi r_1$.

Продлим касательные до пересечения в точке M.

$\angle CO_2D = 180° - \angle CMD = 180° - \angle AMB = \angle AO_1B = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ длина меньшей дуги $\frown CD$ равна $\frac{1}{3} 2\pi r_2$

Найдем AC и BD.

Из симметрии $AC = BD$

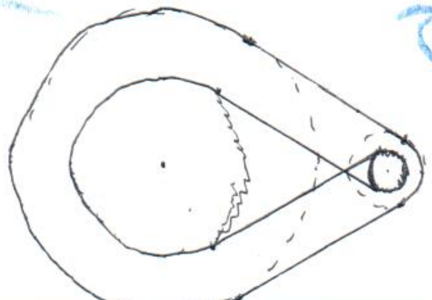
Т.к. O_2KAC – прямоугольник, то $KO_2 = AC$

В $\triangle O_1KO_2$ по т. Пифагора: $KO_2 = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = BD = 3\sqrt{3}$

Найдем длину дорожки из правил.

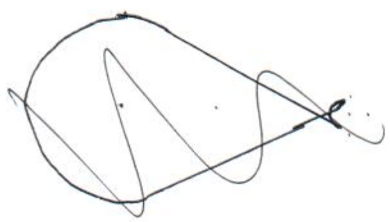
– дорожка из правил



23-28-47-20
(128.3)

~~Д~~ Дорожка состоит из 4 ~~как~~ участков

Пусть A', B', C', D' — соответственные образы после гомотетий дуг окружностей.



Окружность с радиусом 4 перейдет в окружность с радиусом 2,5 т.к. $k = \frac{4-1,5}{4} = \frac{2,5}{4}$, а окр. с рад. 1 перейдет в окр. с рад. 0,5, т.к. $k = \frac{1-1,5}{1} = -0,5$ => ~~А~~ длина участка $A'B'$ равна

~~Зл~~ $\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 2,5 = \frac{10}{3}\pi$, а длина участка $C'D'$ равна $\frac{1}{3} 2\pi \cdot 0,5 =$

$= \frac{1}{3}\pi$

Длины участков $A'C'$ и $B'D'$ равны длинам AC и BD, т.к. при пар. переносе длина отрезка не изменяется => $A'C' = 3\sqrt{3}$ и $B'D' = 3\sqrt{3}$, значит длина всей дорожки из шрафа равна $\frac{10}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} =$

$= \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: ~~П~~ $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

№5

$tgx \cdot tgy \cdot tgz = tgx \cdot tgy \cdot ctg(x+y) = \frac{tgx\,tgy}{tg(x+y)} = \frac{tgx\,tgy(1-tgx\,tgy)}{tgx+tgy}$

$tgx + tgy \overset{\geq}{} 2\sqrt{tgx\,tgy}$ =>

=> $tgx\,tgy\,tgz = \frac{tgx\,tgy(1-tgx\,tgy)}{tgx+tgy} \leq \frac{tgx\,tgy(1-tgx\,tgy)}{2\sqrt{tgx\,tgy}} =$

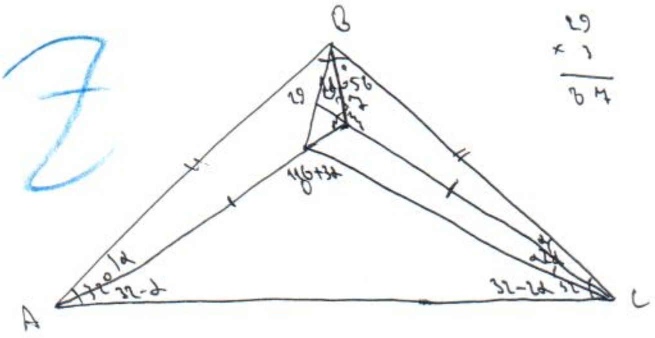
$= \frac{\sqrt{tgx\,tgy}(1-tgx\,tgy)}{2}$

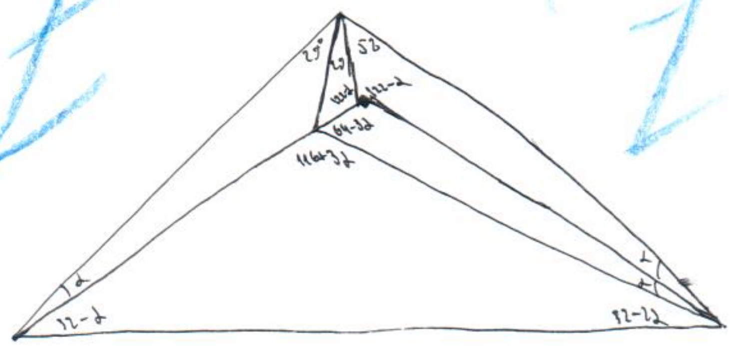
$tgx\,tgy < tgx\,tg(\frac{\pi}{2}-x) = 1$

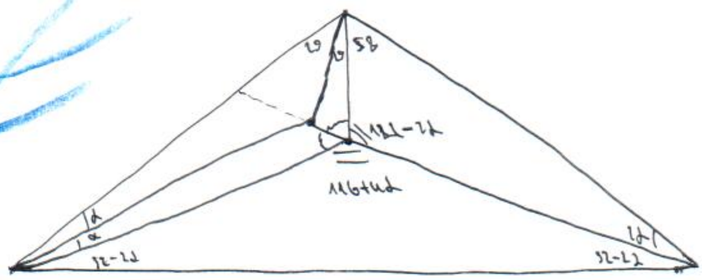
Черновик

$\frac{BOA}{BAO} = \frac{BDA}{6\alpha}$

$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 3 \\ \hline 87 \end{array}$







$122-2\alpha = 116+4\alpha$

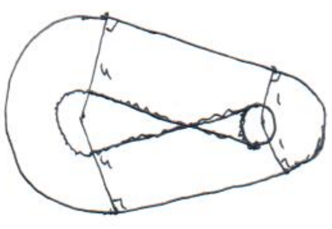
$6 = 6\alpha$

$\alpha = 1$

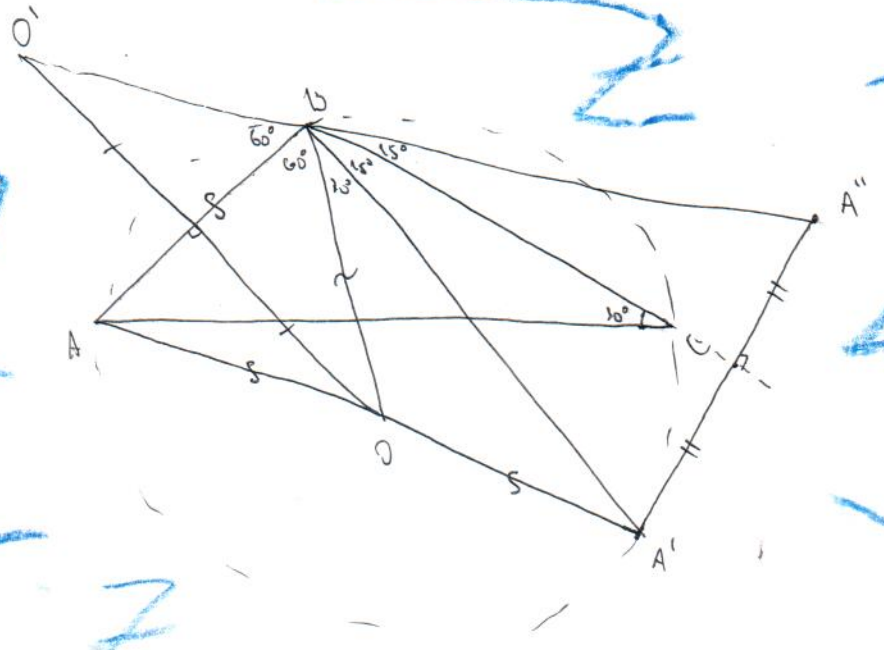
$58+2\alpha = 64-4\alpha$

$6\alpha = 6$

$\alpha = 1$



Черновик



$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z \qquad 0 < x, y, z < \frac{\pi}{2} \qquad x+y+z = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)$

$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$

$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y \ (\operatorname{tg}(x+y)$

$\dfrac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(x+y)} = \dfrac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y} \le \dfrac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)}{2\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}} \cancel{\le} =$

$\cos x\cos y - \sin \ldots = \cos(x+y)$

$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad 1 - \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}$

$\dfrac{\sin x\sin y(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)}{\sin(x+y)}$

$= \dfrac{a(1-a)}{2\sqrt{a}} = \dfrac{-a^2+a}{2\sqrt{a}} =$

$\dfrac{\sin x\sin y\cos(x+y)}{\cos x\cos y\sin(x+y)}$

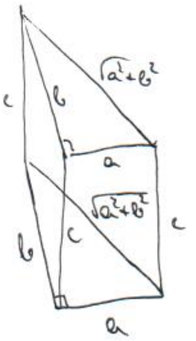
$= \dfrac{\sqrt{a}(1-a)}{2} <$

$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y < \operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \cancel{x}\right) = 1$

$\sqrt{a}($ $\qquad a(1-a) \le \left(\dfrac{a+1-a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\sqrt{a}(1-a) \le \left(\dfrac{\sqrt{a}+1-a}{2}\right)^2$

Черновик



$$\underbrace{\tfrac{1}{2}abc}_{V} + \underbrace{\left(ac+bc+\sqrt{a^2+b^2}\cdot c + 2\cdot\tfrac{1}{2}ab\right)}_{S} +$$

$$+2a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}+3c = 2026$$

$$\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$$

$$\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$$

$$\tfrac{1}{2}abc + ac + bc + ab + \sqrt{a^2c^2+b^2c^2} + 2a+2b+2\sqrt{a^2+b^2} + 3c = 2026$$

$$\tfrac{1}{2}abc = 2026 - ac - bc - ab - 2a - 2b - 3c - \sqrt{a^2c^2+b^2c^2} - 2\sqrt{a^2+b^2} \geq$$

$$\geq 2026 - ac - bc - ab - 2a - 2b - 3c - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - (a^2+b^2+1)$$

$$abc \geq 4050 - 2ac - 2ab - 2bc - 4a - 4b - 6c - 3a^2 - 3b^2 - c^2$$