0 191640 400005

19-16-40-40
(124.30)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

выход 13:24 – 13:27

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Муллаянова Тимура Айдаровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

19-16-40-40
(124.30)

75 (семьдесят пять)

черновик

$\sqrt{6(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})} = 4\sin x$ $\qquad \sin x \geq 0$

$6(1-tg^2 x) = 16\sin^2 x$

$6 - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\sin^2 x$

$6 - 6\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 16\sin^2 x$ $\qquad \sin^2 x = t$

$\cancel{6(1-\sin}$ $6(1-t) - t = 16t(1-t)$

$6 - 6t - t = 16t - 16t^2$

$16t^2 - 23t + 6 = 0$

$D = 23^2 - 24\cdot 16$

$t = \frac{23 \pm \sqrt{145}}{2}$

$23 \times 23 = 69,\ 46,\ 529$; $529 - 384 = 145$

$24 \times 16 = 144,\ 24,\ 384$

$(x-3)(x-4) = x^2 - 7x$

$6(1-t) - 6t = 16t(1-t)$

$\cancel{6-6t}$ $6 - 12t = 16t - 16t^2$

$16t^2 - 28t + 6 = 0$

$16(t - \frac{4}{16})(t - \frac{24}{16}) = 16t^2 -$

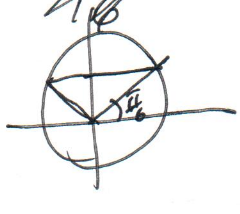
$16\cdot 6$

$4\ 24$

$\cancel{4\cdot 6}$

$\cancel{16}$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = \cancel{\frac{24}{4}}\ \frac{1}{2} \\ \sin x = \end{array}\right.$ $\qquad \frac{24+4}{16}\cdot 16$



A $\quad \frac{a}{S(a)} = 2 \vdots 9$

$a \vdots 9 \to S(a) \vdots 9 \qquad a \vdots 81$

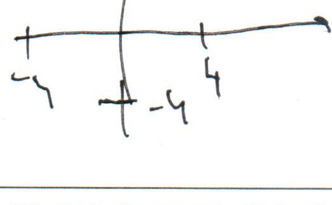
$81\cdot 3 + 81\cdot 6 + 81\cdot 11$

$\frac{162}{9} \cdot 2 = 18$

$\times\ 81,\ 12,\ 162,\ 81$

$\times\ 81,\ 13$

$113 | 81$, $81 | 12$, 189



Чистовик

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \ (*) \\ \sin x \geq 0 \ (v) \end{cases}$

Решим

$(*)$: ~~ct~~ $6 - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\sin^2 x \Leftrightarrow 6 - 6\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} =$

$= 16\sin^2 x$. Пусть $t = \sin^2 x$. ~~tk~~ $6 - 6\frac{t}{1-t} = 16t \,|(1-t)$

~~t~~ (домножить можно т.к. tg при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ не определён). $6(1-t) - 6t = 16t(1-t) \Leftrightarrow 6 - 12t =$

$= 16t - 16t^2 \Leftrightarrow 16t^2 - 28t + 6 = 0 \Leftrightarrow 16\left(t - \frac{4}{16}\right)\left(t - \frac{24}{16}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{16} \\ t = \frac{24}{16} \text{ — не м.б. т.к. } \sin^2 x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{4}{16} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{2}{4} \\ \sin x = -\frac{2}{4}\text{, но из } (v) \text{ не м.б.} \end{array}\right. \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi k \end{array}\right.$, где $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

№2

Пусть a – произвольное число мн-ва A. Тогда пусть $S(a)$ – сумма цифр этого числа. Известно, что $\frac{a}{S(a)} = c \in \mathbb{Z}$, $c \vdots 9$ ~~a~~ $\Rightarrow a \vdots 9$, ~~но если a~~ т.е. ~~число~~ $a \vdots 9$ является необходимым условием для того, чтобы c было кратно 9. Но тогда $S(a) \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 81$. Теперь мы понимаем, что необходимое условие более сильное – $a \vdots 81$. Несложно видеть, что оно является достаточным. Пусть нет. Тогда $\exists\, a \vdots 3^4$ ~~a~~ и ~~a~~ $100 \leq a \leq 999$: $\frac{a}{S(a)} \not\vdots 9 \Leftrightarrow$

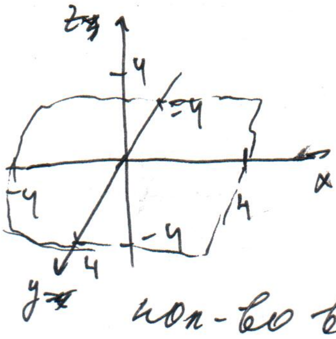
$\Leftrightarrow \frac{k \cdot 3^4}{S(a)} \not\vdots 3^2 \Rightarrow S(a) \vdots$ хотя бы $3^3 = 27$, но такое

~~число при $100 \le a \le 999$ ед~~

чистовик

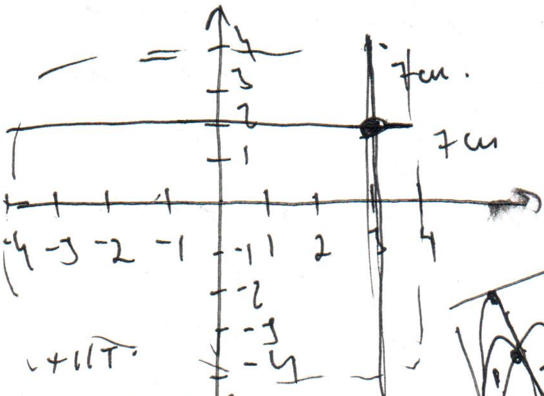
число при $100 \le a \le 999$ - единственное - это 999, оно нам не подходит ($\not\vdots 81$). Мы получили, что для трёх значных a кратность 81 является критерием. Осталось рассмотреть нужные a по порядку: $81 \cdot 3$ - второе (очевидно, что $S(a)$ не будет $=0$) $81 \cdot 6$ - иное $81 \cdot 12$ - последнее ($81 \cdot 13 \ge 1000$), $\Rightarrow 81 \cdot 11$ - предпоследнее. Тогда искомая сумма $= 81(11+6+3) = 81 \cdot 20 = 1620$. Ответ: 1620

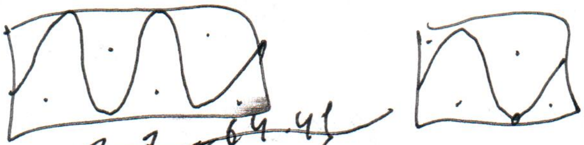
№ 3



Рассмотрим все прямоуг. Δ-и катеты которых ∥ осям в плоскости Oxy. Заметим, что если мы посчитаем кол-во таких Δ-ов в этой плоскости, то кол-во всех таких Δ-ов, катеты которых ∥ ox; oy будет это число умноженное на 9, т.к. плоскость ∥ oxy можно задать 9-ю способами ($z = \{-4; \dots; 4\}$). Несложно видеть, что кол-во ~~прям~~ таких Δ-ов в этих плоскостях будет точно таким же и то, что для 2 произвольных плоскостей из мн-ва плоскостей ∥ oxy не найдутся 2 совпадающих Δ-ка т.к. плоскости не имеют общих точек. Тогда общее кол-во таких Δ-ов ~~будет умноженное~~ катеты которых ∥ осям x, y, z будет полученное число умноженное на 3, т.к. выбрать 2 оси можно 3-мя способами и ещё то же заметим, что не найдутся совпадающие Δ-ки просто в силу ~~условия~~ того, что катеты ∥ осям. Тогда осталось посчитать

Черновик



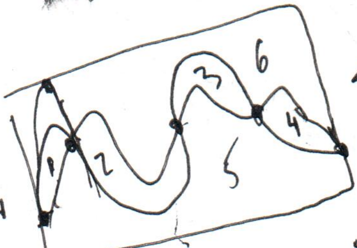


$8\cdot 8 = 64 \cdot 41$

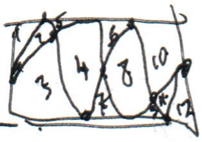
$8\cdot 8\cdot 8$

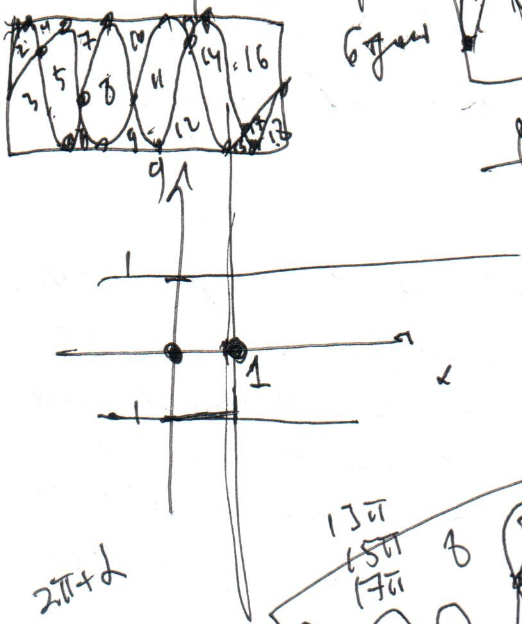
$3\cdot 64\cdot 81\cdot 9$

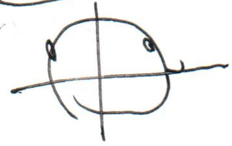
477



$$\begin{array}{r} 27\\ \times\ 64\\ \hline 108\\ 162\\ \hline 1728\\ \times\ 81\\ \hline 1728\\ 13824\\ \hline 139968 \end{array}$$

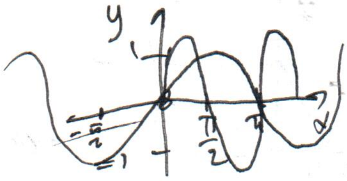


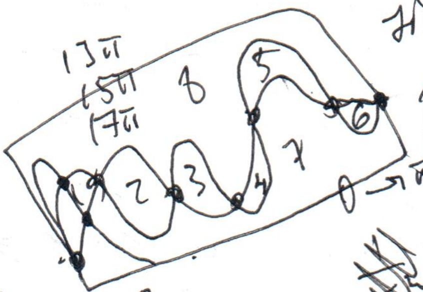




$y = \sin 17\pi x$

$\sin 13\pi x$

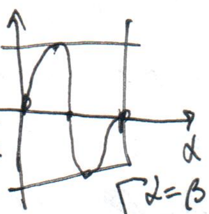




$2\pi+\alpha$

$\alpha = \beta + 2\pi k$

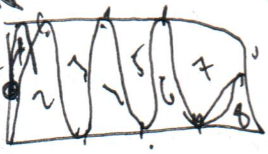
$\alpha = \pi - \beta + 2\pi k$



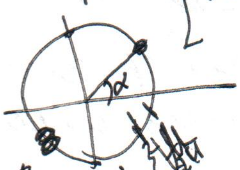
$\frac{k\pi}{2} < 17$

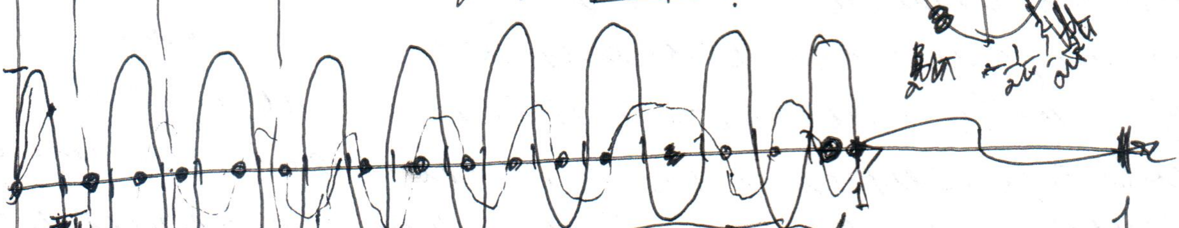
$k = 33$

$\frac{33-1}{2}+1 = 17$



$\alpha = \beta$





$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 13\pi x = 15\pi x + \ldots\\ 13\pi x + 15\pi x = k\pi\\ 13\pi x + 15\pi x = -k\pi \end{array}\right.$$

13

$$\left[\begin{array}{l} 13\pi = 15\pi\\ 28x = k\\ 28x = -k \end{array}\right.$$

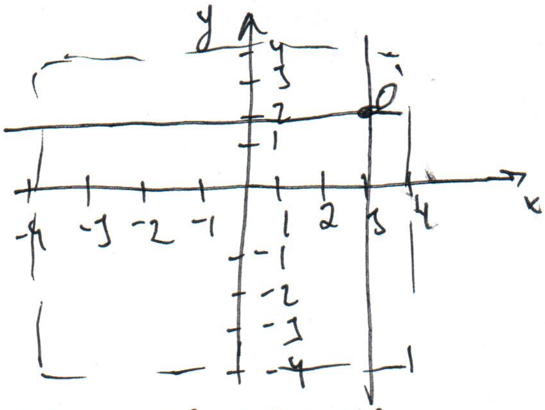
$x \in [0;1]$

$28 = 2^2\cdot 7$

$3\cdot 2 = 6$

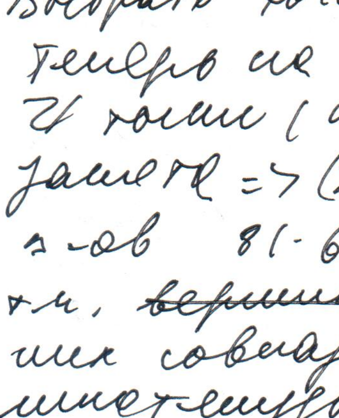
12

Учитывая
кол-во таких ∆-ов на Оху:



Вершину лежащую напротив гипотенузы будем выбирать следующим образом: выбираем в квадрате одну прямую ∥ ох и одну ∥ оу (проходящие через целые точки). Тогда такие прямые точно пересекутся внутри квадрата и их пересечение даст такую точку (к примеру О). Несложно видеть, что каждой ч выбранной соответствует одна точка и наоборот по точке единственным образом восстанавливаются 2 прямые. Выбрать точку $9 \cdot 9 = 81$ сп (к прямую 9 способами) теперь на 7 точек прямых осталось выбрать 2 точки (на каждой по одной). Точка О заметa $= 7(9-1)(9-1) = 64$ сп. Итого таких ∆-ов $81 \cdot 64$ (именно 2-∆ не совпадают т.к. ~~вершина~~ если они совпадают, то у них совпадают вершины напротив гипотенузы, но раз конкретно выбранный мы ~~не считаем~~ в нашем способе не считаем никакой ∆-ик дважды). Тогда всего: $9 \cdot 3 \cdot 81 \cdot 64 = 1\cancel{3\,9967}$ 139968

№4

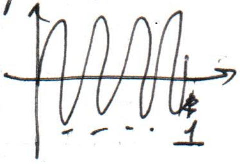


Рассмотрим что такое $y = \sin \pi x$. Если $f(x) = \sin x$, то $\sin \pi x = f(\pi x)$). Т.е. график функции „растягивается" или „сужается" вдоль оси x относительно оси y.

Чистовик

~~Прям~~ ~~Прям~~ ~~тогда рассмотрим поп~~

Тогда при $k = \{13; 15; 17\}$ график «сожмётся» к оси y в $k\pi$ раз (



)

~~Посчитаем сколько пересече~~

Сначала построим график $y = \sin 17\pi x$. Заметим, что т.к. $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то $y = \sin 17\pi x$ коснётся верхней и нижней стороны прямоугольника ~~в точ~~ в 17 точках. А левой и правой соответственно по одной, причём при $x = 0$ $\sin = 0$ и при $x = 1$ $\sin 17\pi = 0$. Т.е. наш график имеет 19 точек пересечения с прямоугольником $\Rightarrow$ прямоугольник разбит на 19 частей. Теперь ~~по~~ аналогично построим график при $k = 15$. С прямоугольником он будет иметь 17 точек пересечения, но нас интересуют только 15 т.к. начальная и конечная точки всех наших графиков совпадают. Теперь посчитаем кол-во точек в которых графики пересекаются. Т.е. $\sin 17\pi x = \sin 15\pi x$

~~$\sin 17\pi x = \sin 15$~~

~~$17\pi x = 15\pi x \rightarrow$~~

~~$17\pi x + 15\pi x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$~~

~~$33x$~~

~~$17\pi x = 15\pi x + 2\pi n$~~

~~$17\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi t$~~ ~~$n, t \in \mathbb{Z}$~~

~~$17x = 15x + 2k$~~

~~$17x = 1 - 15x + 2t$~~ ~~$\Leftrightarrow$~~

~~$x = k$~~

~~$32x = 1 + 2t$~~

~~Т.е. $17\pi x + 15\pi x = \pi(2k+1)$~~

~~$32\pi x = \pi(2k+1)$~~

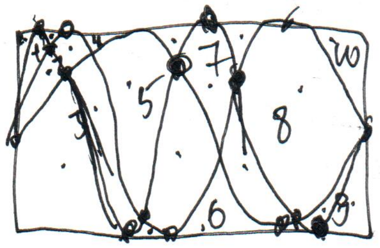
~~$32x = 2k+1$~~

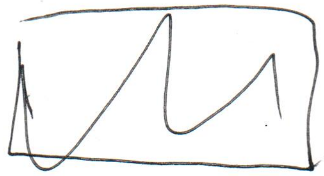
~~$32 \cdot 7 \cdot 2$~~

тогда несложно видеть, что их графики пересекаются в 16 точках. ~~т.е. все~~ очевидно, что в точках касания с ~~прямоу~~ верхней и нижней сторонами прямоугольника они совпадающие у 2 графиков. тогда +31 точка пересеч. => +32 новые области. Аналогично $y=15\pi x$ ~~пересекает~~ касается верхней и нижней сторон в 15 точках. А также графики $y=\sin 15x$ ~~от~~ пересекают в 14 точках, а $y=\cancel{17}\sin 17x$ в 16 точках. Тогда после 2 графиков областей $-19+32=51$,

А теперь $\to 51+13+\cancel{14}+\overset{16+7}{\cancel{17}} = \cancel{96} = 95$ Ответ: ~~96~~ 95

Черновик

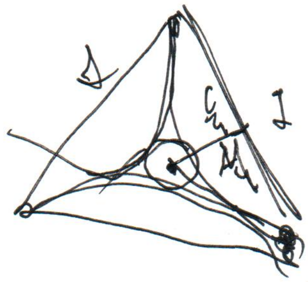


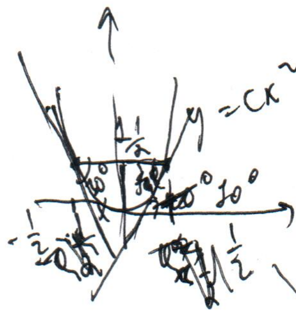


ю о.

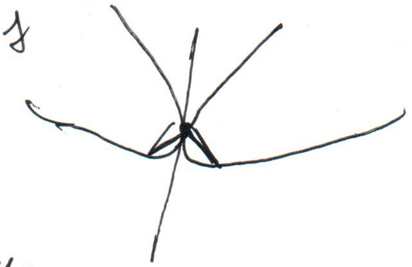
числ.

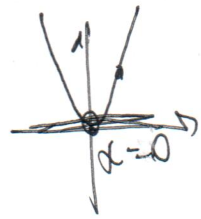
не зап 21 зона





$\frac{c}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

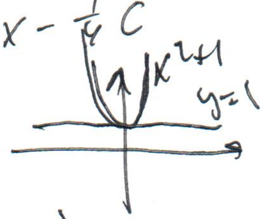




$y= \; y=$

$\begin{cases} cx^2 = kx + b \\ \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}k + b \end{cases}$ $y = cx - \frac{1}{4}c$

$c = 2k + 4b$



$k^2 - 4bc = 0$

$k^2 - 4b(2k+4b) = 0$ $k^2 - 8bk + 16b^2$

$(k-4b)^2 = 0$

$k = 4b$

$\begin{cases} cx^2 = kx + b \\ \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}k + b \end{cases}$ $\frac{1}{4}c = b \Rightarrow k = c$

$tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(x+1)^2$ $2(x+1)$

$2x$

$\begin{cases} k^2 - 4bc = 0 \\ c = 2k + 4b \end{cases}$ $x_0 = 0$

$k^2 - 4b(2k+4b) = 0$ $k^2 - 8bk - 16b^2 = 0$

$D = 64b^2$ $0 \cdot x +$

$\cancel{\frac{1}{4}c = 2 \pm 2\sqrt{2}b + b}$ $\cancel{k = 8b\sqrt{2}}$

$2x$

$c = 8 \pm 8b\sqrt{2} + 4b$ $k = \frac{8 \pm 8b\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 4b\sqrt{2}$

$y = (x - x_0) f(x_0) + f'(x_0)$ $x \cdot 1$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = x \cdot 1 + 0$ $x \cdot 0 + 1$

cx^2

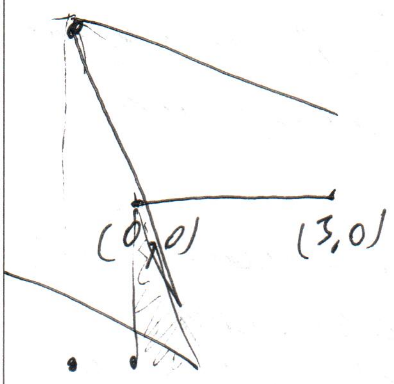
Черновик

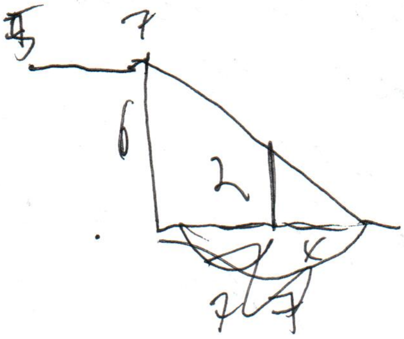
$y = 2cx(x-\frac{1}{2}) + c\cdot\frac{1}{4} = 2c\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}c$

$cx - \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}c =$

$= \underline{cx - \frac{1}{4}c}$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

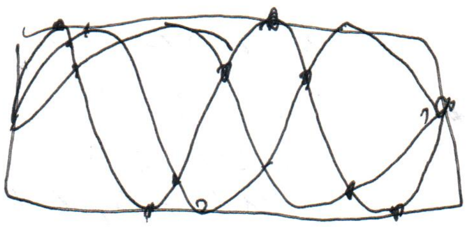




$\frac{2}{x} = \frac{6}{7+x}$

$14 + 2x = 6x$

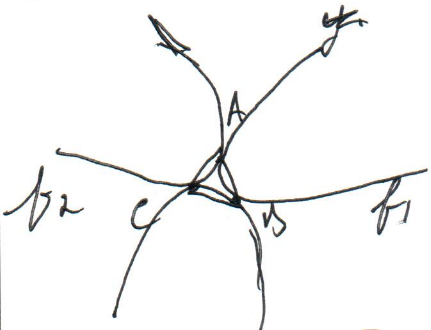
$x = 3,5$



10

10 точек [illegible]

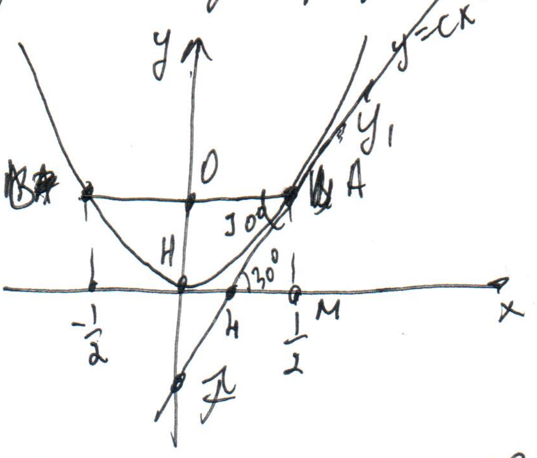
№5 Чистовик



все параболы задаются $y = cx^2$.

$\triangle ABC$ — равносторонний, т.к. все стороны $= 1$.

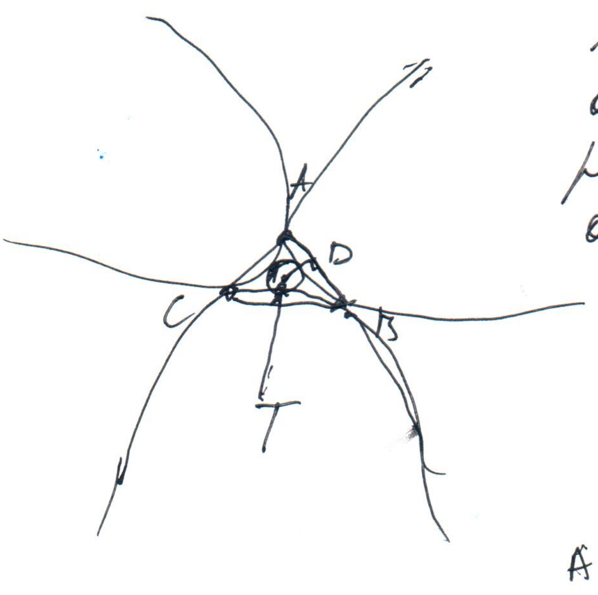
Так как у $\triangle$ составленного из парабол углы равны нулю $\Rightarrow$ касательные к p_1 и p_2 в т. A совпадают, т.е. для $\triangle ABC$ — это бис-а в силу симметрии. Изобразим $y = cx^2$:



Т.к. касательная — бис-а и $\triangle ABC$ равностор., то $\angle BAF = 30° \Rightarrow \angle ALM = 30°$, в силу того, что $AB \parallel Ox$ (а это в силу симметрии $\triangle$-а составленного из парабол)

По формуле касательной:

$y_1 = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = 2c\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + c\cdot\frac{1}{4} = cx - \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}c = cx - \frac{1}{4}c$. Т.к. $\angle ALM = 30°$, то $c = tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = OH$



Чтобы найти радиус окружности надо из расстояния ~~от центра~~ от центра окружности до AB вычесть OH. Найдём TD: