



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

ПО математике
профиль олимпиады

Муравьёвой Эвелины Родионовной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
« 29 » марта 2026 года

Подпись участника

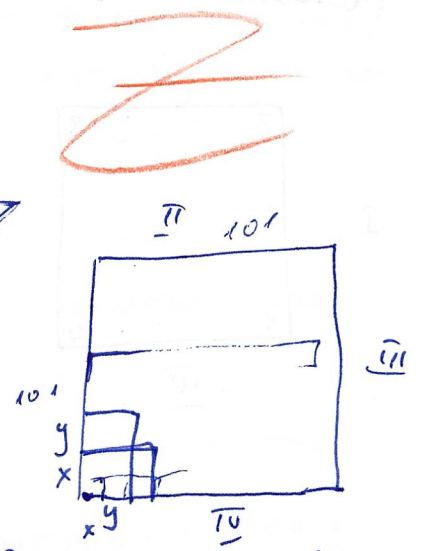
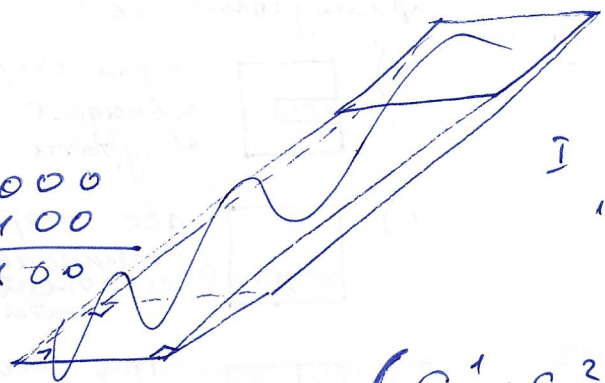
Черновик

лист

06-20-27-05
(1239)

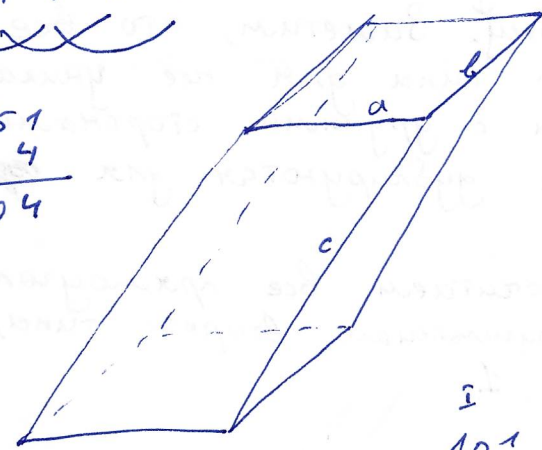
~~$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + \dots = 4 + 6 + 4 + \dots$~~

$$\begin{array}{r} 495000 \\ + 10100 \\ \hline 505100 \end{array}$$

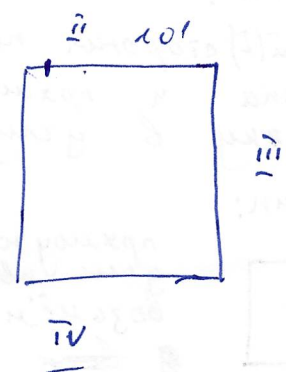


$(C_{101}^1 + C_{101}^2 + C_{101}^3 + \dots + C_{101}^{101}) \cdot 101$

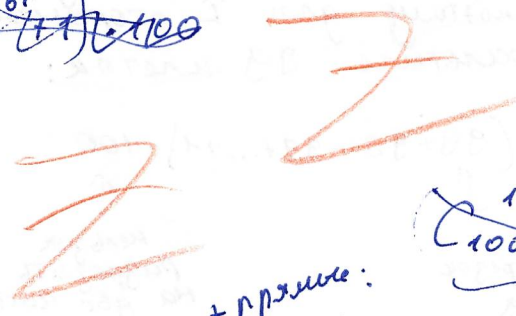
$$\begin{array}{r} 5051 \\ \times 4 \\ \hline 20204 \end{array}$$



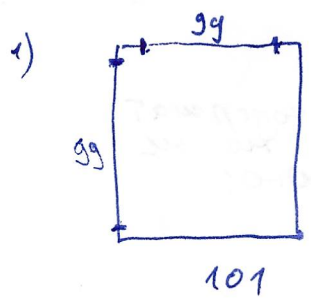
$(2^{101} + 1) \cdot 101 - 1$
для одной (II) стороны



~~$(2^{101} + 1) \cdot 101$~~



~~$(C_{100}^1 + C_{100}^2 + \dots + C_{100}^{100}) \cdot 101$~~
для II ст.



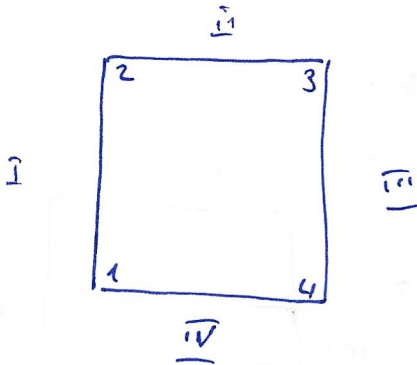
для I
для II
для III
для IV
для V
для VI
для VII
для VIII
для IX
для X
для XI
для XII
для XIII
для XIV
для XV
для XVI
для XVII
для XVIII
для XIX
для XX
для XXI
для XXII
для XXIII
для XXIV
для XXV
для XXVI
для XXVII
для XXVIII
для XXIX
для XXX
для XXXI
для XXXII
для XXXIII
для XXXIV
для XXXV
для XXXVI
для XXXVII
для XXXVIII
для XXXIX
для XL
для XLI
для XLII
для XLIII
для XLIV
для XLV
для XLVI
для XLVII
для XLVIII
для XLIX
для L
для LI
для LII
для LIII
для LIV
для LV
для LVI
для LVII
для LVIII
для LIX
для LX
для LXI
для LXII
для LXIII
для LXIV
для LXV
для LXVI
для LXVII
для LXVIII
для LXIX
для LXX
для LXXI
для LXXII
для LXXIII
для LXXIV
для LXXV
для LXXVI
для LXXVII
для LXXVIII
для LXXIX
для LXXX
для LXXXI
для LXXXII
для LXXXIII
для LXXXIV
для LXXXV
для LXXXVI
для LXXXVII
для LXXXVIII
для LXXXIX
для XL

$(99 + 98 + \dots + 1) \cdot 100 + 100 \cdot 101 \cdot 2$
 $\frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100 + 100 \cdot 101 \cdot 2$

2) $(\frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100 + 100 \cdot 101) \cdot 4 + 200$ 3) - / -

Чистовик

№2



Есть три вида подходящих нам вырезанных прямоугольников:

1) одна сторона совпадает со стороной квадрата

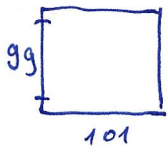
2) две стороны совпадают со стороной квадрата

3) три стороны совпадают со стороной квадрата

Зарисуем I сторону. Заметим, что все прямоугольники первого типа для неё уникальны (не имеют общих сторон с другими сторонами квадрата), второго типа дублируются для ~~одн~~ соседней стороны.

Для одной (I) стороны посчитаем все прямоугольники первого типа и прямоугольники второго типа, содержащие клетку в углу 1.

Первый тип:



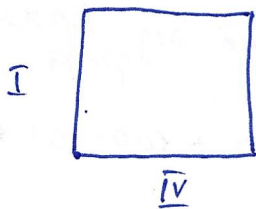
прямоугольники первого типа не содержат углы квадрата, поэтому для I стороны возьмём центральные 99 клеток:

$$(99 + 98 + 97 + \dots + 1) \cdot 100$$

кол-во способов выдрать отрезок длины 1 на стороне I

↑
нельзя разрезать на две части потому не 101.

Второй тип:



Исконные прямоугольники содержат левую минимально клетку, но не содержат левую верхнюю:

$$100 \cdot 101$$

↑
клетки на стороне I

↑
клетки на стороне IV

Теперь посчитаем тоже самое для остальных сторон квадрата (там всё так же) Чистовик
 Таким образом мы посчитали все прямоугольники 1-ого и 2-ого типов равно один раз, их:

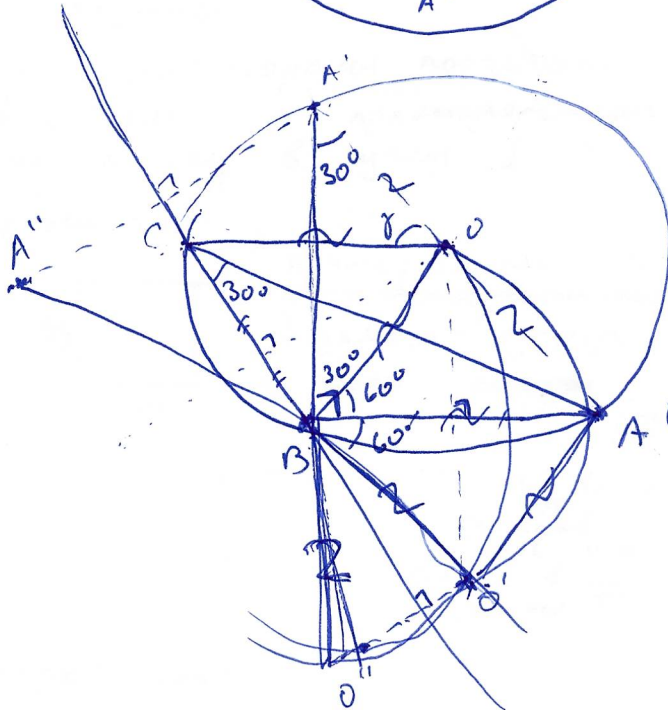
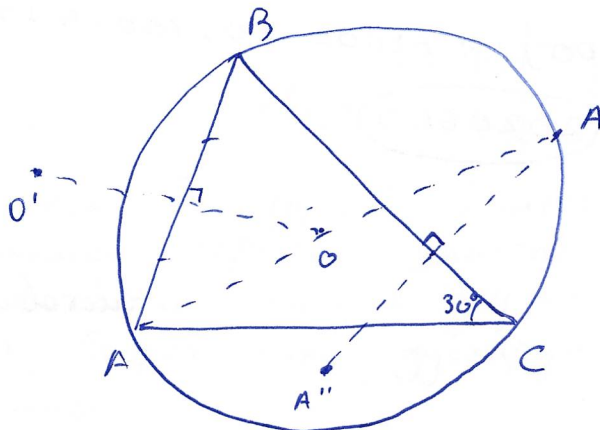
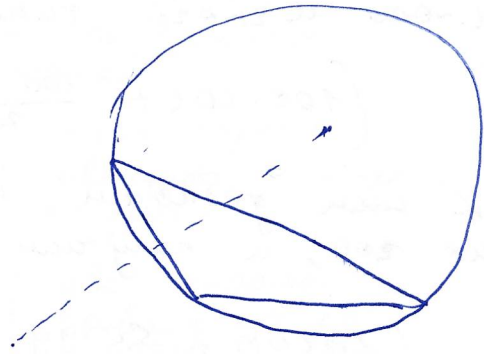
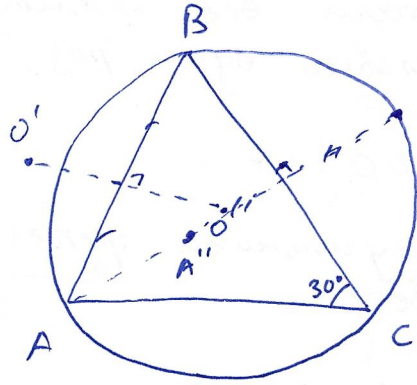
$$\left(100 \cdot 100 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100\right) \cdot 4$$

К ним добавим прямоугольники третьего типа, их 200, и получим ответ:

$$\begin{aligned} & (10000 + 50 \cdot 99 \cdot 100) \cdot 4 + 200 = \\ & = (10000 + 495000) \cdot 4 + 200 = 505100 \cdot 4 + 200 = \\ & = 2020400 + 200 = \mathbf{2020600} \end{aligned}$$

Чистовик

Черновик



S_{BC} :

$$A''O' \rightarrow A'O''$$

$$\frac{180 + \beta}{2}$$

$$r = 180 - (180 - \beta) \cdot 2 =$$

$$= 180 - 360 + 2\beta =$$

$$= 2\beta - 180$$

$$\frac{\beta - 180}{2} + 90 = \beta$$

$$\beta = 0$$

$$A''O' \parallel A'A$$

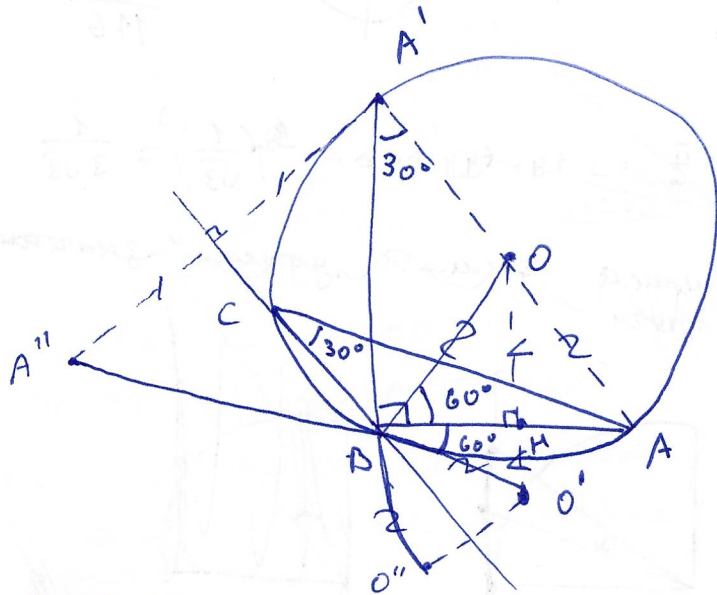
$$A''O' \rightarrow 2\gamma \rightarrow A'O'' \angle 30^\circ A'A$$

$B \in A''O$

06-20-27-05
(123.9)

Чистовик

~3



$OH = HO'$

1) Проведём симметрию $S_{BC} : O' \rightarrow O'' ; A'' \rightarrow A' ; B \rightarrow B$
 (ошраются на одну дугу \widehat{BA}) ; $A'B$ и O'' на одной прямой

$\angle BA'A = \angle BCA = 30^\circ \Rightarrow \angle OAB = 60^\circ = \angle OBA \Rightarrow \angle A'BA = 90^\circ$ (ошрается на диаметр)

$\Rightarrow OA = OB = BA$

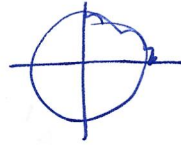
2) $\triangle OBO' - \text{р/б} \Rightarrow BO' = BO ; \angle OBO' = 120^\circ ; \angle BOA = 60^\circ \Rightarrow$
 т.к. $\triangle OBO' - \text{р/б}$ $OH - \text{высота} \Rightarrow \angle OBH = 60^\circ$

$\Rightarrow (A''O') \parallel (A'A) \Rightarrow \angle A''BA = \angle BA'A = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBA = 15^\circ \Rightarrow \angle B = 15 + 90 = 105^\circ$



Черневик



$$\begin{array}{r} 180 \\ - 64 \\ \hline 116 \end{array}$$

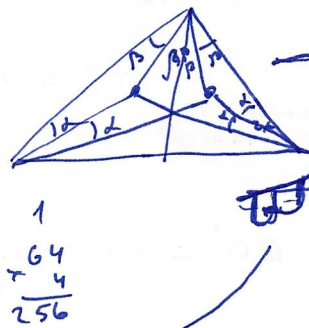
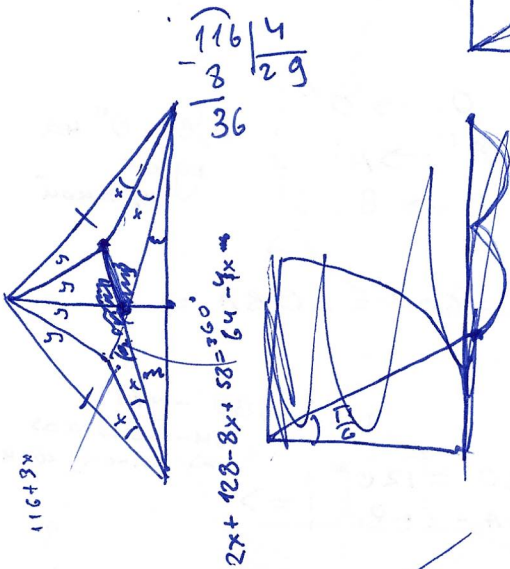
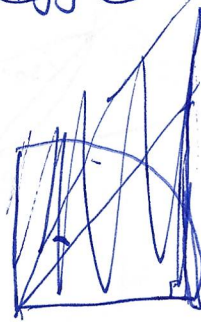
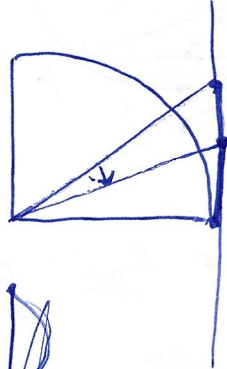
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z$$

$$x + y + z = \frac{\pi}{2}$$

Пусть $x = y = z = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} 3+3 &= 6 \\ 3 \cdot 3 &= 9 \\ 2 \cdot 4 &= 8 \end{aligned}$$

сохранение группы от груза *или мы удалим "зачеркнем"*



$$\begin{array}{r} 87 \\ + 32 \\ \hline 119 \end{array}$$

~~Handwritten scribbled text~~

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

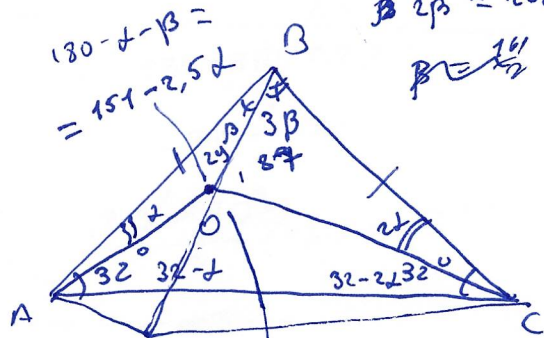
$$\begin{array}{r} 180 \\ - 58 \\ \hline 122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ - 16 \\ \hline 164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ - 119 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\frac{151 - 2,5\alpha}{\alpha} = \left(\frac{151}{\alpha} - 2,5\right)$$

$$\beta = \frac{58 - 3\alpha}{2} = 29 - 1,5\alpha$$



$$380 - 4\beta - 3\alpha + 116 - 3\alpha = 360^\circ$$

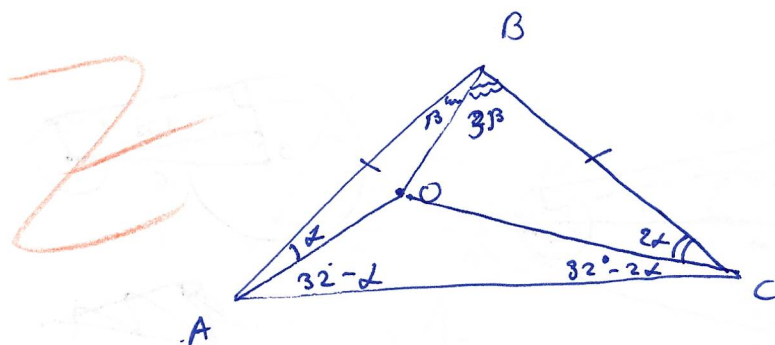
$$\begin{aligned} 116 - 3\alpha &= 2\beta + 58 = \\ &= 4\beta + 3\alpha \end{aligned}$$

$$116 = 6\alpha + 4\beta$$

$$58 = 3\alpha + 2\beta \Rightarrow \angle BOC = 122^\circ$$

Чистовик

№6



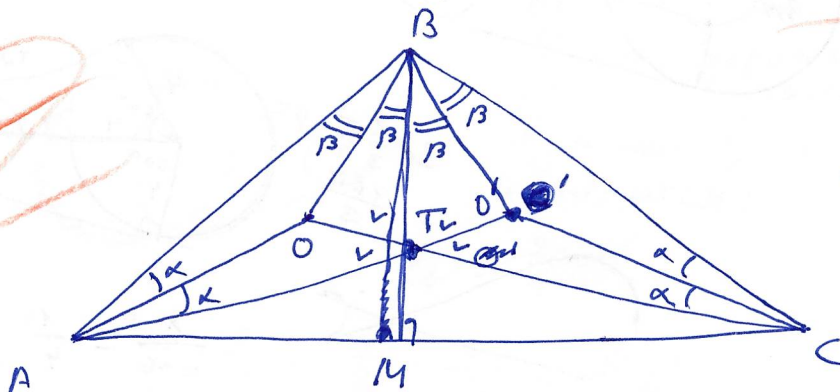
1) $\angle BAO = \alpha \Rightarrow \angle BCO = 2\alpha$; $\angle ABO = \beta \Rightarrow \angle OBC = 3\beta$
 $\angle OAC = 32 - \alpha$; $\angle OCA = 32 - 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - 64^\circ + 3\alpha = 116 + 3\alpha$
 $\angle BOC = 180 - 3\beta - 2\alpha = 122 - 2\alpha$
 $\angle BOA = 180 - \alpha - \beta = 151 - \alpha$ } $\oplus \Rightarrow$

$\Rightarrow 360^\circ - 3\alpha - 4\beta + 116 + 3\alpha = 360^\circ$

$116^\circ = 4\beta$

$\beta = 29^\circ$

2) Проведем симметрию относительно оси симметрии $\triangle ABC$



$AO' \cap CO = T \in BM$

$\mathbb{R} BO'$ и CO' - биссектрисы $\triangle TBC \Rightarrow TO' - \text{биссектриса} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BTO' = \angle CTO' = \angle BTO = \angle ATO$

$\angle TAC = \angle TCA = 32 - 2\alpha$

$\angle AOC = 116 + 3\alpha \Rightarrow \angle AOT = 180 - 116 - 3\alpha - \alpha = 64 - 4\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OTA = 180^\circ - 3\alpha - \alpha - 116^\circ = 64^\circ - 4\alpha \Rightarrow \angle ATB = \angle BTC =$

$\Rightarrow 4\angle OTA + \underbrace{180^\circ - 64^\circ + 4\alpha}_{\angle ATC} = 360^\circ \Rightarrow$

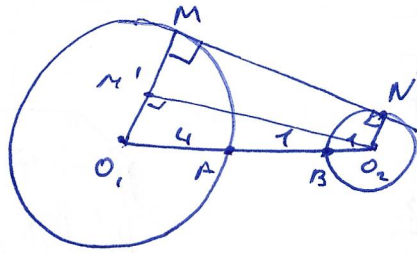
$\Rightarrow 256^\circ - 16\alpha + 180^\circ - 64^\circ + 4\alpha = 360$

$192^\circ - 12\alpha = 180^\circ \Rightarrow 12\alpha = 12^\circ \Rightarrow \alpha = 1^\circ$

3) $\angle AOB = 180 - 29 - 1 = 150^\circ \Rightarrow \text{ответ: } 150$

Чистовик

2



$$MN = 3\sqrt{3}$$

Архив

$$T_{M \rightarrow O_2} : \cancel{MN} = 1$$

$$MN \rightarrow M'O_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle O_1 M' O_2$ - прямоугольный

$$O_1 M' = 3$$

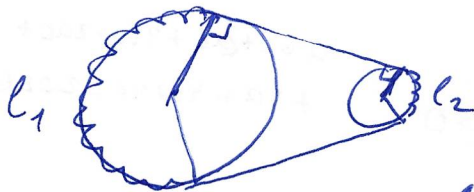
$$O_1 O_2 = 6 \quad | \Rightarrow \angle M' O_1 O_2 = 60^\circ \Rightarrow$$

\Rightarrow найдём длину ~~окруж~~ той части большой окружности, по которой двигался газомокошилник

$$l_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$$

Аналогично с меньшей:

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 = \frac{2\pi}{3}$$

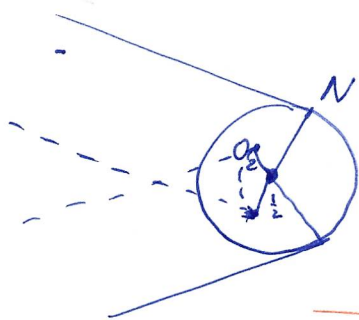


Длина дорожки трава прямых участков не изменится, а кривых изменится:

$$l_2' = \frac{2}{4} \cdot l_2$$

$$l_1' = \frac{2,5}{4} \cdot l_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{16\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

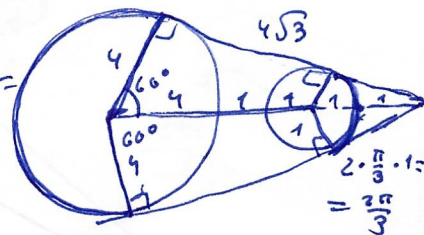
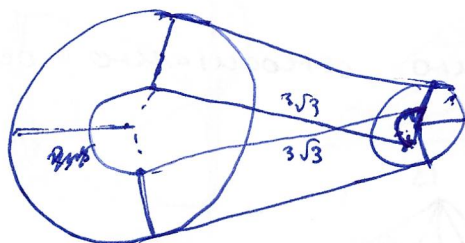
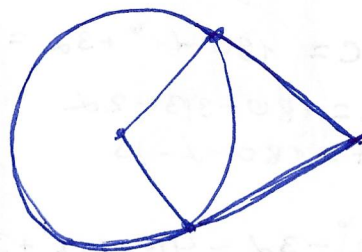
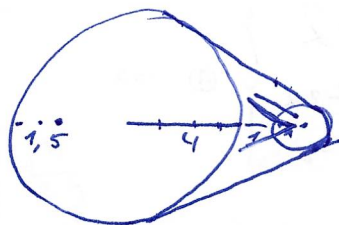
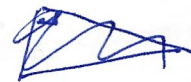
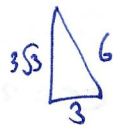
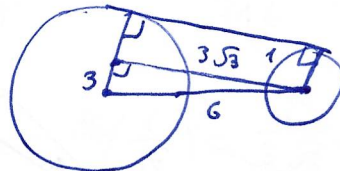
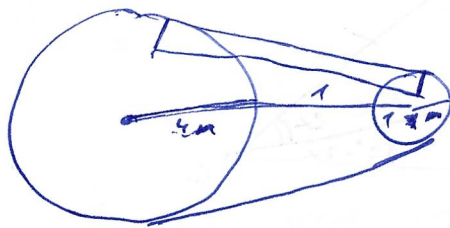
Рассмотрим, что происходит на малой окружности:



Пока газомокошилник движется по окружности трава образует часть окружности радиусом $\frac{1}{2} \Rightarrow l_2' = \frac{1}{2} \cdot l_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

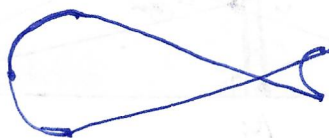
$$\Rightarrow \text{Ответ: } 6\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3}$$

Чертежник



$$2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$$

$$2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 1 = \frac{4\pi}{3}$$



$$\frac{x}{x+6} = \frac{1}{4}$$

$$x+6=4x$$

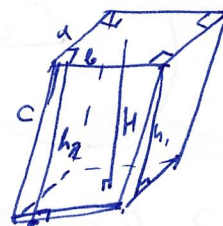
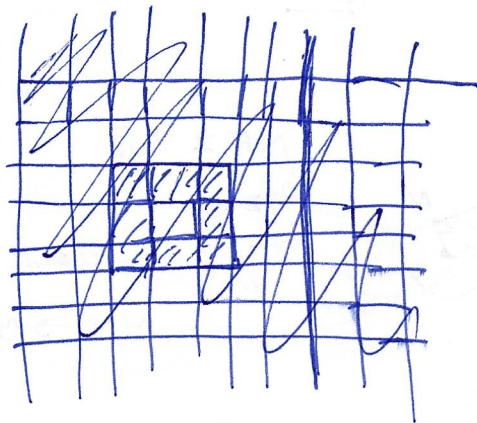
$$6=3x$$

$$x=2$$

$$2 \cdot 3\sqrt{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{16\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} =$$

$$= 6\sqrt{3} + \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3}$$

Черновик



~~a ≠ 1~~ $a \neq 1$

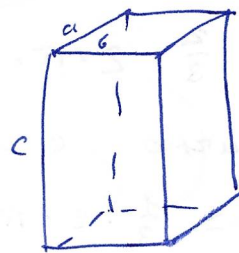
~~$2ab + bh_1 + ah_2$~~

≠

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$2ab + bh_2 + ah_1 + abH + a + b + c = 2026$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0 \\ \log_2 a > 0 \Rightarrow a > 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \leq 0 \\ \log_2 a < 0 \Rightarrow a < 1 \end{array} \right.$$



$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026$$

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 2026$$

$$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$$

$$a^{2x} + 2a^2 \geq 3a^{x+1}$$

~~$abc = 2026$~~

~~$\frac{a^{2x-1} + 2a}{3} \geq a^x$~~

a

~~$\log_2 a$~~

~~$2a^2 \geq 3a^x (a^x - 3a)$~~

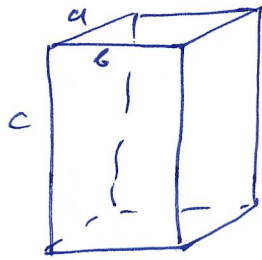
$$2a^2 \geq a^x (3a - a^x)$$

$abc = 2026$

$$\log_2 \frac{a^{2x-1} + 2a}{3}$$

Числовик

1



$$ab + 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c = 2026$$

$$abc = 2026 - \underbrace{2a(b+2) - 2b(c+2) - 2c(a+2)}_{\text{min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \approx 2a(b+2) + 2b(c+2) + 2c(a+2) = \text{max}$$

~~$$ab + 2a + bc + 2b + ca + 2c = \text{max}$$~~

~~$$abc + 2a(b+1) + 2b(c+1) + 2c(a+1) + 2a + 2b + 2c = 2026$$~~

~~$$abc + 2a(b+2)$$~~

