0 674198 210000

67-41-98-21
(129.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Мякиннова Ивана Валерьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Время выхода: 13:52 – 13:56

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

100 (сто)

67-41-98-21 (129.8)

Чистовик

Задача 1.

$\sqrt{6(1-ctg^2 x)} = 4\cos x$

$\begin{cases} 1-ctg^2 x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-ctg\, x)(1+ctg\, x) \geq 0 \\ x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k], k \in Z \\ x \neq \pi n, n \in Z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ctg\, x \in [-1; 1] \\ x \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k) \cup (2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k] \end{cases}$

$6(1-ctg^2 x) = 16\cos^2 x$

$6\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x$

$6\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 16\cos^2 x$

$6(\sin^2 x - \cos^2 x) = 16\cos^2 x \cdot \sin^2 x$

$6((1-\cos^2 x) - \cos^2 x) = 16\cos^2 x(1-\cos^2 x)$

$6(1-2\cos^2 x) = 16\cos^2 x - 16\cos^4 x$

$t = \cos^2 x$

$6(1-2t) = 16t - 16t^2$

$6 - 12t - 16t + 16t^2 = 0$

$16t^2 - 28t + 6 = 0$

$8t^2-14t+3=0$

Чистовик

$D=196-96=10^2$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{24}{16}>1 \text{ (значит не подходит } \cos^2 x \in [-1;1]) \\ t=\frac{4}{16}=\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\cos^2 x=\frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=-\frac{1}{2} \text{ (не подходит по ОДЗ)} \end{array}\right.$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Задача 2.

Обозначим трехзначное число через n, а сумму его чисел через s

По условию $\frac{n}{s} \Rightarrow n=9ks$ – k натур. число

$n \equiv s \pmod{9} \Rightarrow n=9ks \Rightarrow n\equiv 0 \pmod{9}$

$s\equiv 0 \pmod{9}$

Для трёхзначного числа s может быть 0 до 27 $\Rightarrow s\in\{9;18;27\}$

Чистовик

1) $S=9$

$n = 9k \cdot 9 = 81k$.

Трёхзначные кратные 81:

$\{162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972\}$

Из них сумму цифр девять имеют:

$\{162, 243, 324, 405, 810\}$

2) $S=18$

$n = 9k \cdot 18 = 162k$

$\{162, 324, 486, 648, 810, 972\}$

Из них подходят $\{486, 648, 972\}$

3) $S=27$

$n = 9k \cdot 27 = 243k$

$\{243, 486, 729, 972\}$ => подходящих нет

Все подходящие числа $\{162, 243, \underline{324}, 405, \underline{486}, 648, \underline{810}, 972\}$

$\Sigma = 324 + 486 + 810 = 1620$

Ответ: 1620.

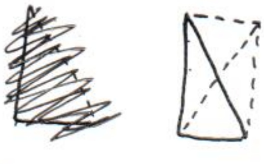
$\boxed{\text{Чистовик}}$

Задача 3.

Каждый из катетов $\parallel$ одной из координат осей $\Rightarrow$ каждый треугольник ~~парал~~ $\parallel$ одной из коорд. плоскостей (Oxy, Oyz, Oxz)

Пусть треугольник $\parallel (Oxy)$ без огранич. общности.

Т.к. параллельно Oxy, то относительно z нам неважно как расположена $\Rightarrow$ z может быть любой $\Rightarrow$ предположим $z=0$.

Отразим каждый прямоуг. треугольник относительно середины гипотенузы. Получим треугольник по симметрии $\longrightarrow$ 

Тогда ~~составим~~ сопоставим каждому прямоуг. тр-ку такой прямоугольник соответственно. Получается, что каждому прямоугольнику сопоставлены 4 треугольника. Координаты по модулю ≤ 3, т.е. от -3 до 3 $\Rightarrow$ всего их $3\cdot 2+1=7$.

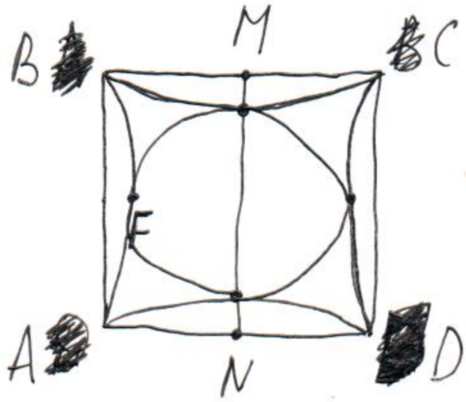
Тогда всего прямоугольников $\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}\sum_{k=i+1}^{7}\sum_{m=j+1}^{7}\cdot$

$$\cdot\left(T_3^2+1\right)\cdot\cancel{4}\,T_3^2\cdot 7=\left(\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}(7-i)(7-j)\right)\cdot 4\cdot 3\cdot 7=$$

$$=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 7=37044.$$

Ответ: 37044

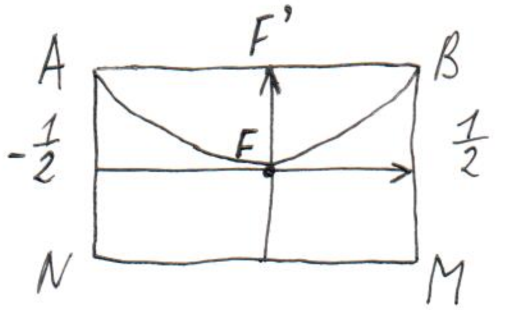
Задача 5. Чистовик



1) Рассмотрим кв-т $ABCD$. Он квадр., т.к. $AB=BC=CD=AD=1$

2) Проведем MN — середина кв-та. Найдем расстояние от F до MN:

$AF' = F'B = \frac{1}{2}$



AFB — парабола $\Rightarrow y_a = y_b = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot c = \frac{c}{4}$

Тогда $\rho(F, MN) = AN - FF' = \frac{1}{2} - \frac{c}{4} = \frac{2-c}{4}$

Ответ: $\frac{2-c}{4}$.

Задача 7.

Нарисуем параболу. Графически заметим, что прямоугольники есть только между параболами $\frac{3x^2}{4}+c$ — $\frac{3x^2}{4}+c+1$ с вершинами

$(0;c)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; c+\frac{1}{2}\right)$, $(0;c+1)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; c+\frac{1}{2}\right)$

диагонали параллельны осям и перпендикулярны $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Либо между параболами

Чистовик

$\frac{3x^2}{4}+c_1$, $\frac{3x^2}{4}+c_1+1$, $-\frac{3x^2}{4}+c_2$, $-\frac{3x}{4}+c_2+1$,

$c_2>c_1+1$

Точка пересечения первой и третьей:

$$\frac{3x^2}{4}+c_1=-\frac{3x^2}{4}+c_2$$

$$\frac{3x^2}{2}=c_2-c_1$$

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot(c_2-c_1)}$$

$$y=\frac{c_2+c_1}{2}$$

Легко заметить, что диагонали снова перпендикулярны $\Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}(c_2-c_1+1)}-\right.$

$\left.-\sqrt{\frac{2}{3}(c_2-c_1-1)}\right)$

$$C:=c_2-c_1-1$$

$$C\geq 1$$

$$\left(\sqrt{C+2}-\sqrt{C}\right)'=\frac{1}{\sqrt{C+2}}-\frac{1}{\sqrt{C}}<0\Rightarrow$$ максимум

при $C=1\Rightarrow \max.F=\max\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\vee\frac{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}$$

Чистовик

$2\sqrt{2} \vee \sqrt{6}-\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} \vee \sqrt{6}$

$3>\sqrt{3} \Rightarrow \max F=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Задача 4.

$k\in\{11,13,17\}$

Каждая $\sin(k\pi x)$ имеет k пересечений границами полоски $y=\pm 1 \Rightarrow (k+2)$ области.

Каждая следующая добавляет $k+1$

Итого $R=(11+2)+(13+1)+(17+1)+A=45+A$

A — внутр. ~~[illegible]~~ области

Уравнение $\sin(a\pi x)=\sin(b\pi x)$ на $(0,1)$ имеет $a-1$ реш. при $a>b$.

Тогда $A_{ab}=(a-1)-2a_k$, где a_k — число точек касания на границе.

Проверим совпадение max и min:

$x=\frac{1+km}{2k}$ и $x=\frac{3+km}{2k}$

~~Проверим~~ ~~Проверим~~ Проверим ~~[illegible]~~ все k и получим:

$\sin(13x\pi)$ и $\sin(17x\pi)$ в точке $x=\frac{1}{2}$

$A_{13,k}=13-1-2=10$

Чистовик

$A_{17,k} = 17-1-2\cdot 0 = 16$

$A_{13,17} = 17-1-2\cdot 0 = 16$

$A = 10+16+16 = 42$

$R = 45+42 = 87$

Ответ: 87 ~~штук~~

Черновик

$$\begin{cases} 6(1-ctg^2x)=16\cos^2 x \\ 1-ctg^2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-6ctg^2x=16\cos^2 x \\ ctg^2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-6\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=16\cos^2 x \ (1) \\ ctg^2x \leq 1 \ (2) \end{cases}$$

(1): $\cdot$ $6-\frac{6}{\sin^2 x}=16$

ОДЗ-? {..

$\cancel{\frac{6}{\sin^2 x}=-10}$

$1=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$6\left(\frac{\sin^2-\cos^2}{\sin^2}\right)=16\cos^2$

$\cancel{-10\sin^2 x=6}$

$\cancel{\sin^2 x=-\frac{6}{10}=-0,6}$

~~нет реш~~