0 191613 280009

19-16-13-28
(124.22)

+1 лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6 (11 класс)

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов» ~~по «Математике»~~
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Никитина Егора Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

 75 (семьдесят пять)

19-16-13-2.8 (124.22)

Чистовик

Ахмедова / Ограничения: $\sin x \neq 0$

N1

$$\sqrt{6(1-\operatorname{ctg}^2 x)} = 4\cos x$$

$$\begin{cases} 6-6\operatorname{ctg}^2 x = 16\cos^2 x & (1) \\ 4\cos x \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Решу (1):

$$6-6\operatorname{ctg}^2 x = 16\cos^2 x$$

$$6-6\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x$$

$$6-6\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 16\cos^2 x$$

$t = \cos^2 x$

$$6-6\frac{t}{1-t} = 16t$$

$$\frac{6(1-t)-6t}{1-t} - 16t = 0$$

$$\frac{6-12t}{1-t} - \frac{16t(1-t)}{1-t} = 0$$

$$\frac{6-12t-16t+16t^2}{1-t} = 0$$

$$\frac{6-28t+16t^2}{1-t} = 0$$

$$\frac{(t-\frac{3}{2})(t-\frac{1}{4})}{t-1} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{3}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Чистовик

Тогда с учётом (2):

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\cos x = \sqrt{\frac{3}{2}} \to$ т.к. $\cos x \in [-1;1]$, это равенство не имеет решений

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

N2

Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n.

Если $\frac{n}{S(n)} \vdots 9$, то $n \vdots 9$, тогда из свойств делимости на 9, $S(n) \vdots 9$ ~~тогда~~.

~~целых~~ Пусть $\frac{n}{S(n)} = x$, тогда

$n = S(n) \cdot x$, где $S(n) \vdots 9$, $x \vdots 9$

Т.е. $\forall n \in A$ ~~тогда~~ $n \vdots 81$ (9^2).

~~Для трехзначных чисел, если $n \neq 999$, то~~

~~$0 \le S(n) < 27$~~ (если $n = 999$, то $n \not\vdots 81$, т.е. $n \notin A$)

~~Т.е. для всех трёхзначных чисел из A $S(n) \not\vdots 27$~~

~~Значит $\exists\, t \in \mathbb{N}$: t - трёхзначное, и $t \vdots 81$, и $\frac{t}{S(n)} \in \mathbb{N}$:~~

Рассмотрю все трёхзначные числа, что $\vdots 81$!

(81·1=81 - двузначное)

$81 \cdot 2 = 162 \qquad S(162) = 9$

$81 \cdot 3 = 243 \qquad S(243) = 9$

$81 \cdot 4 = 324 \qquad S(324) = 9$

$81 \cdot 5 = 405 \qquad S(405) = 9$

$81 \cdot 6 = 486 \qquad S(486) = 18$

$81 \cdot 7 = 567 \qquad S(567) = 18$

$81 \cdot 8 = 648 \qquad S(648) = 18$

$81 \cdot 9 = 729 \qquad S(729) = 18$

19-16-13-28 (12422)

Чистовик

$81 \cdot 10 = 810$ $\quad S(810)=9$

$81 \cdot 11 = 891$ $\quad S(891)=18$

$81 \cdot 12 = 972$ $\quad S(972)=18$

($81 \cdot 13$ – трёхзначна)

~~Посмотрю на все $\vdots 81$~~

Если $t \vdots 81$, t – трёхзначное, то $S(n) < 27$ ($999 \not\vdots 81$)

Т.е. $S(n) \not\vdots 27$.

Тогда, если $t \vdots S(n)$, то $\frac{t}{S(n)} \vdots 9$ (т.к. $t \vdots 81$ (3^4), а $S(n) \not\vdots 27$ (3^3))

Иначе говоря, если $t \vdots 81$, t – трёхзначное и $t \vdots (S(n))$, то

$t \in A$

Посмотрю, какие из перечисленных выше чисел делятся на свою сумму цифр:

$162 \vdots 9$ и $S(162)=9 \Rightarrow 162 \in A$

$243 \vdots 9$, $S(243)=9 \Rightarrow 243 \in A$

324 аналогично $\in A$

405 аналогично $\in A$

$486 \vdots 2$, $486 \vdots 9$, $S(486)=18$, $18 = 9 \cdot 2 \Rightarrow 486 \in A$

$567 \not\vdots 2$, $S(567)=18$, $18 \vdots 2 \Rightarrow 567 \notin A$ ($567 \not\vdots S(567)$)

$648 \vdots 18$, $S(648)=18 \Rightarrow 648 \in A$

$729 \not\vdots 2$, $S(729)=18$, $18 \vdots 2 \Rightarrow 729 \notin A$ ($567 \not\vdots S(567)$)

$\frac{810}{9} = 90 \Rightarrow 810 \in A$

$891 \not\vdots 2$, $S(891)=18$, $18 \vdots 2 \Rightarrow 891 \notin A$ ($891 \not\vdots S(891)$)

$972 \vdots 18$, $S(972)=18 \Rightarrow 872 \in A$

Чистовик

Итак, ~~вот все трёхз~~ я нашёл все трёхзначные числа $\in A$, вот они по ~~порядку~~ возрастанию:

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

Сумма 1-го, 6-го, последнего: $162 + 648 + 972 =$
$= 1782$

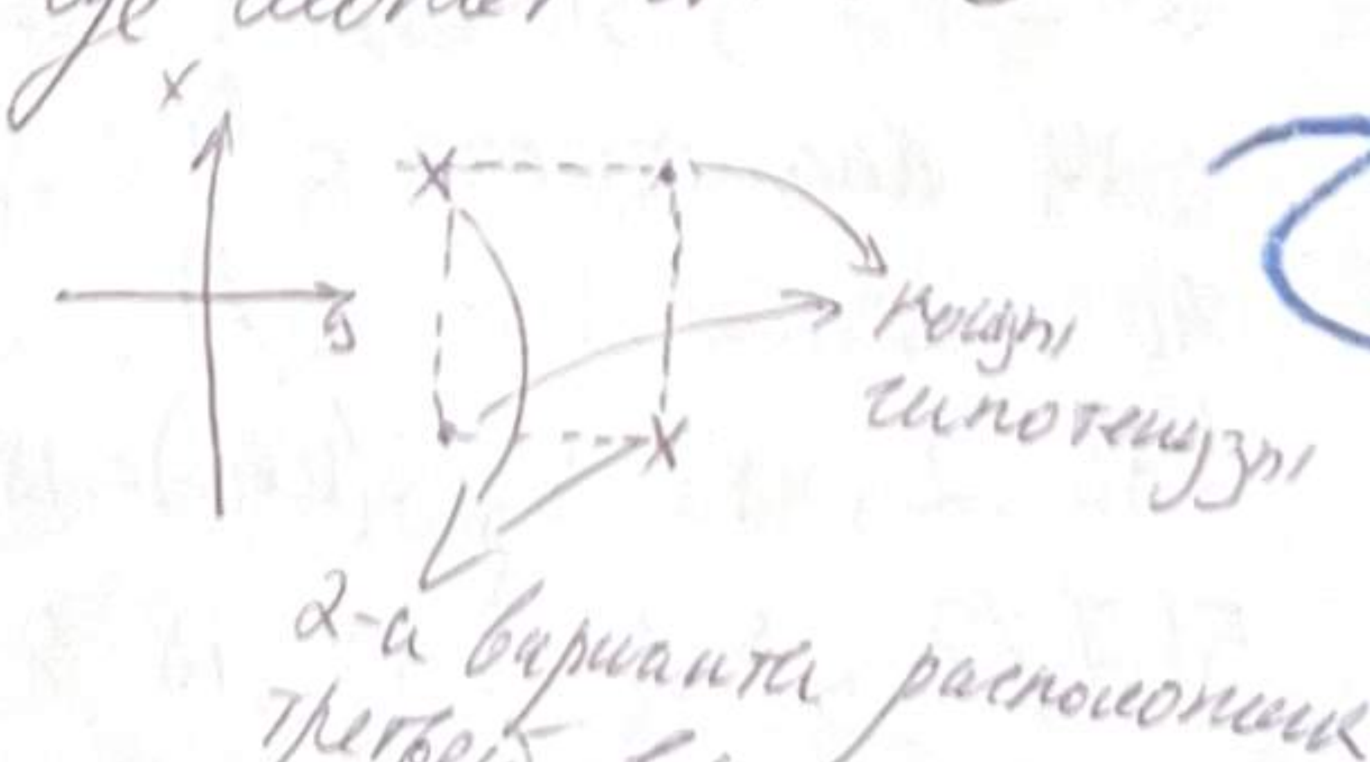
Ответ: 1782

№3

Точки из P представляют из себя клетчатый квадрат 7×7.

Если мы знаем координаты концов гипотенузы треугольника, то существует 2 ~~способа~~ варианта, где может быть 3-ая вершина,

т.к. она будет иметь x ~~и~~ и y координаты как у одного из концов (катеты параллельны осям)



У любого треугольника x- и y-координаты соответственно концов различны (иначе это отрезок), и, ~~наоборот~~ ~~зная~~ выбрав координаты концов отрезка так, что x- и y-координаты соответственно не равны, мы всегда можем построить 2-а треугольника с такой гипотенузой $\Rightarrow$ ~~рамо~~ размер множества концов отрезков из F равен удвоенному размеру множества прямоугольных треугольников.

Чистовик

~~Т.о.~~ Число способов выбрать такие вершины $\rightarrow \frac{7^2 \cdot 6^2}{2}$

Тогда количество треугольников $\rightarrow \frac{7^2 \cdot 6^2}{2} \cdot 2 =$
$= 7^2 \cdot 6^2 = 1764$

Ответ: 1764

N4 Найду пересечения графиков функций друг с другом и с границами полосы.

$\sin 11\pi x = -1$

$11\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t, \ t \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{1}{22} + \frac{4}{22}\pi t, \ t \in \mathbb{Z}$

Т.к. $0 \leq x \leq 1, \ x \in \{\frac{3}{22}; \frac{7}{22}; \frac{11}{22}; \frac{15}{22}; \frac{19}{22}\}$

$\sin 11\pi x = 1$

$11\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, \ t \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{22} + \frac{4}{22} t$

Т.к. $0 \leq x \leq 1, \ x \in \{\frac{1}{22}; \frac{5}{22}; \frac{9}{22}; \frac{13}{22}; \frac{17}{22}; \frac{21}{22}\}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

№5

В силу симметрии параболы относительно её оси, поворот параболы на 90° — то же, что её отражение относительно прямой $x=y$.

Т.е. ~~граф~~, если ~~графика~~ функция ~~графика~~ графика параболы ① → $y=cx^2+a$, $(a>0)$ (a → сдвиг параболы, примем, что центр координат в центре окружности, а оси параллельны сторонам квадрата)

То функция графика ② → $x=cy^2+a$

В силу симметрии ① и ② относительно $x=y$, и того, что ① и ② касаются, их производная в точке касания -1. (иначе угол будет не 0)

~~Т.е.~~ $f(x)=cx^2+a$

$f'(x)=2cx$ т.е. $2cx=1$

$x=\frac{1}{2c}$ → x координата точки касания

Т.е. сторона квадрата → $\frac{1}{2c}\cdot 2=\frac{1}{c}$

Т.к. сторона $=1$; $\frac{1}{c}=1$ [Чистовик]

$c=1$

Функция для графика 3 : $y=cx^2-a$

Окружность касается 1 и 3 в точках с абсциссой 0.

Т.е. ~~D~~, если r - радиус окружности, то расстояние между т. касания, ~~это~~ отрезок точек касания проходит ч/з $(0,0)$, т.е. центр окружности

$2r=2a$ $(a-(-a))$

$r=a$

$\Downarrow$

этот отрезок - диаметр.

~~Точка касания 1 и 2:~~ ~~$(\frac{1}{2}; \frac{1}{...})$~~

Т.к. 1 и 2 касаются при $x=\frac{1}{2}$ и $c=1$:

$$\begin{cases} y=\cancel{(\frac{1}{4})}\frac{1}{4}+a \\ \cancel{x}\ \frac{1}{2}=y^2+a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}+a \\ \frac{1}{2}-a=y^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}+a\right)^2=\frac{1}{2}-a$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a+a^2=\frac{1}{2}-a$$

$$\frac{1}{16}-\frac{8}{16}+\frac{3}{2}a+a^2=0$$

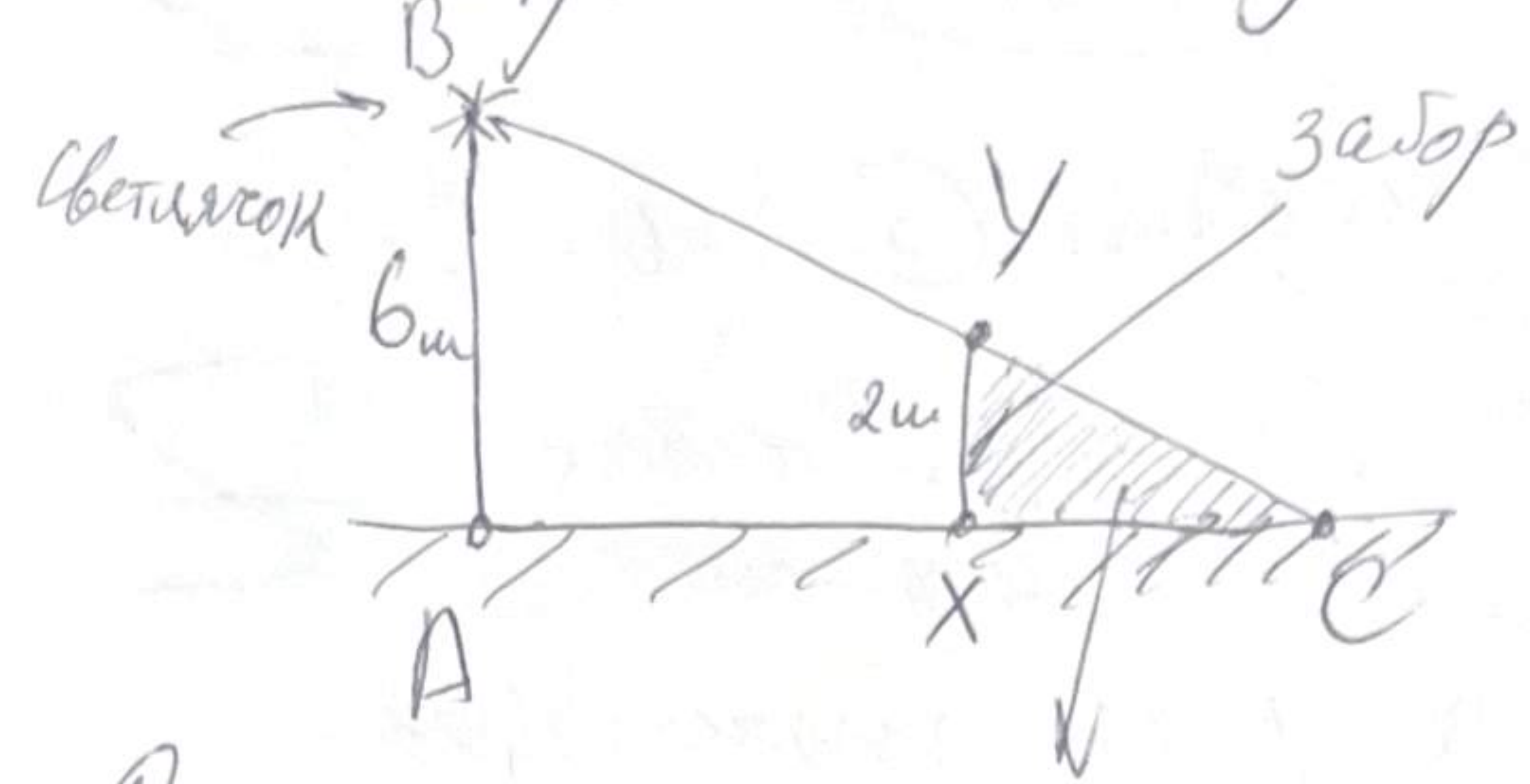
$$\frac{-7}{16}+\frac{3}{2}a+a^2=0$$

$$\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{7}{4}\right)=0$$

Т.к. $a>0$ $a=\frac{1}{4}$, т.е. $r=\frac{1}{4}$ Ответ: $\frac{1}{4}$

Чистовик

№6 Посмотрю на ситуацию сбоку



Обозначу точки, тень как на рисунке.

BA – перпендикуляр из B на землю.

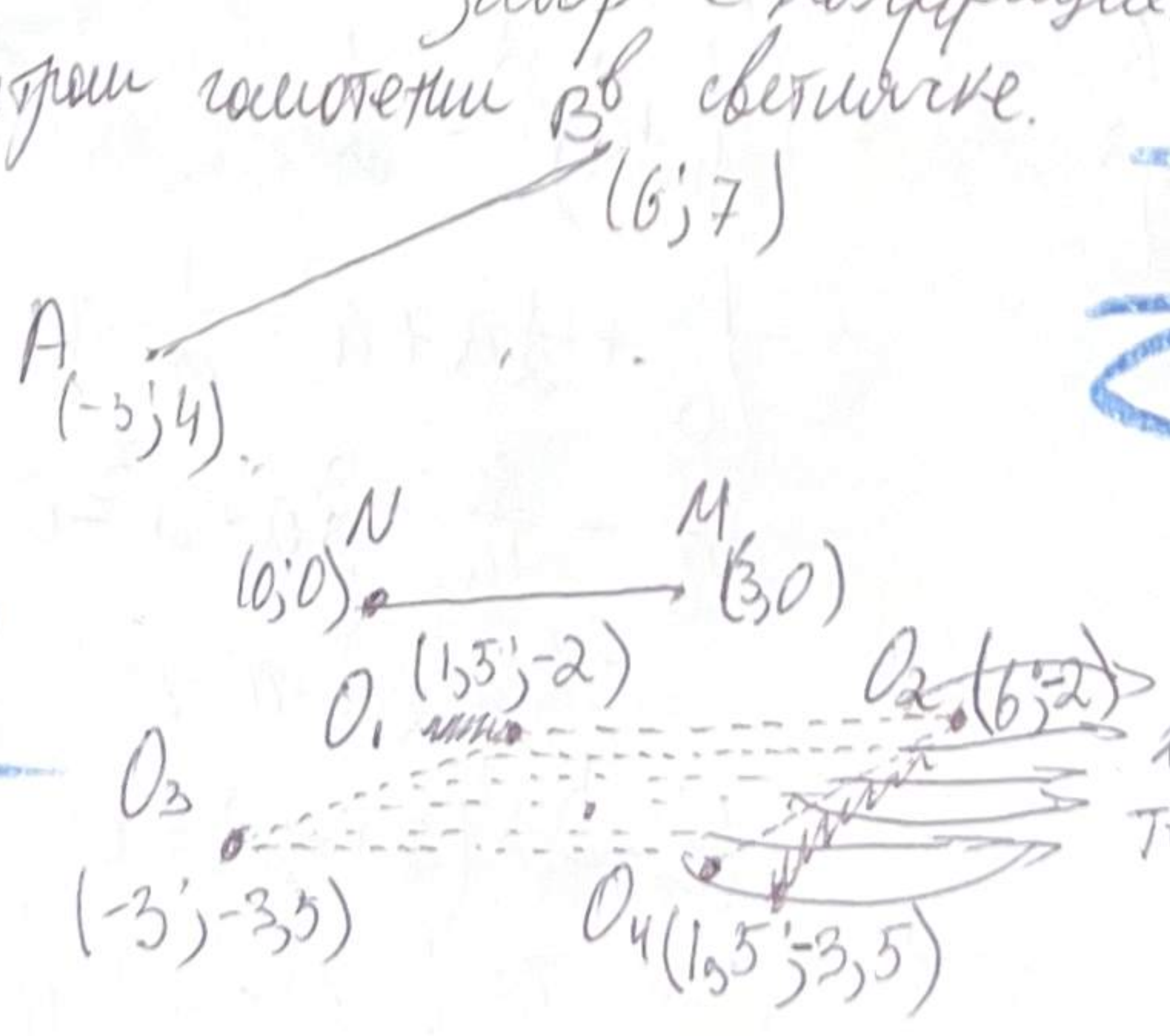
Т.к. $BA \perp AC \perp XY \Rightarrow BA \parallel XY$

как соответственные $\angle ABC = \angle XYC$, $\angle BAC = \angle YXC$ | по 2-м углам $\Rightarrow \triangle CYX \sim \triangle CBA$

$\frac{XC}{CA} = \frac{1}{3}$

$\frac{AX}{AC} = \frac{2}{3}$

Т.е. тень от забора — гомотетированный забор с коэффициентом $\frac{3}{2}$, с центром гомотетии в светлячке.



~~крайние~~ тень от верхушки забора (пунктирные прямые)

Черновик

$\frac{15\cdot 7}{8}$ $\quad 15 \times 7 = 105$ $\quad \frac{15}{7} - 6 = 2\frac{1}{7} - 6 = -\frac{1}{7} - 4 = -3\frac{6}{7}$

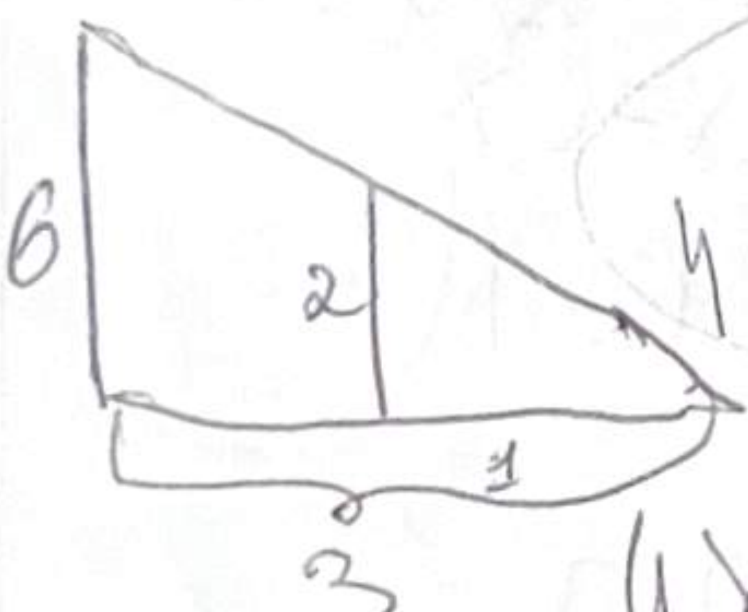
$y = x^2 + a$ $\quad \frac{9}{4} + 4 \cdot \frac{7}{16} = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$\log_a x = y$ $\quad y^2 + a = x$

$x = a^y$ $\quad y^2 = x - a$ $\quad \frac{-\frac{3}{2} \pm 2}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$

$\sqrt[a]{x} = y$

$(x^2 + a)^2 = x - a \to$ ед. р. $\quad -1{,}5 + 2$



$4x^3 + 4xa = 1$ $\quad \frac{-7}{16} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

$\frac{3}{8}$ $\frac{6}{16}+$

$4x(x^2 + a) = 1$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$

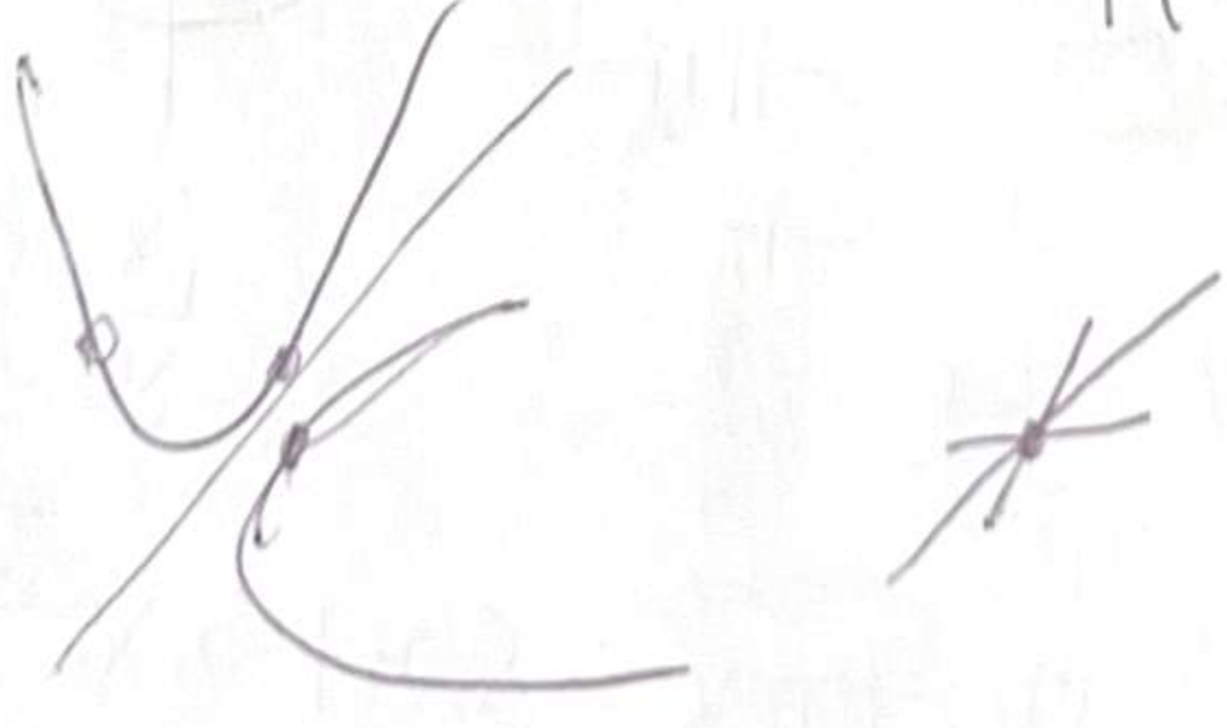
$21 + 6$

$\cancel{16x^2(x^2+a)^2 = 1}$ $\quad 4((x^2+a)^2 + a)(x^2+a) = 1$

$16x^2(x - a) = 1$

$\frac{27}{7} \cdot \frac{3}{4}$ $\quad 4(t^2 + a)t = 1$

$27 \times 3 = 81$



$y = x^2 + \frac{1}{4}$ $\quad y = \frac{1}{2}$

$27 \times 4 = 108$

$x = y^2 + \frac{1}{4}$

$\frac{191}{28}$ $\quad 121$ $\quad 2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}$

$\frac{1}{c} = 1$

$x = cx^2 + a$ $\quad c = 1$

$2cx = 1$

$x = \frac{1}{2c}$

Черновик

$\frac{2}{5}$

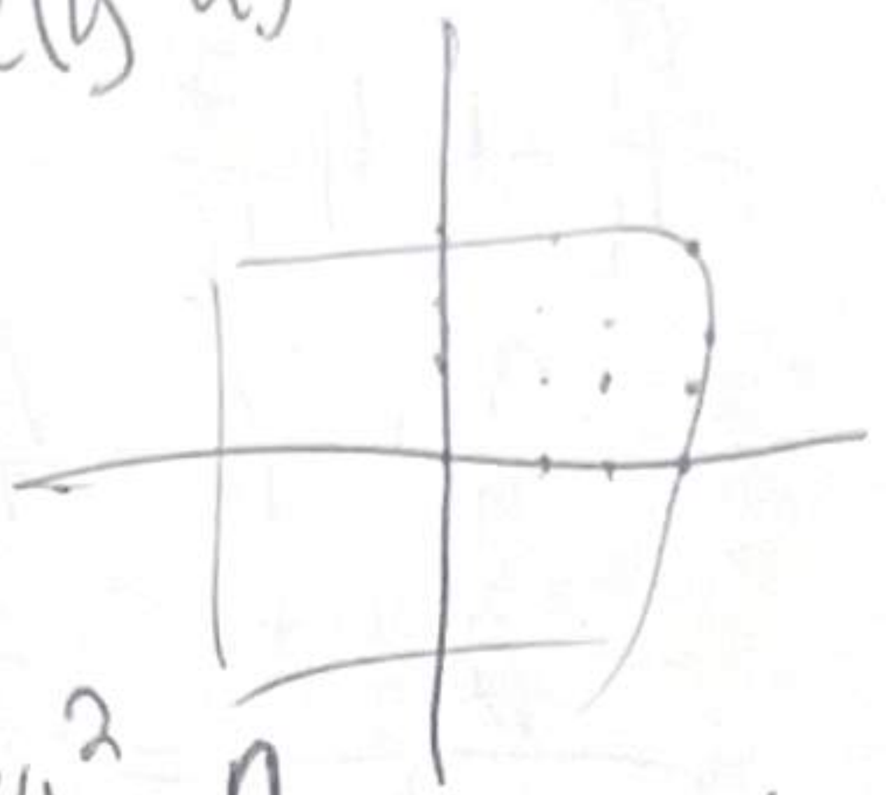
$y = c(x-a)^2$

$x = c(y-a)^2$

$x = c(c(x-a)^2 - a)^2$

$\frac{x}{c}$

$49 \times 36 = 294$
147
1764



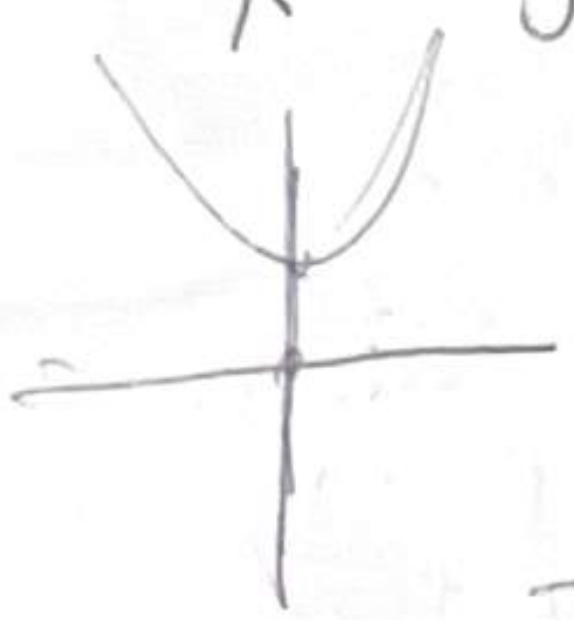
$x = cy^2 - a$

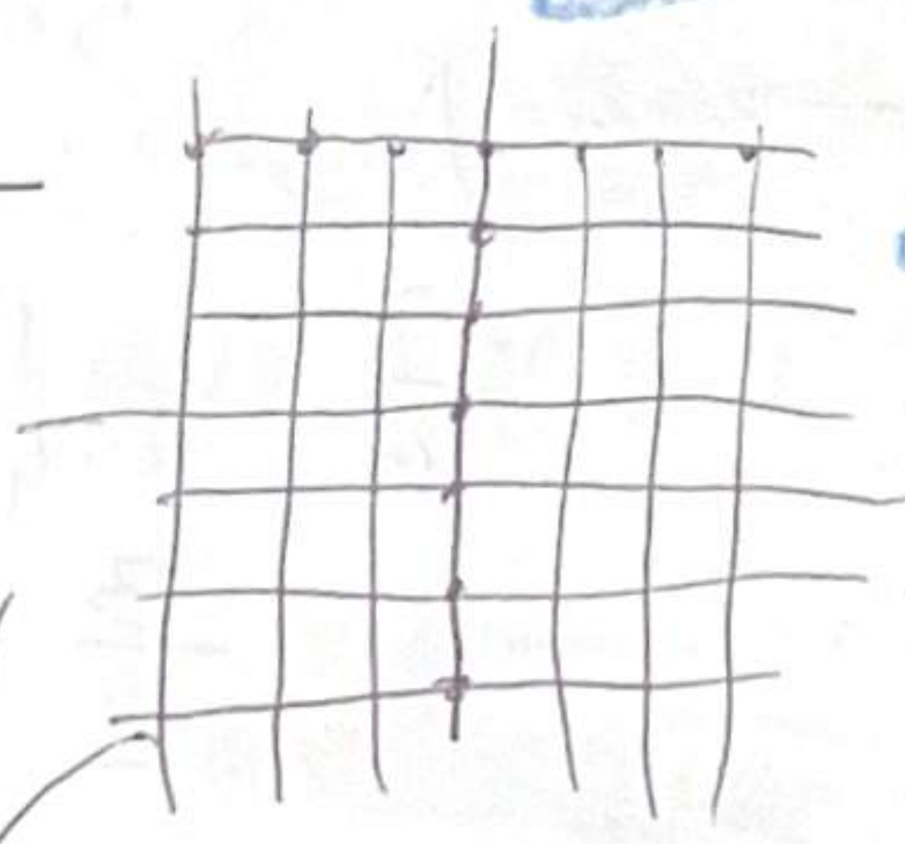
$x = cy^2$

$y = cx^2$

$y^2 = c^2x^4$

$\pm\sqrt{\frac{x}{c}} = c(x-a)^2 - a$





$49 - 7 - 6$

$42 - 6$

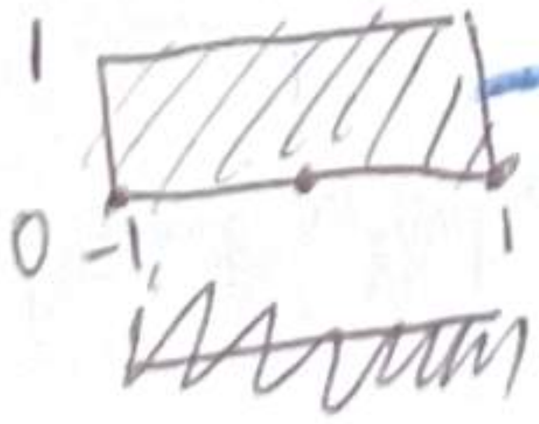
36

$x = c^3x^4$

$0 = x($

$49 \cdot 36$

$x = c|y$

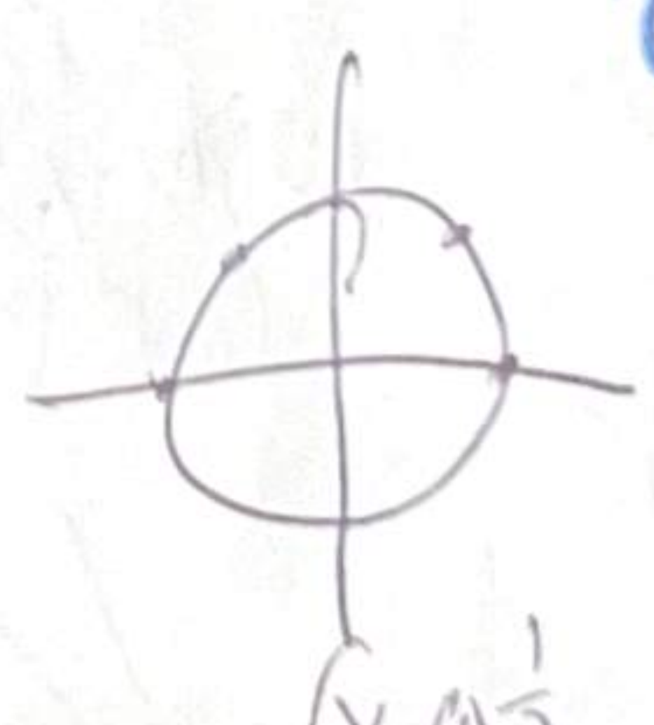


11π

-11π

-1π

$-\pi$



$\left(\frac{x-a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-a}{c}}}$

$\sin 11\pi x = \sin 13\pi x$

$11\pi x = 13\pi x + 2\pi k$

$2\pi x = 2\pi k$

$\pi - 11\pi x = 13\pi x + 2\pi k$

$x = k$

$24\pi x = \pi + 2\pi k$

$24x = 1 + 2k$

$x = \frac{1}{24} + \frac{1}{12}k$

$y - a = cx^2$

$y = cx^2 + a$

11

$x = cy^2 + a$

$\frac{2}{24}$

$\frac{x-a}{c} = y^2$

$\sqrt{\frac{x-a}{c}} = y$

$6 \cdot 4$

$3 \cdot 8$

$\frac{15}{7}$ $2\frac{1}{7}-6$ Черновик

$\frac{1}{7}-4$ $3\frac{6}{7}$

$\left(\frac{15}{7}; -2\right)$

$\frac{9}{3}$

$81 \times 2 = 162$ $81 \times 3 = 243$ $81 \times 4 = 324$

$2\frac{1}{7}$

$\left(\frac{6}{7}; 2\right)$

$\frac{3}{7}$ $1\left(\frac{15}{7}-\frac{3}{2}\right)$

$(4{,}5; 1{,}5)$

$\frac{30}{14}-\frac{21}{14}$ $81 \times 5 = 405$ $81 \times 6 = 486$ $\cancel{81 \times 7 = 567}$

$x^4+2ax^2+a^2$

$4x^3+4ax=1$

$\frac{x-a}{c}=y^2$ $\left(\frac{9}{14}; \frac{3}{2}\right)$

$y=cx^2+a$

$81 \times 8 = 648$ $\cancel{81 \times 9 = 729}$

$\frac{x-a}{c}=(cx^2+a)^2$

$\frac{3}{4}$ $\frac{27}{7}$

$\cancel{81 \times 11}$ 81 891

$81 \times 10 = 810$

$81 \times 12 = 162$ 81 972

$18 \times 7 = 126$ 7

12×6 318

$28 \times 4 = 112$

$\frac{x-a}{c}=c^2x^4+2acx^2+a^2$

$193 \mid 7$, 14, 53, 193, 28

$x-a=c^3x^4+2ac^2x^2+a^2c$

$\frac{28}{7}+\frac{81}{28}$

$162 \mid 9$, 9, 72, 18

$243 \mid 9$, 18, 63, 27

$324 \mid 9$, 27, 54, 36

$\frac{112}{28}$

$\frac{27}{7}+\frac{81}{28}$

$405 \mid 9$, 36, 45, 65

$486 \mid 18$, 36, 126, 27

$162 + 648 = 810$

$810 + 972 = 1782$

$567 \mid 18$, 54, 3

$28 \times 4 = 112$

$\frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-a}{c}}}=2cx$

$\frac{1}{2\sqrt{x-a}}=2x$ 193

$\sqrt{x-a}=x^2+a$

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-a}{c}}}=2c^2x$

$x-a=(x^2+a)^2$

$\frac{1}{4(x-a)}=4x^2$

$\frac{c}{4(x-a)}=4c^4x^2$

$\frac{1}{16x^2}=(x^2+a)^2$

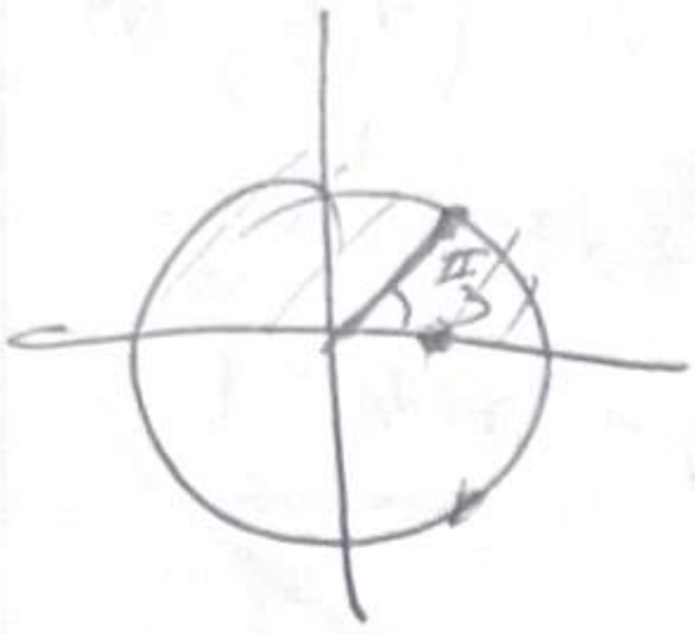
$\frac{1}{16t}=(t+a)^2$

$\frac{1}{t-a}=16x^2$

Черновик

$6(1-ctg^2x)$

$6\sqrt{1-ctg^2x}$



$\sqrt{16}\sqrt{1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}}=4\cos x$

$\cancel{\sin}\ \frac{1}{\sin^2x}(\sin^2x-\cos^2x)$

$6-6ctg^2x=16\cos^2x$

$\frac{6}{\cos^2x}=\frac{6}{\sin^2x}+16 \quad \cancel{\frac{\cos}{\sin}}$

$8x^2-14x+3$

$\frac{D}{4}=49-8\cdot3=$ 24

$=25=5^2$

$\frac{6}{\cos^2x}=\frac{6}{1-\cos^2x}+16$

25

$\cancel{25}$ $\frac{7\pm5}{\cancel{\ }}$

$\frac{7\pm5}{8}$

$\frac{6}{x}=\frac{6}{1-x}+16$

49-24

$\frac{1}{4}$ $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ $\cancel{6(1-x)}$ $\frac{6(1-x)-6x}{\cancel{x(1-x)}}-16=0$

$x-x^2$

49-3·8

$3-14\cdot\frac{3}{2}+8\cdot\frac{9}{4}$

$3-7\cdot3+18$

21

$\frac{6-6x-6x-16x+16x^2}{x-x^2}=0$

$3-14+8x^2$

$3-28+32$

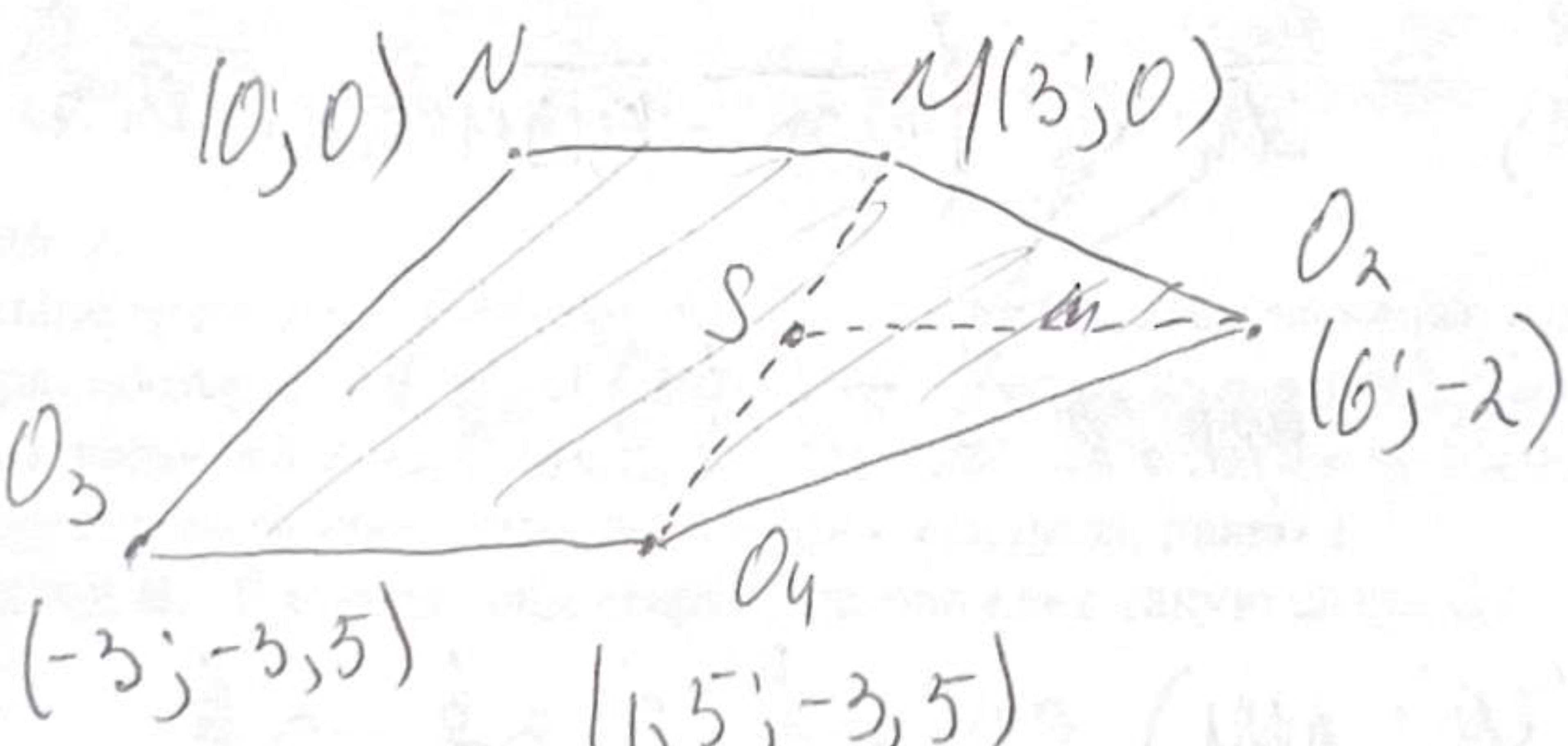
$\frac{6-12x-16x+16x^2}{x-x^2}\rightarrow\frac{6-28x+16x^2}{\cancel{x(x-1)}\ x(1-x)}=0$

№6 продолжение 1 Чистовик2

Итак, мы получили фигуру, что ($O_1O_2O_3O_4$) заметается ~~вер~~ тенью верхушки забора ~~$O_1O_2O_3O_4$~~ это параллелограмм, из св-в гомотетии.

И, т.к забор непрозрачен, ~~те~~ ~~наши~~ затенённые точки — те, что лежат на отрезках с одним концом в ~~A_1~~ на NM, а другим в $O_1O_2O_3O_4$.

Получим такую фигуру:



Проведу $l \parallel O_3O_4$ через O_2

$$l \cap NO_4 = \{S\}$$

разобью $NMO_2O_4O_3$ на O_3NMO_4 и MSO_2, SO_2O_4

~~S_{O_3}~~ O_3NMO_4 — трапеция

~~S_{O_3N}~~ $S_{O_3NMO_4} = \frac{NM+O_3O_4}{2}\cdot \rho(NM;O_3O_4) = \frac{3+4,5}{2}\cdot 3,5 = \frac{7,5}{2}\cdot 3,5 = \frac{105}{8}$

~~$S_{MSO_2} = \frac{1}{2}\rho(M;SO_2)$~~ Прямая SO_2 — ~~пар~~ 1

$\frac{4}{3} = \frac{\rho(SO_2;NM)}{\rho(SO_2;O_3O_4)} = \frac{MS}{SO_4}$ — из св-в трапеции

Черновик

$\frac{MS}{SO_4} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\overline{(0;0)S} = \overline{(0;0)M} \cdot \frac{3}{7} + \overline{(0;0)O_4} \cdot \frac{4}{7} =$

$= (3;0) \cdot \frac{3}{7} + (1,5;-3,5) \cdot \frac{4}{7} =$

$= \left(\frac{9}{7};0\right) + \left(\frac{6}{7};\frac{-14}{7}\right) =$

$= \left(\frac{15}{7};-2\right)$

$S_{\triangle MSO_2} = \frac{1}{2}\rho(SO_2;NM)$

$\frac{4}{3} = \frac{\rho(SO_2;NM)}{\rho(SO_2;O_3O_4)} = \frac{MS}{SO_4}$

$\left(\overline{(0;0)S} = \overline{(0;0)M} \cdot \frac{3}{4} + \overline{(0;0)O_4} \cdot \frac{4}{7}\right)$

координаты $S \Rightarrow \left(\frac{15}{7};-2\right)$

$S_{\triangle MSO_2} = \frac{1}{2}\rho(SO_2;NM) \cdot SO_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\frac{6}{7} = 3\frac{6}{7}$

$S_{\triangle SO_4O_2} = \frac{1}{2}\rho(SO_2;O_3O_4) \cdot SO_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3\frac{6}{7} = \frac{81}{28}$

Ответ: $3\frac{6}{7} + \frac{81}{28} + \frac{105}{8}$