0302182380001

30-21-82-38
(122.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Новиковой Софии Павловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

вышла в 12:58
вернулась в 13:02

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

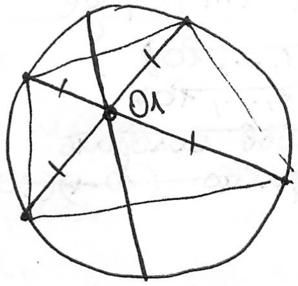
30-21-82-38 (122.5)

100 (Gro

Черновик

R=5

①



ans = 10.

② $n = \overline{abcd} = (d + 10c + 100b + 1000a)$

~~$n^2 = (1000a + 100b + 10c + d)(1000a...$~~

100000000

n^2 — не более 8 цифр

$n^2 = \overline{abcd}\cdot\overline{xyzk}$

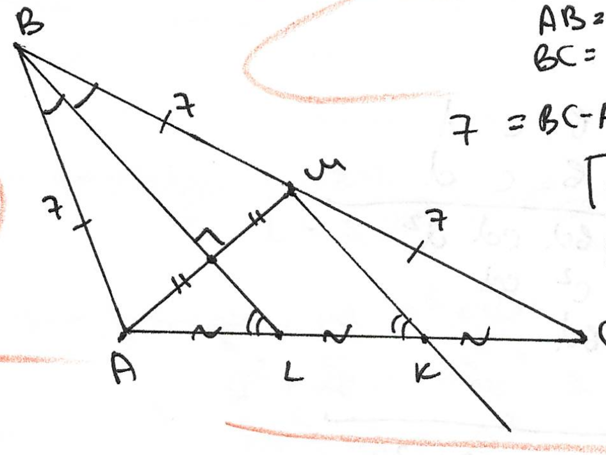
1) в n^2 7 цифр:

$n^2 = \overline{abcd\,xyz}$

$n^2 = 1000n + k$ ← трехзначное

$n^2 - 1000n - k = 0$

④



AB = 7

BC = 14

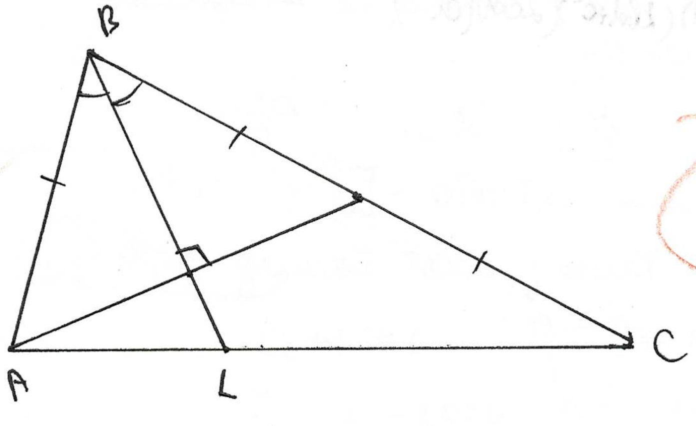
$7 = BC - AB < AC < 14 + 7 = 21$

$\boxed{8 \le AC \le 20}$

Все от $21+8 = 29$

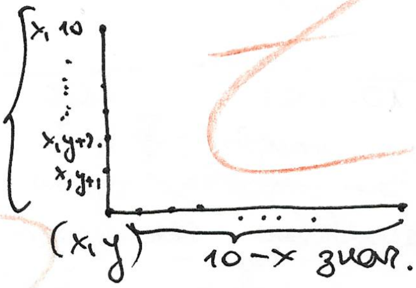
до $21+20 = 41$.

кроме AC = 14!!!

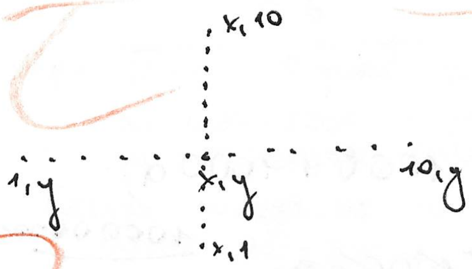


Черновик

(3)



~~Значит, для (x, y), где~~
~~$x \in \{1, \dots, 10\}$~~ ;
~~$y \in \{1, \dots, 10\}$~~ ;
~~# способов выбрать треуг. равно (10−x)(10−y)~~
а нет



=> для каждой возм. точки: $(10-1)\cdot(10-1) = 81$ вариант. =>

всего точек: $10 \cdot 10 = 100$

=> 8100 вар.

(2) $1000 \rightarrow \overbrace{\underbrace{1000}_{n}.000}^{n^2}$

$$n = 1000a + 100b + 10c + d$$

$$n^2 = (10^3a + 10^2b + 10c + d)(10^3a + 10^2b + 10^1 \cdot c + d)$$

$$= 10^6 a + 2\cdot 10^5 ab + 2\cdot 10^4 ac + 2\cdot 10^3 ad +$$

$$+ 10^4$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & a & b & c & d \\
 & & \times & a & b & c & d \\
\hline
 & & & ad & bd & cd & d^2 \\
 & & ac & bc & c^2 & cd & \\
 & ab & b^2 & bc & bd & & \\
a^2 & ab & ac & ad & & & \\
\hline
a^2 & (2ab) & (2ac+b^2) & 2(bc+ad) & (2bd+c^2) & (2cd) & (d^2)
\end{array}
$$

30-21-82-38
(122.5)

Черновик

(5)

шаш. ↓ пеш. ↙

+0 сек: 30/50

+10 сек: 50/50

$[0;10]$ - зел.
$[60;110]$ - зел.
$[170;220]$ - зел.

$v = 1$ м/с: за 50 сек проедет до светофора
останется еще 30 сек переехать: успеет.

прошло 80 сек. за 200 сек (суммарно) доедет до 2ого светофора.

там: $\frac{10}{3} + \frac{50}{k} + \frac{50}{3} + \frac{50}{k} \Rightarrow$ еще 10 сек

горит зеленый. Значит, А. успевает.

если $1 < v \le \frac{5}{3}$: первый светофор проезжает норм,

через $\frac{200}{v}$ сек должен гореть зеленый.

$200 \text{ сек} > \frac{200}{v} > \frac{3}{5} \cdot 200 = 120 \text{ сек} \Rightarrow \frac{200}{v} = 170$

$\boxed{v = \frac{20}{17}}$

(6) $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} \cancel{+} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0$;

1) $\boxed{a > 0}$: умнож. на $a^3 > 0$:

$$a^2 + 2a \cdot x - 3x^2 \le 0$$

$$3x^2 - 2a \cdot x - a^2 \ge 0$$

$\frac{D}{4} = a^2 + 3a^2 = 4a^2 > 0$

$x_{12} = \frac{a \pm 2a}{3}$

$x_1 = a$

$x_2 = -\frac{a}{3}$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -\frac{a}{3} \end{array}\right.$: ответ не может явл. отрезком; $a > 0$.

2) $a < 0$: умнож. на $a^3 < 0$:

$$a^2 + 2a \cdot x - 3x^2 \ge 0$$

$$3x^2 - 2a \cdot x - a^2 \le 0$$

Аналогично 1), корни: $a < 0$
$-\frac{a}{3} > 0$

Тогда $a \le x \le -\frac{a}{3}$;

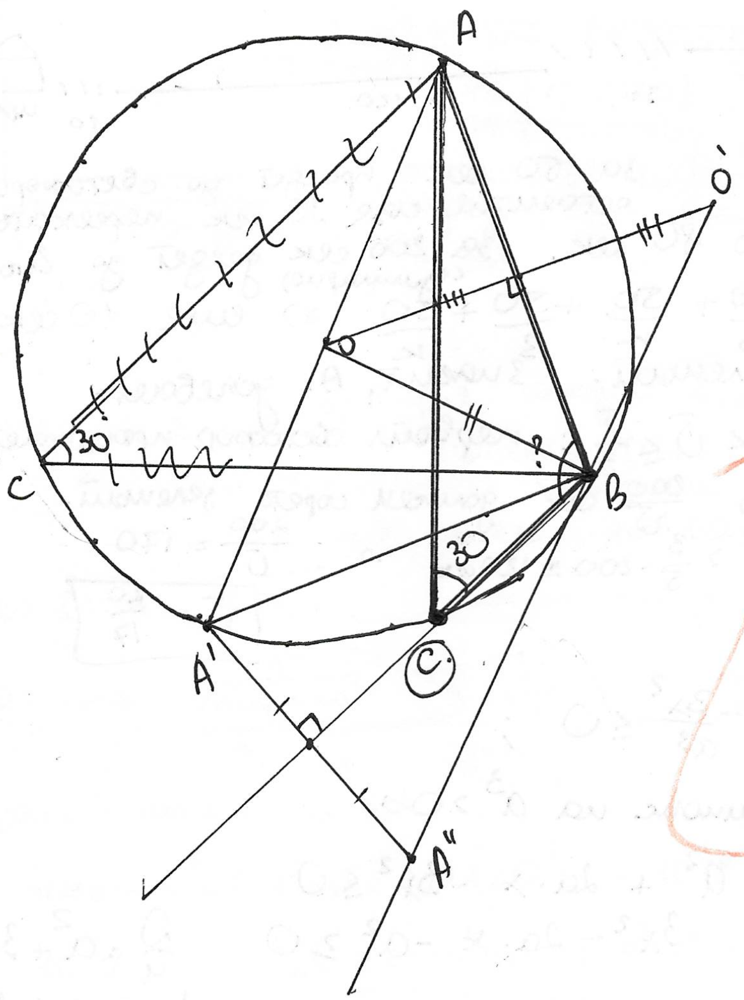
$[a; -\frac{a}{3}]$ - ответ;

отрез. длиной 2026, значит

$a + 2026 = -\frac{a}{3}$ $(a < 0)$

$\frac{4}{3}a = -2026$ $a = -\frac{2026 \cdot 3}{4}$ (потом посчитать!)

7 Черновик



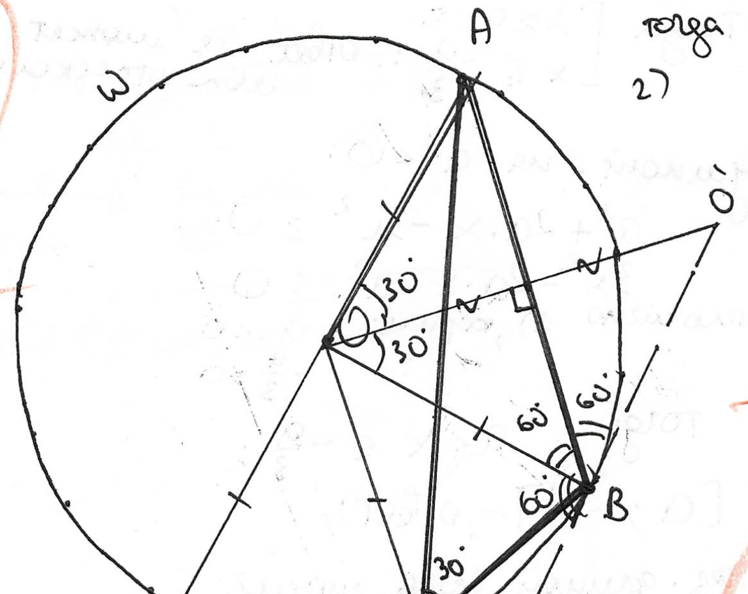
1) $\angle AOB = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$

$\angle AOO' = \angle O'OB = 30^\circ$

$\angle OBO' = (90-30)\cdot 2 = 120^\circ$

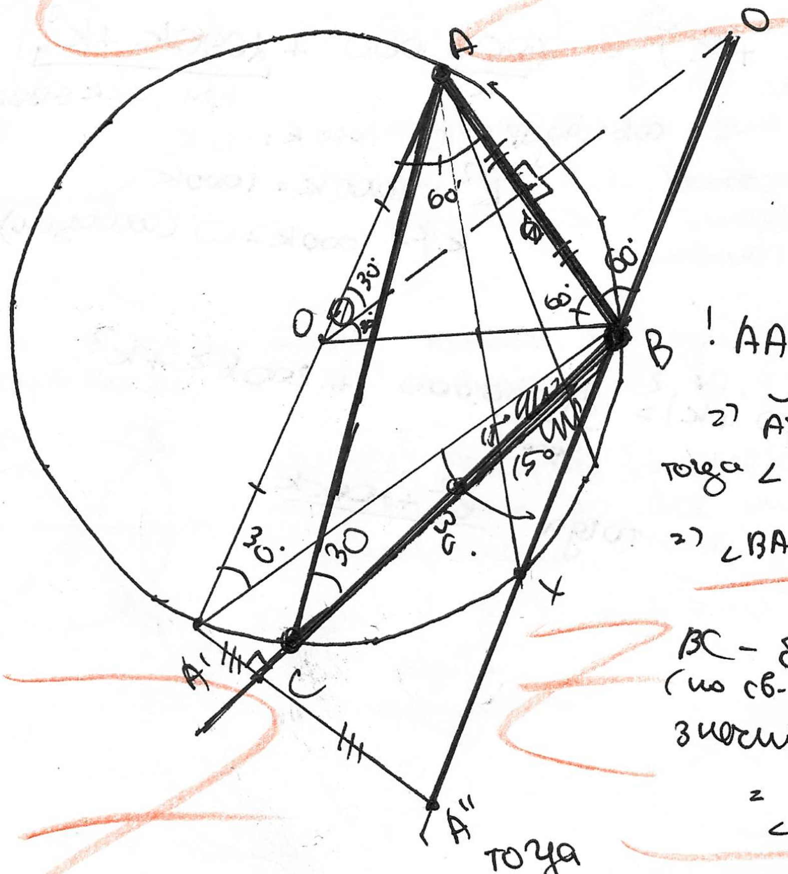
тогда $\angle OBA'' = 60^\circ$

2)



Черновик

(7)



$\angle OBX = 60^\circ$

! $AA' \parallel O'B \Rightarrow$

$\Rightarrow \breve{AX} = \breve{AB} = 60^\circ$

тогда $\angle A'AX = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAX = \angle XAA' =$

BC – бисс. $\angle A'BA''$ (по св-ву симм.)

значит $\angle A''BC = 15^\circ =$

$= \angle A'BC$

тогда

Тогда $\angle B = \angle ABX - 15^\circ = 150^\circ - 15^\circ = 135^\circ$.

(2)

$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\ 1100 \\ \hline \underbrace{121}\,0000 \end{array}$$

начинается на 1.

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & a & b & c \\ \times & 1 & a & b & c \\ \hline & c & ac & bc & c^2 \\ b & ab & b^2 & bc & \\ a & a^2 & ab & ac & \\ + \ 1 & a & b & c & \\ \hline 1 & a^2 & a^2+b & 2(ab+c) & \end{array}$$

Черновик

(2) ответ: 1000 (огеб работает)
если на втором месте какая-то цифра, то вторая цифра кв. не сов.

$$(1000+k)^2 = 1\underbrace{000}_{k}.000 + \underbrace{2000k+k^2}_{\text{при } 0<k\leq 999}$$

совпадает с $1000k$:

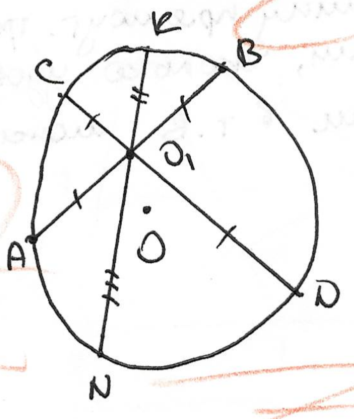
$$k^2+2000k = 1000k$$

$$k^2+1000k = 0 \text{ (невозм.)}$$

$$(9000+k)^2 = \underbrace{81.000}_{9000+k}.000 + 2000k+k^2$$

тогда $\underline{k^2+2000k}$

Чистовик.

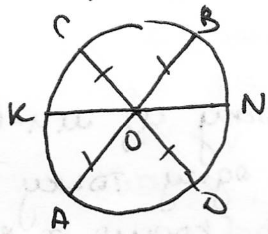
① 

1) Пусть пересекаются хорды AB, CD, KN в точке O_1. Пусть $AO_1 = O_1B$ и $CO_1 = O_1D$.

2) A, B, C, D равноудалены от т. O_1 => A, B, C, D лежат на окружности с центром в т. O_1

3) но A, B, C, D лежат на окружности с центром в т. O (по условию)

=> Т.к. и точки могут лежать на единственной окружности, то O_1 совпадает с O.

4) 

Значит, все хорды пересек. в центре окружности => все они являются диаметрами. Значит,

$KN = 2 \cdot R = 2 \cdot 5 = 10.$

радиус окружности

Ответ: 10

② Ответ: 1000

при $n = 1000$: $n^2 = \underbrace{1000}_{n}000$ => $n = 1000$ подходит.

Т.к. 1000 - первое четырёхзначное число, то числа меньше 1000, удовлетв. условию, не сущ.

~~Пусть $n > 1000$, $n \leq 9999$~~, ~~тогда~~ ~~n^2~~ $1000n + k$; k - трехзначн. число.

если $n > 1000$, $n \leq 9999$.

Посмотрим, на что может начинаться число.

на 1: $1000.000 < n^2 < 4000.000$;

тогда если нач. на 1: $n^2 = (1000 + x)^2 = 1000.000 + \underbrace{2000x + x^2}_{1000x}$;

тогда $x^2 + 2000x = 1000x$; $x^2 + 1000x = 0$ – противор., $x > 0$.

на 2: $4000.000 < n^2 < 9.000.000$ => не может нач. на 2.

на 3: $9.000.000 < n^2 < 16.000.000$ => не может нач. на 3.

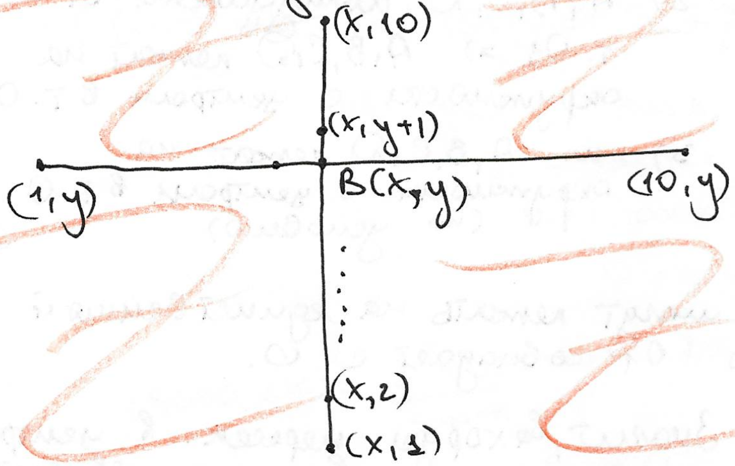
....

Аналогично для всех остальных цифр, кроме 9.

если нач. на 9: $(9000 + x)^2 = 81.000.000$

3 * вершина ~~A~~ — вершина при прямом угле.

1) Рассмотрим т. $B(x,y)$ – вершину прямоуг. треуг. при прямом угле. Посмотрим, сколько удовлетв. условию треугольников с верш. в т. B можно получить:



Нам нужно выбрать одну точку из мн-ва с ~~коорд.~~ абсциссой x (кроме т. B) и одну точку из мн-ва с ординатой y (кроме т. B).

Т.к. абсциссы и ординаты точек принадлежат мн-ву $\{1, 2, \ldots, 10\}$, то выбрать пару точек: $(10-1)\cdot(10-1) = 81$ способ.

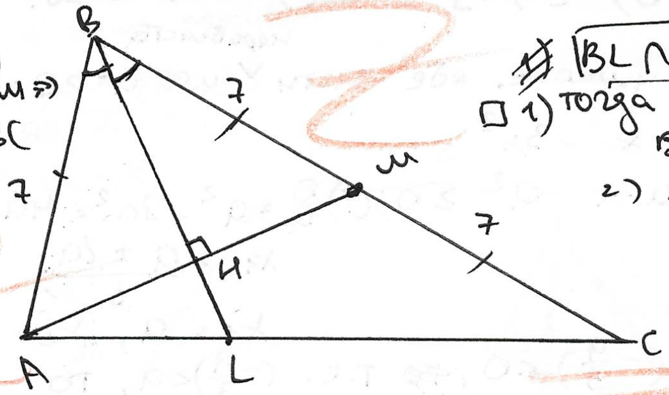
Значит, для любой т. B из мн-ва F число способов построить прямоуг. треуг. с верш. в т. B равно 81.

2) кол-во способов выбрать т. B: $10 \cdot 10 = 100$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего 8100 способов выбрать подходящий треуг.

Ответ: 8100.

(4) AB=7 △ABC - не р/б !!!



(⟶) 1) BL⊥AM ⇒ 2) 2AB=BC

‡ $BL \cap AM = H$;

□ 1) тогда в △ABM:
BH – высота и бисс. ⇒
2) △ABM - р/б с осн. AM;
AB = BM = 7.

2) AM - мед. △ABC ⇒
⇒ BC = 2·BM = 2·7=14.
(т.е. BC = 2AB) ■

(⟵) 2AB = BC ⇒ BL⊥AM:

□ 1) AM - мед. △ABC ⇒ $BM = MC = \frac{BC}{2} = AB$ ⇒
⇒ △ABM - р/б с осн. AM (т.к. AB = BM) ⇒
2) △ABM: BL - бисс. ∠ABC ⇒ BH - бисс. △ABM
⇒ BH - выс. △ABM (т.к. бисс., провед. к осн. р/б тр., явл. и высотой этого треуг.)

Значит, BL ⊥ AM ■

Значит, мы доказали, что BL ⊥ AM ⇔ 2AB = BC,
т.е. в данной задаче $\begin{cases} AB=7 \\ BC=14. \end{cases}$

Значит, длина AC - целое число, удовлетв. неравенству треуг., т.е. 7 = BC-AB < AC < AB+BC = 21 ⇔ 8 ≤ AC ≤ 20,
и не равное AB и BC, т.е. 7 или 14.

Значит, AC ∈ {8, 9, ..., 13, 15, 16, ..., 19, 20}.

Тогда, т.к $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 21 + AC$, то есть:

Ответ: $P_{\triangle ABC} \in \{29, 30, ..., 34, 36, ..., 40, 41\}$.
(т.е. периметр – нат. число от 29 до 41 включительно, кроме числа 35).

3

Чистовик

⑥ $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0$; $\boxed{a \neq 0}$ $[c;d]$ - ответ; $d-c = 2026$.

1) $a > 0$, тогда умнож. обе части неравенства на $a^3 > 0$:

$a^2 + 2a \cdot x - 3x^2 \le 0$

$3x^2 - 2a \cdot x - a^2 \ge 0$; (1) $\frac{D}{4} = a^2 + 3a^2 = 4a^2$;

$x_{12} = \frac{a \pm 2a}{3}$;

$x_1 = a$, $x_2 = -\frac{a}{3}$;

т.к. $a > 0$, $(-\frac{a}{3}) < 0$, т.е. $(-\frac{a}{3}) < a$, то

(1): $\left[\begin{array}{l} x \ge a \\ x \le -\frac{a}{3} \end{array}\right.$ - не является отрезком при $a > 0$.

2) $a < 0$; тогда умнож. обе части неравенства на $a^3 < 0$:

$\begin{cases} a^2 + 2a \cdot x - 3x^2 \ge 0 \\ a < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2 - 2a \cdot x + a^2 \le 0; (1) \\ a < 0 \end{cases}$

$\frac{D}{4} = a^2 + 3a^2 = 4a^2$; $x_{12} = \frac{a \pm 2a}{3}$; $\left.\begin{array}{l} x_1 = a < 0 \\ x_2 = -\frac{a}{3} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{a}{3} > a$.

тогда (1): $\begin{cases} a \le x \le -\frac{a}{3} \\ a < 0 \end{cases}$, т.е. $[a; -\frac{a}{3}]$ - ответ;

$-\frac{a}{3} - a = 2026 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}a = 2026 \Leftrightarrow a = -\frac{2026 \cdot 3}{4} =$

$= -\frac{1013 \cdot 3}{2} = \boxed{-\frac{3039}{2}}$;

Ответ: $-\frac{3039}{2}$.

⑧ На каждом ходе у Казимира 4 направления. Тогда возм. вариантов раскраски после 8 ходов $= 4^8 = 2^{16}$;

Чтобы Казимир нарисовал требуемое, у него $8 \cdot 2 = 16$ вариантов - это 2^4. (выбирает одну из 8 клеток кольца и одно из направлений: по часовой или против часовой.)

Тогда $P = \frac{2^4}{2^{16}} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4 \cdot 1024} = \frac{1}{4096}$;

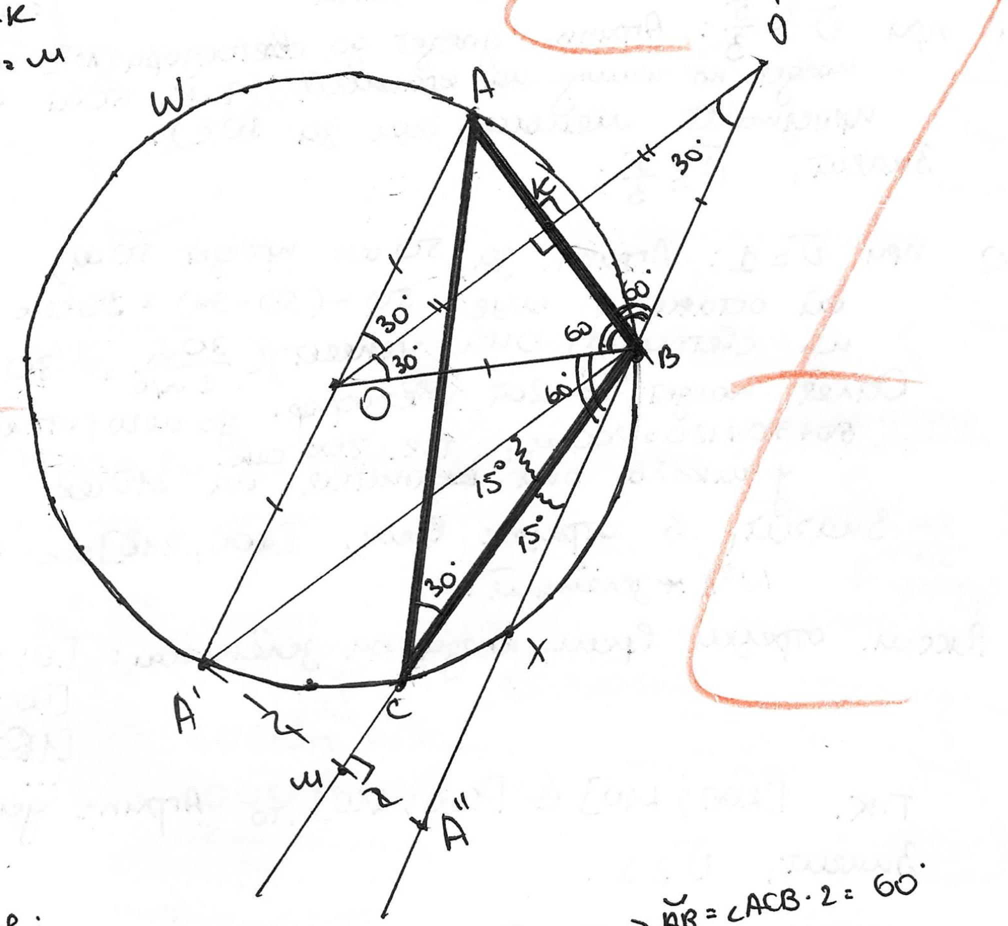
Ответ: $\frac{1}{4096}$.

4

Чистовик

7

0) пусть A' диам. противоп. т. A.
$O'B \cap \omega = \{B'; X\}$
$O'O \cap AB = K$
$A'A'' \cap BC = M$



Решение:

1) $\angle ACB = 30°$ - впис. в ω, опир. на $\breve{AB}$ $\Rightarrow$ $\breve{AB} = \angle ACB \cdot 2 = 60°$
$\angle AOB$ - центральный, опир. на $\breve{AB}$ $\Rightarrow$ $\angle AOB = 30 \cdot 2 = 60°$; $\Rightarrow$

2) $AO = OB$ (радиусы ω)
$OO' \perp AB$ (т.к. O и O' симм. относ. AB)
$\Rightarrow$ $\angle AOO' = \angle O'OB = \frac{60°}{2} = 30°$;
тогда $\angle OBA = 60°$ (в $\triangle OKB$: $\angle O = 30°$, $\angle K = 90°$) $\Rightarrow \angle B = 60°$)
тогда $\angle O'BA = 60°$ ($= \angle OBA$) (из-за симм. O и O' относ. AB),
$\angle BOO' = \angle BO'O = 30° = \angle AOO'$ $\Rightarrow$ $\boxed{AO \parallel BO'}$ (т.к. равны накр. лежащ. углы)

3) тогда, т.к. $A''-B-O'$ (по усл.), то $\angle OBA'' = \angle OBX =$
$= 180° - \angle OBA - \angle ABO' = 180° - 60° - 60° = 60°$;

4) $AO \parallel BO'$ (из 2 действия) $\Rightarrow$ $AA' \parallel BX$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\breve{AX} = \breve{AB} = 60°$;
тогда, т.к. $\angle ABX$ - впис. в ω, опир. на $\breve{AX}$ ($=60$), то $\angle ABX = 30°$, т.е.
$\angle ABA'' = 30°$

5) A' и A'' симм. относ. BC $\Rightarrow$ $\angle ABC = \angle A''BC = \frac{30°}{2} = 15°$

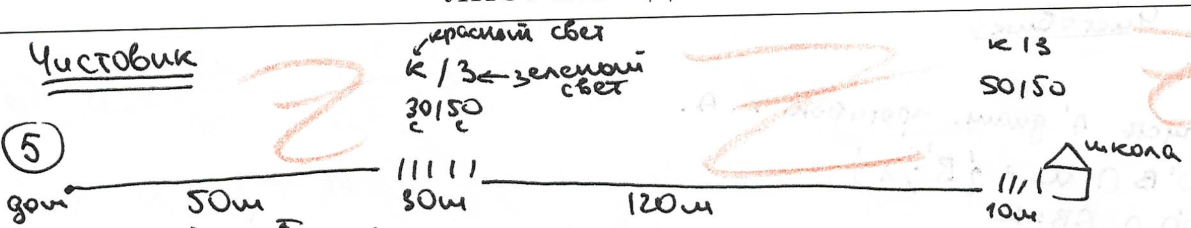
6) тогда $\angle ABC = \angle ABA'' - \angle A''BC = \angle ABO + \angle OBC - \angle A''BC =$
$= 60° + 60° - 15° = 120° - 15° = 105°$;

Ответ: $105°$

5

Чистовик

(5)



1) при $v > \frac{5}{3}$: Агрипп. доедет до светофора №1 и поедет по нему на красный (т.к. 50м она проезжает меньше, чем за 30с).
Значит, $v \le \frac{5}{3}$;

2) при $v = 1$: Агрипп. за 50 сек проедет 50м; ей останется еще $50 - (50 - 30) = 30$ сек на светофор, она успеет ($\frac{30м}{1 м/с} = 30$ сек).
Далее поедет на 2ой светофор. до него (от ее дома) $50 + 30 + 120 = 200$ м, т.е. 200 сек.
у школы она окажется на 210 сек.
Значит, в отрезок врем. $[200, 210]$ сек светофор №2 зелёный.

Рассм. отрезки врем., когда он зелёным: $[0; 10]$
$[60; 110]$
$[160; 210]$
...

т.к. $[200; 210] \in [160; 210]$, то Агрипп. успеет.
Значит, $v \ge 1$.

3) тогда $1 \le v \le \frac{5}{3}$; Агрипп. успевает на 1ый светофор. тогда время, когда она заедет на 2ой, равно $\frac{200}{v}$; $200 \ge \frac{200}{v} \ge 200 \cdot \frac{3}{5} = 120$.
Минимальное подходящее время заезда на 2ой светофор (т.е. когда она попадает в зеленый промежуток): 160 (≥ 120).
Значит, за 160 с. Агрипп. преодолеет 200 м $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ её $\max v = \frac{200}{160} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ м/с;
(при такой скорости она проедет второй светофор за $10 : \frac{5}{4} = 8$ сек, т.е. в 168 секунду она будет у школы. $168 \in [160; 210] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ она не попадет на красный свет.)

Ответ: $\frac{5}{4}$ м/с (1,25 м/с).

(6)