Выход: 13.22–13.26

0 301446 890003

30-14-46-89
(124.22)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 КЛАСС

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ЛОМОНОСОВ
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ (МОСКВА).
профиль олимпиады

ОБИДИНА ДАНИИЛА АНДРЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03 2026 года

Подпись участника

 100 (сто)

30-14-46-89
(124.22)

ЧЕРНОВИК. ~~ЧИСТОВИК.~~

~~№1.~~

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

ОДЗ: $1-tg^2x\geq 0$

$tg^2x\leq 1$

$\Downarrow$

$tgx\in[-1;1]$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x$ при $\sin x\geq 0$

$16\sin^2x-6+6tg^2x=0$

$\frac{16\sin^2x\cos^2x-6\cos^2x+6\sin^2x}{\cos^2x}=0$; $\cos x\neq 0$

$4\sin^2 2x-6\cos^2x+6\sin^2x=0$

$4\sin^2 2x-6+6\sin^2x+6\sin^2x=0$

$4\sin^2 2x+12\sin^2x-6=0$

$2\sin^2 2x+6\sin^2x-3=0$

$1-tg^2x=0$

2A

[redacted]

max. [redacted]

min. [redacted]

8

[redacted]

06

·8

11/13

№1. ЧИСТОВИК

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x.$

ОДЗ: $\begin{cases}\sin x\geq 0\\ 1-tg^2x\geq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

$6(1-tg^2x)=16\sin^2x \quad |\cdot\cos^2x$

~~$tg^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$~~

$16\sin^2x\cos^2x-6\cos^2x+6\sin^2x=0.$

Пусть $s=\sin^2x$, тогда:

$\cos^2x=1-s$, тогда:

$6((1-s)-s)=16s\cdot(1-s).$

$6(1-2s)=16s-16s^2$

$16s^2-28s+6=0 \quad |:2$

$8s^2-14s+3=0$

$D_1=49-24=25.$

$s=\frac{7\pm5}{8}$

$\left[\begin{array}{l}s=\frac{12}{8}-\text{не подходит } (\sin^2x\in[0;1]).\\ s=\frac{1}{4}\end{array}\right.$

$\sin^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}.$ Но по ОДЗ $\sin x\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right., k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. $k\in Z$

30-14-46-89 (124.22)

Чистовик.

√2.

Пусть n — 3-х знач. число, а S — сумма его цифр.

$\frac{n}{S} \in \mathbb{Z}$ и $\frac{n}{S} \vdots 9 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \frac{n}{S} = 9k \Rightarrow n = 9kS.$

Заметим, что $n \vdots 9$. Но известно, что $n \equiv_9 S \Rightarrow$

$\Rightarrow S \vdots 9$, а для 3-х значного числа $1 \le S \le 27$, поэтому

$S \in \{9, 18, 27\}$.

При $S = 9$: $n = 9k \cdot 9 = 81k$, для 3-х значности:

$100 \le 81k \le 999 \Leftrightarrow k = 2, 3, \ldots, 12.$

считаем: 8 ки оставляем те, у которых $S = 9$:

162, 243, 324, 405, ~~486~~, 810.

При $S = 18$: $n = 9 \cdot k \cdot 18 = 162k$

$100 \le 162k \le 999 \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Подходят:

~~162, 324~~, 648, 486, 972. $(S = 18)$.

При $S = 27$: $n = 9k \cdot 27 = 243k$,

$100 \le 162k \le 999 \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4.$

Подходят: никакие $\Rightarrow$ решений нет.

Итого: 162, 243, 324, 405, ~~648~~ 486, 648, 810, 972.

$243 + 648 + 972 = 891 + 972 = 1863.$

Ответ: 1863.

№3. ЧИСТОВИК.

Точки F — это все целочисленные точки куба $-4 \le x, y, z \le 4$.
Значит, по каждой координате есть 9 вариантов и всего $|F| = 9^3 = 729$. Теперь считаем п/у. Δ, у которых оба катета параллельны осям.
Заметим, что в таком Δ прямой ∠ может быть только в 1-й вершине: если в вершине A, катеты идут вдоль 2-х осей, то 3-я сторона BC уже диагональная, и не вдоль какой оси не параллельна ⇒ в B и C п. ∠ быть не может. ⇒ достаточно считать: сколько Δ с п. ∠ в фикс. точке A и умножить на число точек.
Выберем вдоль каких 2-х осей идут катеты: таких осей всего:
$C_3^2 = 3$ — это (x, y), (y, z), (x, z).
Рассмотрим (x, y), тогда:
точка B лежит на $a \parallel Ox$: те же y, z, но x любой другой из $\{-4, -3, \ldots, 4\}$. Таких вариантов $9 - 1 = 8$. Точка C лежит на прямой через $a \parallel Oy$. У неё те же x, z, но y любой другой: тоже 8 вар. ~~Также C лежит на a ∥ Oy.~~
~~У неё те же x, y, по другой z, значит~~ ⇒ для пары осей (x, y) получаем $8 \cdot 8 = 64$ Δ. Аналогично, для (x, z), (y, z).
Итого на 1 точку A: $3 \cdot 64 = 192$ Δ.
~~Общее число. число~~ $729 \cdot 192 = 139968$.

Ответ: 139968.

30-14-46-89 (124.32)

№4. Чистовик.

Рассм. прямоуг. $R=[0,1]\times[-1;1]$. Строим плоский граф G. Граница прямоуг. + дуги. $y=\sin 11\pi x, \sin 15\pi x, \sin 17\pi x$.

G связн. Эйлер: $V-E+F_{все}=2$, $F_{все}=F+1 \Rightarrow F=E-V+1$.

1) Вершины V: на границе в $y=\sin k\pi x$ касание $y=\pm 1$:
$x=\frac{2t+1}{2k}$; $t=0,\dots,k-1 \Rightarrow k$ точек. Всего $11+15+17=$
$=43$, но 1 общая при $x=\frac{1}{2}$ для $k=11;15$. $(y=-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ различных касаний 42. Добавим ещё вершины границы: 4 угла $+(0,0)+(1,0)$, $\Rightarrow B=42+4+2=48$.

Внутри I: $\sin m\pi x=\sin n\pi x \Leftrightarrow x=\frac{2t}{m-n}$ или $x=\frac{1+2t}{m+n}$.

$(11,15)$: $x=\frac{1+2t}{26}$, $t=0..12$ — 13 вар. Но $t=6 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ на границе $\Rightarrow$ 12 внутр.

$(11,17)$: $x=\frac{1+2t}{28}$, $t=0..13$ — 14 вар. и ещё $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 16 внутр.

$(15,17)$: $x=\frac{1+2t}{32}$, $t=0..15 \Rightarrow$ 16 внутр.

Заметим, что 3-х внутр. пересечен. нет, например:
$\frac{1+2t}{26}=\frac{1+2s}{32} \Rightarrow 32t-26s=-3$ (четное = нечёт) $\Rightarrow$
Невозможно, аналогично для остальных пар. $\Rightarrow$
$\Rightarrow I=12+16+16=44$; $V=B+I=48+44=92$;

Ребра E: по границе — 1 цикл, разбитый вершинами на B кусков: $E_{гр}=B=48$. На синусоидах: каждая синусоида — дуга без самопересеч. $\Rightarrow E_k=V_k-1$; $V_{11}=2+11+12+16=41 \Rightarrow E_{11}=40$; $V_{15}=2+15+12+16=45 \Rightarrow E_{15}=44$,
$V_{17}=2+17+16+16=51 \Rightarrow E_{17}=50$.

$E=E_{гр}+E_{11}+E_{15}+E_{17}=48+40+44+50=182$.

Области: $E = \cancel{X}$ $182-92+1=91$ ЧИСТОВИК.

Ответ: 91.

5.

Пусть вершины Δ-ка A, B, C; $|AB|=|AC|=|BC|=1$.

Тогда центр. симм. O (центр. впис. окр.)

$OA = OB = OC = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Выберем коорд.:

$O-(0,0)$. $C-\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $A-\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $B-\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

радиус впис. окр. $r \Rightarrow$ точк. кас. с дугой AB по симметрии на оси Oy: $P(0,-r)$. Дуга AB − парабола с Oy; вершина в P. Т.к. область над дугой, удобно писать $y = -r - Cx^2$; $C>0$. Подставим B:

$-\frac{1}{2\sqrt{3}} = -r - \frac{C}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{C}{4}$. в вершине B угол нулевой $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 сосед. дуги имеют общ. кас. в B. Заметим, что отражение относительно OB меняет дуги местами $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ их общ. касательная неизменна при этом отражении, т.е. она совпадает с OB. ($\perp$ к OB дал бы + наклон, а у дуги AB наклон в B отриц.) Наклон OB:

$k_{OB} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, а у $y=-r-Cx^2$: $y' = -2Cx \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = -C \Rightarrow -C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляем в $-\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{-r-C}{4}$:

$-\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{-r-\frac{1}{\sqrt{3}}}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

№8 ЧИСТОВИК.

$8x\log_a x - \log_x a - 2x \ge 0.$ ОДЗ: $\begin{cases} x>0;\ x\neq 1 \\ a>0;\ a\neq 1 \end{cases}$

Положим, $t=\log_a x$, ~~…~~ $\Rightarrow x=a^t$, $t\neq 0$, $\log_x a=\frac{1}{\log_a x}=\frac{1}{t}$; тогда

$8x^2\log_a x-\log_x a-2x\ge 0 \Leftrightarrow 8a^{2t}-\frac{1}{t}-2a^t\ge 0 \;|\cdot t.$

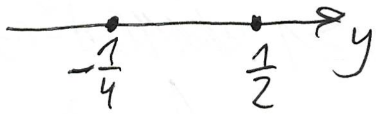
$\left[\begin{array}{l} \boxed{\begin{cases} t>0; \\ 8t^2\cdot a^{2t}-2ta^t-1\ge 0, \end{cases}} \\ \boxed{\begin{cases} t<0; \\ 8t^2\cdot a^{2t}-2ta^t-1\le 0 \end{cases}} \end{array}\right.$

Заметим, что удобно ввести $y=ta^t \Rightarrow t^2\cdot a^{2t}=y^2$, тогда:

$\left[\begin{array}{l} t>0:\ 8y^2-2y-1\ge 0;\ y>0 \\ t<0:\ 8y^2-2y-1\le 0;\ y>0. \end{array}\right.$

$D=1+8=9$

$y=\frac{1\pm 3}{8}\Rightarrow$



$l=-\ln a.$

~~Тогда: …~~ решения по t состоят из "куска слева от 0" (из $t<0$) и "чего-то справа" (из $t>0$)

Нам нужно, чтобы по x получилось полуинтервал + точка $\Rightarrow$ справа $t>0$ должно быть ровно 1 t, иначе будет интервал. Если $a>1$, то $t\cdot a^t\to\infty$ при $t\to+\infty$, $\Rightarrow$ усл. $t\cdot a^t\ge\frac{1}{2}$ даст интервал, а не точку. $\Rightarrow$ ~~но~~ $\ln a>0.$

$\boxed{t<0:\ -\frac{1}{4}\le y<0 \Leftrightarrow ta^t\ge -\frac{1}{4}.}$ (1)

$a^t=e^{-lt}$. На $t>0$ y есть максимум; $y'(t)=e^{-lt}\cdot(1-lt)=0\Rightarrow t_0=\frac{1}{l}$. $y_{max}=y(t_0)=\frac{1}{l\cdot e^{1}}=\frac{1}{e\cdot l}$, чтобы в (1) при $t>0$ было ровно 1 решение нужно касание уровня $\frac{1}{2}$, т.е. $y_{max}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{e\cdot l}=\frac{1}{2}\Rightarrow l=\frac{2}{e}.$

ЧИСТОВИК.

Откуда $-\ln a = \frac{2}{e}$. При этом над $t<0$ функция $e(t)$ строго возрастает

$\Rightarrow$ неравв. $ta^t \geq -\frac{1}{4}$ даёт 1 промежуток вида $[t_1, 0)$, т.е. по $x = a^t$ — полуинтервал, а из $t>0$ остается 1 точка.

Ответ: $a = e^{-\frac{2}{e}}$

№7

Гранич. клеточ. огр. $y = \frac{x^2}{2} + c$, $y = \frac{x^2}{2} + c + 1$, $y = -\frac{x^2}{2} + d$, $y = -\frac{x^2}{2} + d + 1$; c и $d \in \mathbb{Z}$.

Пусть $n = d - c$, тогда пересеч. сущ. только при $n \geq 1$ иначе $d - c + 1 < 0$. ~~Рассмотрим~~

4 вершины. $A = \frac{x^2}{2} + c = -\frac{x^2}{2} + d \Rightarrow x = \sqrt{n}$;

$y = \frac{c+d}{2} = \frac{c+n}{2}$; $B = \frac{x^2}{2} + c + 1 = -\frac{x^2}{2} + d \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{n-1}$, $y = \frac{c+n+1}{2}$; $C = \frac{x^2}{2} + c + 1$.