выдан 1 лист
Мони

0 136240 180001

13-62-40-18
(124.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по ~~математике~~ г. Москве
профиль олимпиады

Овсянниковой Леонида Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

100 (сто) димиз

13-62-40-18 (124.11)

Задание 1 Чистовик

$$\sqrt{3\cdot(1-ctg^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ ctg^2 x \leq 1 \end{cases}$$

$\sin x \neq 0$

$$3 - 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 8\cos^2 x$$

$$3 = \cos^2 x\left(8 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)$$

$$3\sin^2 x = \cos^2 x(8\sin^2 x + 3)$$

$\cos^2 x = t;\ t \in [0;1]$

$$3(1-t) = t(8(1-t)+3) = t(8+3-8t) = 11t - 8t^2$$

$$3 - 3t = 11t - 8t^2$$

$$8t^2 - 14t + 3 = 0$$

$D_1 = 49 - 24 = 25;\ t_{1,2} = \frac{7\pm5}{8};\ |t| < 1 \Rightarrow \frac{7+5}{8}$ не подх

$\Rightarrow t = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4};\ \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow ctg^2 x = \frac{1}{3} < 1$

$\cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\ \ n \in \mathbb{Z}$

Задание 2 чистовик

т.к число $= [$сумма цифр$] + 9k; k \in \mathbb{N}$

то $\forall N \in A$ $N \vdots 9 \Rightarrow$ сумма цифр $N \vdots 9$

$\Rightarrow N \vdots 81$

т.к числа которые мы ищем трехзначные, то сумма цифр каждого из них $\leq 9 \cdot 3 = 27$

причем 27 достигается только при $N = 999$ —

но ~~999~~ $\frac{999}{27} = \frac{111}{3} = 37 \not\vdots 9$ для $999 \not\vdots 81$

тогда в A входят трехзначные числа с суммой цифр 9 или 18 и $\vdots 81$

переберем: ~~числа~~ $81 \cdot 2 \ldots 100$

$81 \cdot 2, 81 \cdot 3, 81 \cdot 4, 81 \cdot 5, \ldots \quad 81 \cdot 10; 81 \cdot 11, 81 \cdot 12$

$81 \cdot 13 > 1000$

$S(n)$ — сумма цифр числа n

$S(162) = 9$,

С четными числами проблем не возникает

т.к если четные числа $\vdots 81$ то они делятся и на 9 и на 18 и четные деле $\vdots 9$.

Рассм. нечетные; если сумма цифр 18 то они не подх

$81 \cdot 3 = 243$; $S(243) = 9$ — подх, $S(81 \cdot 5) = S(405)$ — подх

$S(81 \cdot 7) = S(567) = 18$ — не подх; $S(81 \cdot 9) = 729 = 18$ — не подх

$S(81 \cdot 11) = S(891)$ — не подх,

Тогда в AB входят только листовые

162, 243, ~~486~~ 324, 405, 486, 648, 810 ~~...~~ 972

Тогда в ответе сумма АТО 243+~~...~~486+810 =

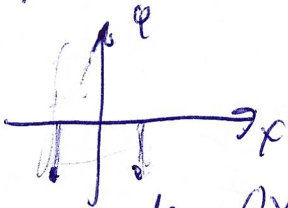
= 810+600+120+9 = 1410+129 = 1539

Ответ: 1539

Задача 3

Решение: всего целых чисел на промеж. из м-у -5 ... 11 (-5, -4 ... 0, 1 ... 5)

т.к для $\triangle ABC$: $\angle ABC = 90^\circ$ и AB и BC || одной из осей то (ABC) || одной из координатных плоскостей, пусть (ABC) || (Oxy); Остальные считаются аналогично, пусть AB || Ox. Заметим что у нас ~~...~~ $\frac{...}{2}$ 5



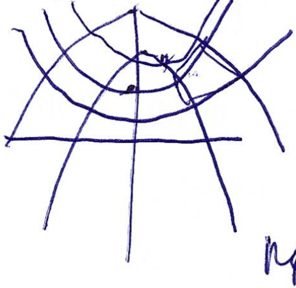
~~способов выбрать AB(точк)~~ точе

11 способов выбрать расстояние м. Ox и AB (0→5 - кол-во расп 4 -1 — (-5) - положение относительно Ox). пусть мы выбрали точку B (11 способов для x-коор-ты) и 10 способов выбрать A точки. Выбрать AB — 11·11·10 способов = 1210. абсцисса C совп с абсциссой B, и для BC — 10 вариантов с учетом направления (сейчас) тогда выбрать $\triangle ABC$ || Oxy — 12100 способов для остальных аналогично

Ответ: 36300

Задача 7 Чистовик

Заметим, что от центра до верха/низа страницы $\frac{210}{2} = 105$ мм $= 10,5$ см; поэтому $a|10| \leq 10$

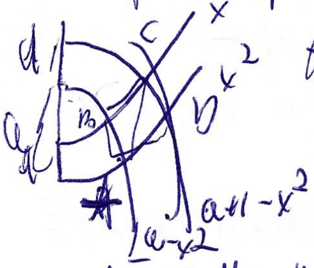


Заметим, что клеточки получаются только при пересечении ~~вершин~~ 2х пар парабол, в каждой паре на графике отличающихся смещением вверх на 1

т.к. знаем, что мы наследуем клеточку в которой в 1 паре парабол вершины смещены друг относ. друга на 1/2, тогда ∃ парабола между ними.

БОО: в ~~клеточке~~ клеточка это 1 пара $x^2; x^2+1$ и $a-x^2; a+1-x^2$

тогда точки $ABCD$ имеют абсциссы



(см. рис) $\sqrt{\frac{a}{2}}; \sqrt{\frac{a-1}{2}}; \sqrt{\frac{a}{2}}; \sqrt{\frac{a+1}{2}}$

при $a \in [2;10]$

~~найдем пл. ABCD как $S_{ABC}+S_{ACD}$~~

ордината A $- a-\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$

орд B $- \frac{a+1}{2}$; орд C $- \frac{a+2}{2}$; орд D $- \frac{a+1}{2}$

Т.к. $AC \parallel Ox$; $BD \parallel Oy$ то $AC \perp BD$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC\cdot BD}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ см^2

Ответ: 0,5 см^2

13-62-40-18
(124.11)

задание 8 Чистовик

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8x^2\log_a x - 2x - \frac{1}{\log_a x} \le 0$

$D_1 = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{8\log_a x}$ $x_1 = \frac{1}{2\log_a x} = \frac{1}{2}\log_x a$

$x_2 = -\frac{1}{4}\log_x a$

Заметим что $8x^2\log_a x - 2x - \frac{1}{\log_a x} =$

$= \left(x - \frac{\log_x a}{2}\right)\left(x + \frac{\log_x a}{4}\right)\cdot 8\log_a x$

Решаем: $\left(x - \frac{\log_x a}{2}\right)\left(x + \frac{\log_x a}{4}\right)\cdot \log_a x \le 0$

$a>0$, $a \ne 1$, $x>0$, $x \ne 1$: $\Leftrightarrow (2x - \log_x a)(4x + \log_x a)(a-1)(x-1) \le 0$

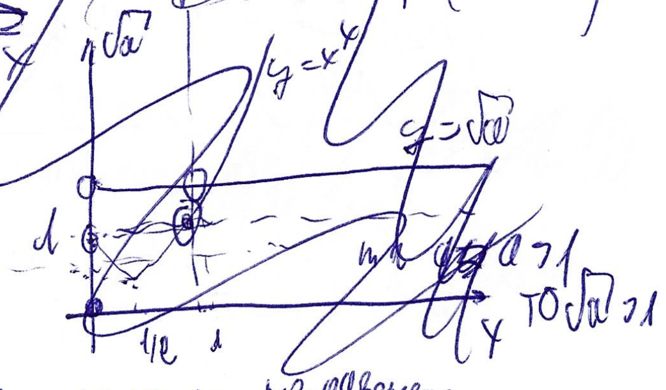
1) $a>1$ тогда $4x + \log_x a > 0$ на одз

тогда $\Leftrightarrow (2x - \log_x a)(x-1) \le 0$

$2x - \log_x a = 2(x - \log_x \sqrt{a}) = \log_x x^x - \log_x \sqrt{a}$

$(x-1)(x^x - \sqrt{a})$

тогда $\Leftrightarrow (x-1)^2(x^x - \sqrt{a}) \le 0$



т.к. $a>1$ то $\sqrt{a} > 1$

но тогда решения неравенства

~~$\geq$ то $\begin{cases} x \neq 1 \\ x^x = \sqrt{a} \end{cases}$ при $a > 1$~~ чистовик

~~это объединение $(0;1) \cup [\frac{1}{e}; t]$ где $t^t = \sqrt{a}$~~

– не подходит.

$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$; $f(x) > 0$

$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x(1+\ln x) = x^x \cdot \ln x + x^x$

$f''(x) = x^x(1+\ln x) + (x^x \cdot \ln x)' = x^x(1+\ln x) + (1+\ln x) \cdot x^x \cdot \ln x +$

$+ x^{x-1} = x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1} > 0$

т.е $f(x)$ вып вниз и

$0 \; \frac{1}{e} \; x$ ssn $f'(x)$

$x = \frac{1}{e}$ – т. мин. ма

Теперь $a < 1$

тогда $M = (2x - \log_x a)(4x + \log_{2x} a)(a-1)(x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (4x + \log_{2x} a)(x-1) \geq 0$ т.к $a - 1 < 0$ и $2x - \log_{2x} a > 0$

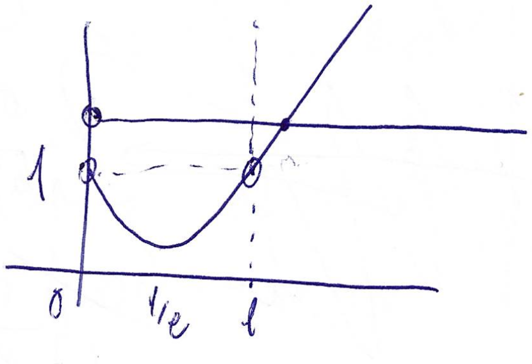
т.к $\log_{2x} a < 0$

$\Leftrightarrow (x + \log_{2x} \sqrt[4]{a})(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_{2x} x^x + \log_{2x} \sqrt[4]{a})(x-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 (x^x \sqrt[4]{a} - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $x \neq 1$

$x^x > \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$



Итак — чистовик

МЭ $(2x-\log_x a)(4x+\log_x a)\log_a x \le 0$

на ОДЗ: МЭ $(\log_x x^{2x}-\log_x a)(\log_x x^{4x}+\log_x a)(a-1)(x-1)\le 0$

$a\ne 1$, $x\ne 1$, $a>0$, $x>0$

$(x-1)(x^{2x}-a)(x^{4x}-\frac{1}{a})(a-1)(x-1)(x-1)\le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(a-1)(x^{2x}-a)(x^{4x}-\frac{1}{a})\le 0$ $\quad (x^{2x}+a)>0$

МЭ $(x-1)(a-1)(x^{4x}-a^2)(x^{4x}-\frac{1}{a})\le 0$

1) $x>1 \Rightarrow x^x>1$; $x^{4x}=t>1$

МЭ $(a-1)(t-a^2)(t-\frac{1}{a})\le 0$

при $a>0$ a^2 и $\frac{1}{a}$ по разные стороны от 1

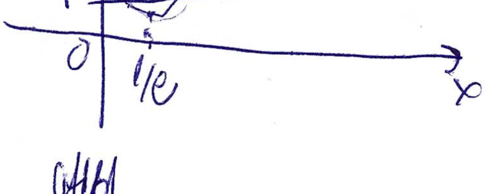
в этом МЭ

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\in(1;a^2]\ a>1 \\ t\in(1;\frac{1}{a}]\ a<1 \end{array}\right.$ на $x>1$ решение: $x\in(1;x_0]$ где x_0 - корень МЭ

для всех допустимых a это и $x>1$ $\left[\begin{array}{l} x^{4x}=a^2 : a>1 \\ x^{4x}=\frac{1}{a} : a<1 \end{array}\right.$

получ интервал т.е других решений на $x>1$; тогда есть ровно 1 решение на $x\in(0;1)$

2) $x<1 \Rightarrow$ МЭ $(a-1)(x^{4x}-a^2)(x^{4x}-\frac{1}{a})\ge 0$



при $x<1$

при $a>1$: $a^2 > 1/e$ минимальное

и $a-1>0$ и решение ~~на~~ $x<1$ это ~~e~~

$x^{4x} \geq \frac{1}{e}$ единственный случай ~~когда~~ это нер-во обр в точку

это $x=\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{a}=\left(\frac{1}{e}\right)^{4/e} \Rightarrow a=\frac{1}{(1/e)^{4/e}}=e^{4/e}>e^{3/e}$ зеть

при $a<1$; $a^2<\frac{1}{e}$; $a-1<0$

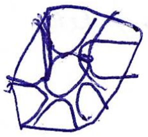
тогда ~~нер~~ $\text{м}\Leftrightarrow$ $(x^{4x}-a^2)(x^{4x}+\frac{1}{e})\leq 0$

на $x<1$ это полу интервал $x^{4x}\in[a^2;1)$ но

тогда общее решение - объед изл интервалов

Ответ: $a=e^{4/e}$

Задача 5 чистовик



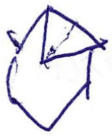
т.к. это "ч-к" р/с сим., ч.т.

с расст м. ~~соседн~~ верш = 1

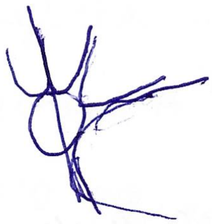
то ему соотв прав шестиугольник с верш

со сторонами 1

радиус опис вокруг ~~него~~ окр $\frac{\sqrt{3}}{2}$



в силу симметрии

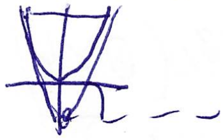


имеем: О – центр опис окр

А, В – соседние вершины

$\angle AOB = \frac{360}{6} = 60^0$

Тогда имеем



к параболе $y = cx^2$ провели касательные

в точках ~~..~~ $x = \pm\frac{1}{2}$; и они образуют угол 60^0

(тогда с Оху ось ординат угол 30^0

причем т-ка ~~пер~~ касательных это $\frac{c^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_{кас}$ в $x = \frac{1}{2}$ $= 2c\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + \frac{c^2}{4} = cx - \frac{c}{2} + \frac{c^2}{4}$

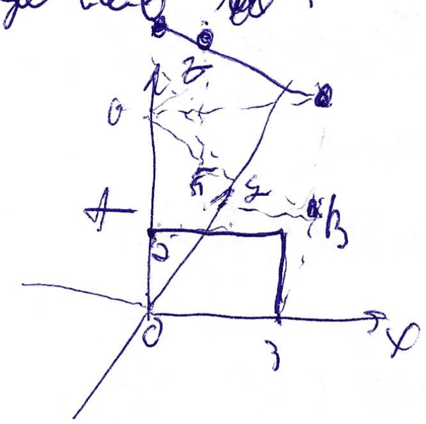
$y_{кас}(0) = \frac{c^2}{4} - \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

тогда ~~А~~ в точке $x = \pm\frac{1}{2}$ $y = cx^2 = \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

тогда r опис ~~..~~ это $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Задача 6 ~~A~~ T чистовик



пусть A и B - вершины забора ~~AB~~

A(0;0;2)

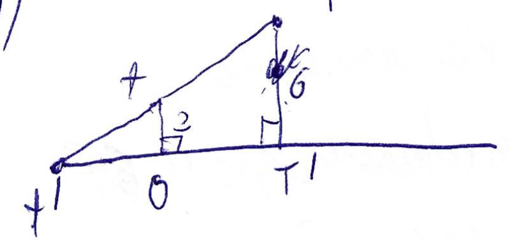
B(3;0;2)

пусть Свет движется равномерно прямолинейно тогда его положение в момент времени t:

$T\left(t-3; 7-\frac{t}{3}; 6\right)$ при $t \in [0;6]$

Тень забора это верхняя огибающая всевозможных проекций из точки T на (OXY) границы AB

1)



пусть T' - пр. и T на (OXY)

$A' = AT \cap (OXY)$

т.к. $OA \parallel TT'$ то $O \in (ATT')$

тогда $A'T'$ - пересеч. пл. и ATT'

~~Тогда~~ т.к.

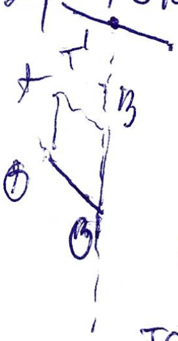
заметим что T' всегда имеет координаты

$\left(t-3; 7-\frac{t}{3}; 0\right)$ тогда A' есть образ T при гомотетии с центром в O и $k = \cancel{\ldots} = \frac{-AO}{TT'} = -\frac{1}{3}$

тогда $A'\left(\frac{3-t}{3}; \frac{\frac{t}{3}-7}{3}; 0\right)$ т.е.

$A'\left(1-\frac{t}{3}; \frac{t}{9}-\frac{7}{3}; 0\right)$

2) Теперь B' — прообраз B местами



Так аналогично B' — образ T'

при гомотетии относительно точки (3;0;0)

сделаем пар. перенос на $\vec{BT}$ (-3;0;0)

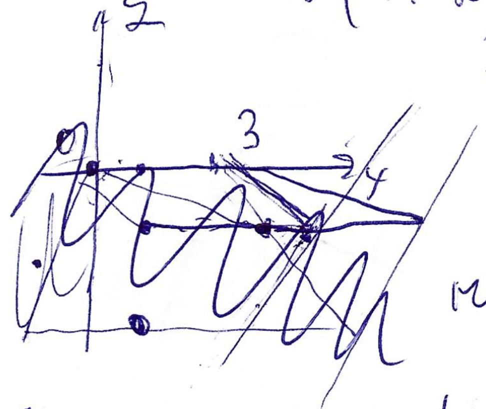
тогда T' перейдет в $T''(~~t-6~~; 10-\frac{t}{3}; 0)$

$~~T''(t-6; 10-\frac{t}{3}; 0)~~$ $T''(t-6; 7-\frac{t}{3}; 0)$

сделаем гомотетию в нем порядке и $k = -\frac{1}{3}$

Тогда $B''\left(\frac{6-t}{3}; \frac{t}{9} - \frac{7}{3}; 0\right)$; она сделаем перенос

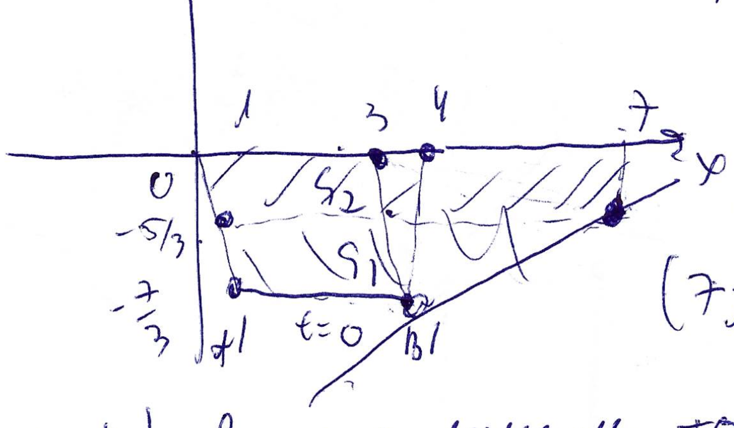
на $\vec{B_0B}$ (3;0;0) $B'\left(5 - \frac{t}{3}; \frac{t}{9} - \frac{7}{3}; 0\right)$



Заметим, что A' и B' имеют одинаковые ординаты, но A' левее B' на 2 м

в момент $t=0$ A'B' есть отрезок с концами

$(1; -\frac{7}{3})$ и $(4; -\frac{7}{3})$



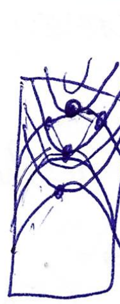
в момент $t=6$ A'B' есть отрезок $(3; -\frac{5}{3})$ и $(7; -\frac{5}{3})$

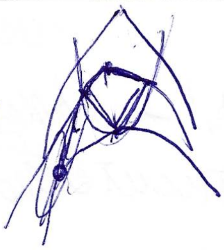
т.к. B' двигалась линейно то затемненные точки образуют объединение 2х трапеций

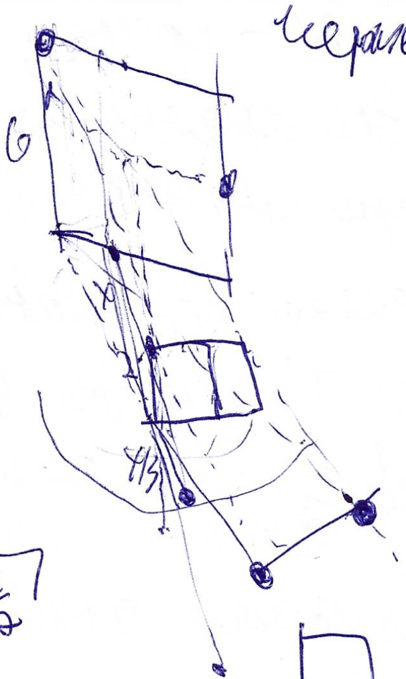
см рис; Тогда $S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4+6}{2} + \frac{6+7}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{85}{6}$

Ответ: 85/6

черновик







6

$\frac{4}{3}$

>0

x^2

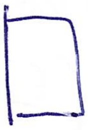
$x=\sqrt{\frac{a}{2}}$

$a-x^2$

$a-1\ a-x^2$

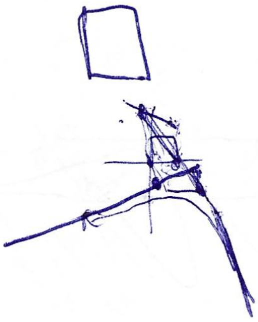
$x^2 \qquad a-1-x^2$

$x^2+1 \qquad a-x^2$

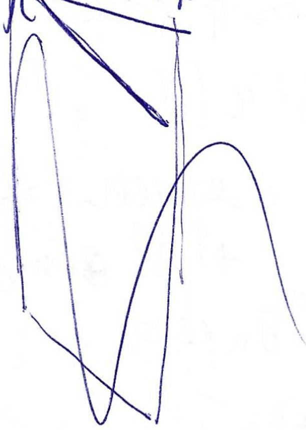


$x=\sqrt{\frac{a}{2}} \qquad x=\sqrt{\frac{a-2}{2}}$

$x=\sqrt{\frac{a-1}{2}} \qquad x=\sqrt{\frac{a-4}{2}}$



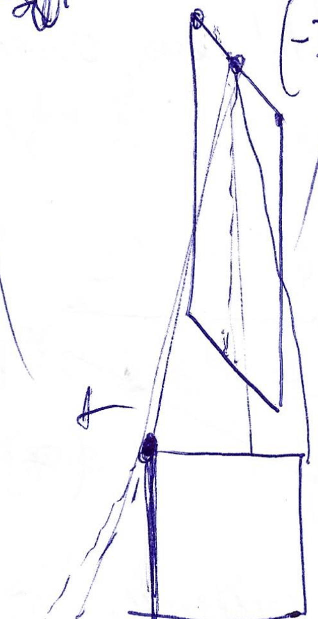
$(2x-\log_x a)(4x+\log_2 x^a)\cdot\log_a x$



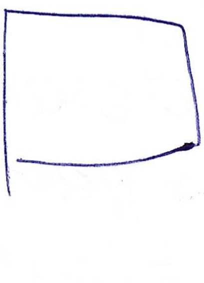
$\left(-3+t;\ 7-\frac{t}{3}\right);\ 6)$

$t\in[0;6]$

$\rho_1=(t-3)^2+\left(7-\frac{t}{3}\right)^2$



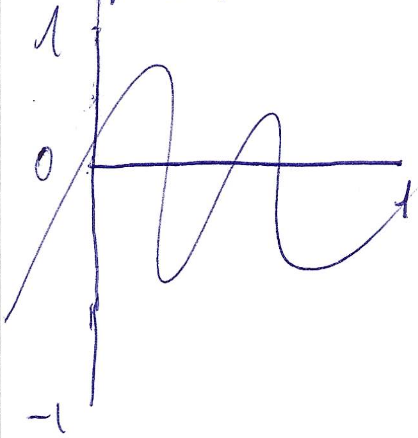
A B

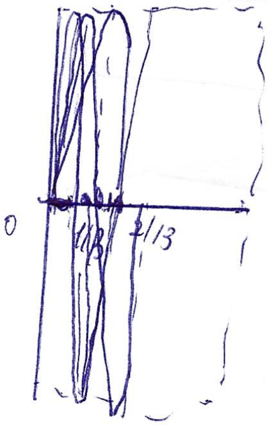


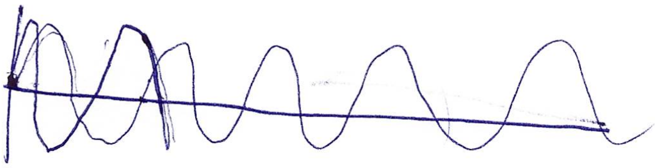
$(x^x-\sqrt{a})(x^x+\sqrt{a})(a-1)(x-1)\geq 0$

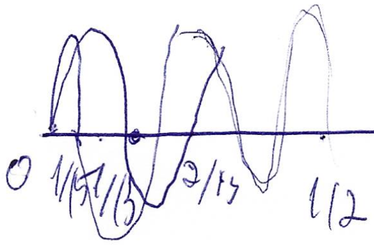
$(x^{2x}-a)(a-1)(x-1)\leq 0$

Задание 4







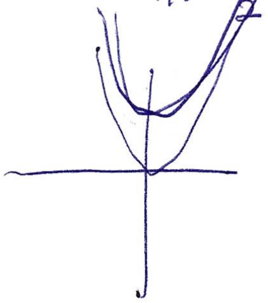


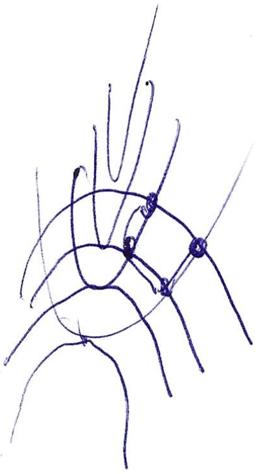
$\frac{n}{15} < \frac{n}{13}$

$\frac{n+1}{15} > \frac{n}{13}$

$13n+13 > 15n$

$n < \frac{13}{2}$





Задача 4