



выдан 1 мест  
Поиск

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва  
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике город Москва  
профиль олимпиады

Оларина Евгения Юрьевна  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«29» 03 2026 года

Подпись участника  
MS

№1

группа  
Алгебра

Лист 1

$$\sqrt{6(1-\operatorname{tg}^2 x)} = 4 \sin x$$

ОДЗ

$$\begin{cases} 4 \sin x \geq 0 \\ 6(1-\operatorname{tg}^2 x) \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k) & k \in \mathbb{Z} \\ x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right) & n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi s & s \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(2\pi v; \frac{\pi}{4} + 2\pi v\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi v; \pi + 2\pi v\right) \quad v \in \mathbb{Z}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0 \text{ из-за ОДЗ})$$

Получаем

$$\sqrt{\frac{6 \cos 2x}{\cos^2 x}} = 4 \sin x$$

Первый случай  $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(2\pi v; \frac{\pi}{4} + 2\pi v\right)$   
 $v \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\sqrt{6 \cos 2x}}{\cos x} = 4 \sin x$$

$$\sqrt{6 \cos 2x} = 2 \sin 2x \quad (\text{все больше } 0)$$

$$6 \cos 2x = 4 - 4 \cos^2 2x$$

Пусть  $\cos 2x = t$

тогда

$$4t^2 + 6t - 4 = 0$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$t_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 = \cos 2x \quad (\text{Нет реш})$$

$$t_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

вспомнить про ОДЗ и ограничения

$$\text{т.к. } \cos x > 0 \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

② случай  $\cos x < 0$

$$\frac{\sqrt{6 \cos 2x}}{-\cos x} = 4 \sin x$$

$$\sqrt{6 \cos 2x} = -2 \sin 2x \quad (\text{все больше 0})$$

$$6 \cos 2x = 4 - 4 \cos^2 2x$$

Получаем такое же уравнение

значит и тут  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$

вместе с другим ограничением ответ тут

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

лист 2

22-02-49-14  
(1218)

№2 Лист 3  
 Если число после деления на натуральное  
 число кратно 9 значит оно было кратно  
 9 и 9<sup>0</sup> делится. Если оно было кратно  
 4 9<sup>0</sup> делится, значит сумма его цифр  
 тоже была кратно 9

$S(n)$  - сумма цифр числа  $n$

$$\frac{n}{S(n)} = 9k \quad k \in \mathbb{N}$$

⇓

$$n = 9k \cdot S(n)$$

$$9k \cdot S(n) \div 81 \Rightarrow n \div 81$$

Осталось перебрать трёхзначные числа  
 кратные 81 и найти подходящие

~~такие~~

будут точно подходить все  $n$

также что  $S(n) = 9$  это:

- 152
- 243
- 324
- 405
- ~~428~~
- 810

$$\frac{486}{S(486)} = \frac{486}{18} = 27$$

$$\frac{557}{S(557)} \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{648}{S(648)} = \frac{648}{18} = 36$$

$$\frac{729}{S(729)} \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{891}{S(891)} \notin \mathbb{N}$$

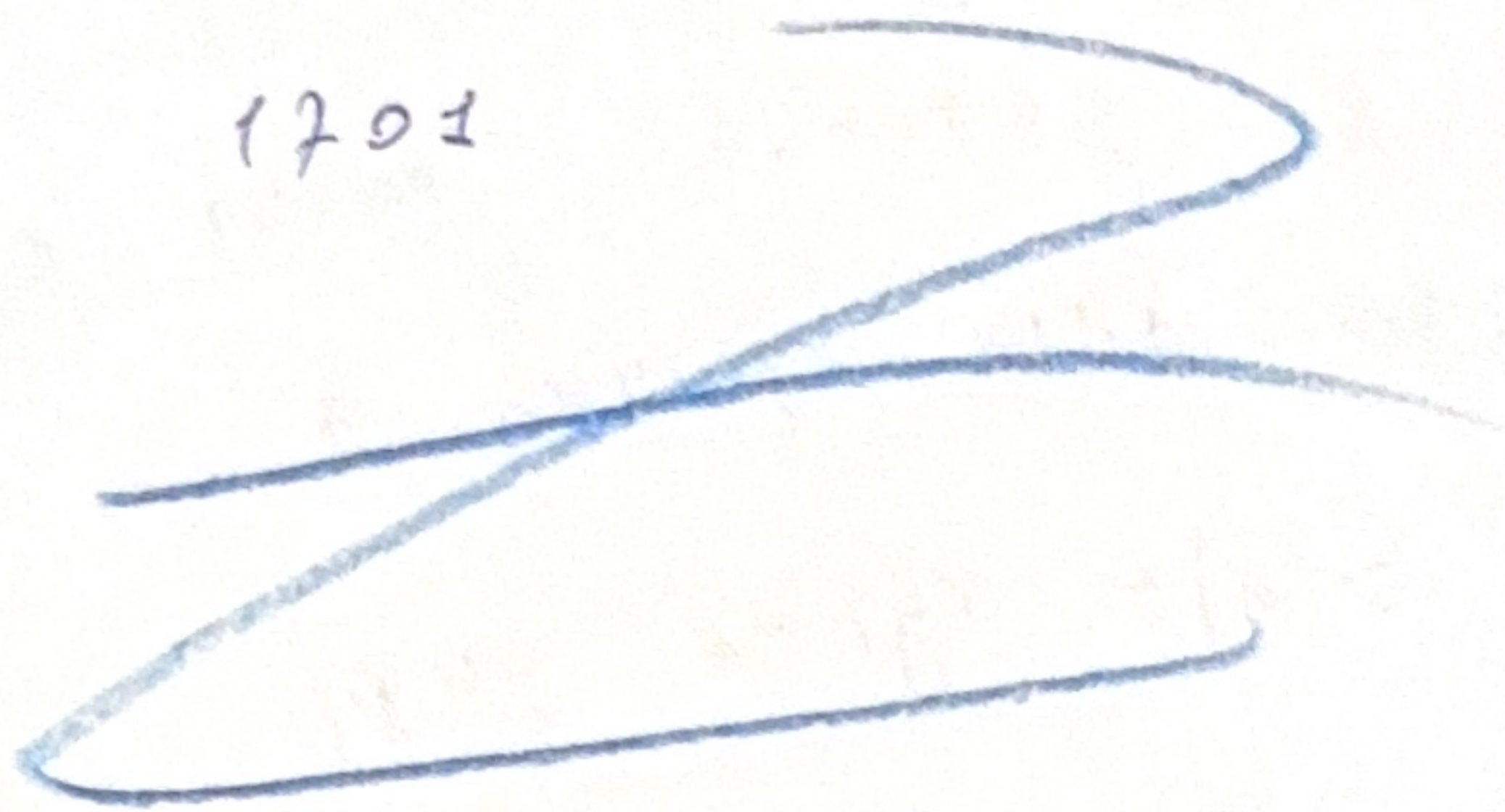
- 81
- 8
- 6
- 81
- 17
- 152
- 81
- 972

и того Походу 37 числа:

162 243 324 405 486 648 810

$$243 + 648 + 810 = 1701$$

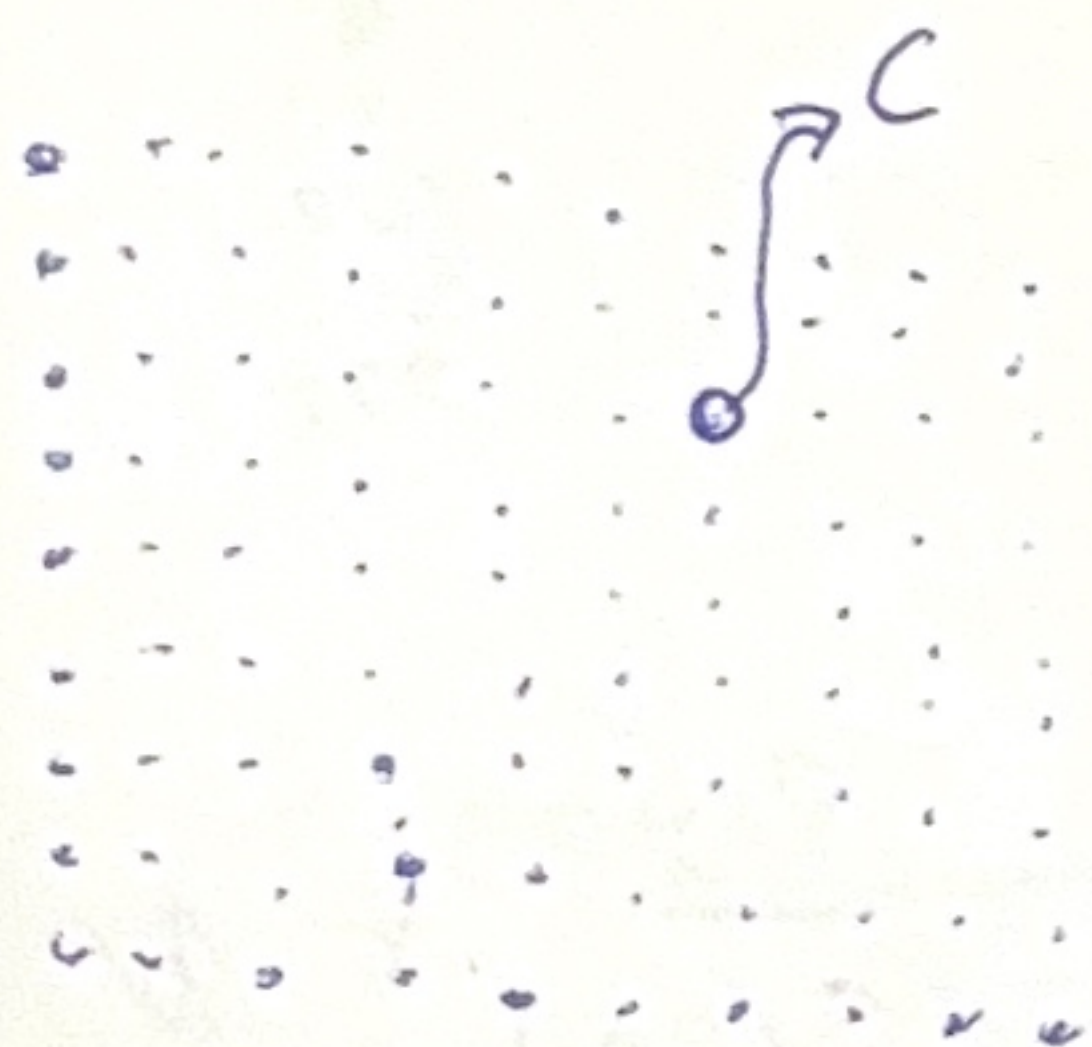
Ответ: 1701



13

~~Пусть~~ т.к. 2 катета паралл осям  
 у нас триг паралл на плоскости  
 Оху или Охз или Оуз рассмотрим  
~~одну~~ из и одну из этих случаев  
 и посчитаем сколько в нем таких триг  
 у нас есть решетка точек в виде  
 куба 9x9

Рассмотрим одну из "слоев" т.к. который  
 параллелен например Оху (в силу симметрии)



выберем здесь вершину (с)  
 с прямым углом

у нас есть 81 способ  
 это сделать

22-02-49-14  
(1248)

Затем выберем ~~одну~~ две вершины у гипотенузы

~~находящиеся~~  
для каждой из них есть 8 способов  
куда встать (они находятся в одном  
ряду и в одном столбце  
с точкой C)

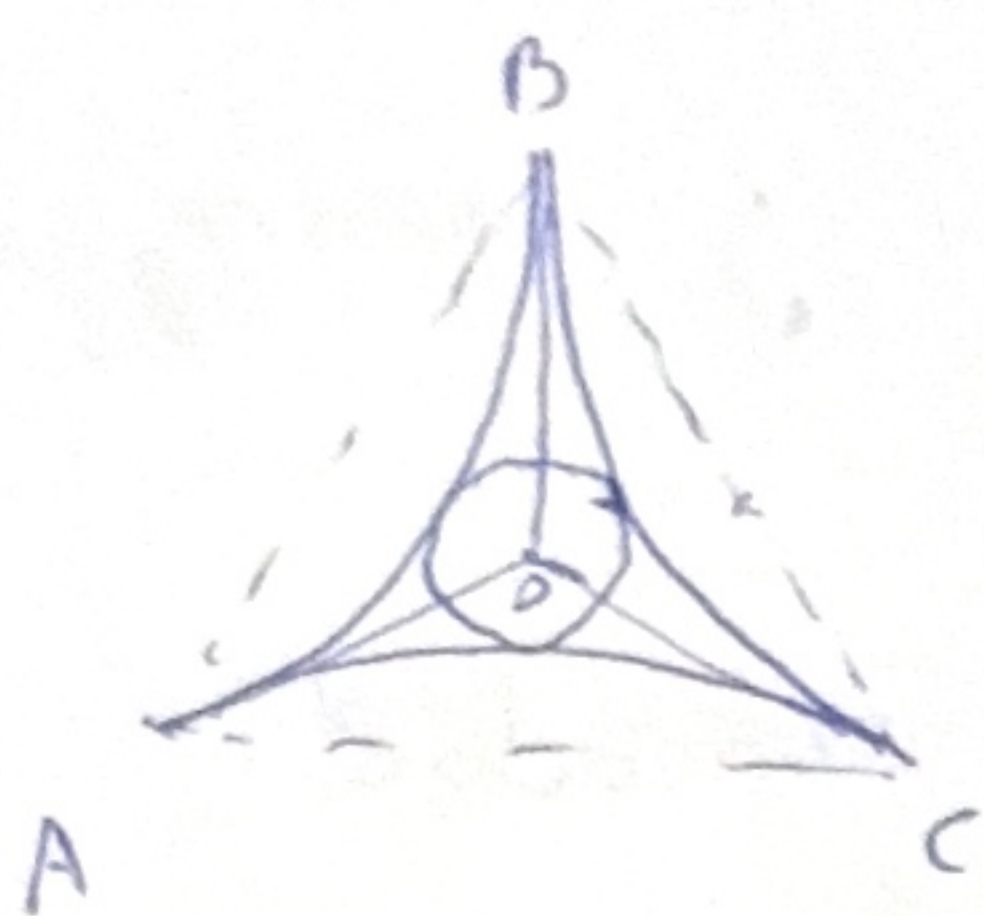
Значит ввернуть треугольник в этом  
"слое" у нас 81-8-8 вариантов  
Таких "слоев" 9 ~~одна~~ значит ввернуть  
треуг. паралл. одну есть 81-8-8-9  
способов.

И так как у нас 3 варианта какой  
плоскость может быть паралл. Треуг.  
Получаем:

$$81 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3 = 139968$$

Ответ: 139968

15



Проведём из вершин треугольника ABC биссектрисы

Т.к. угол между параболом  $0^\circ$  значит все эти

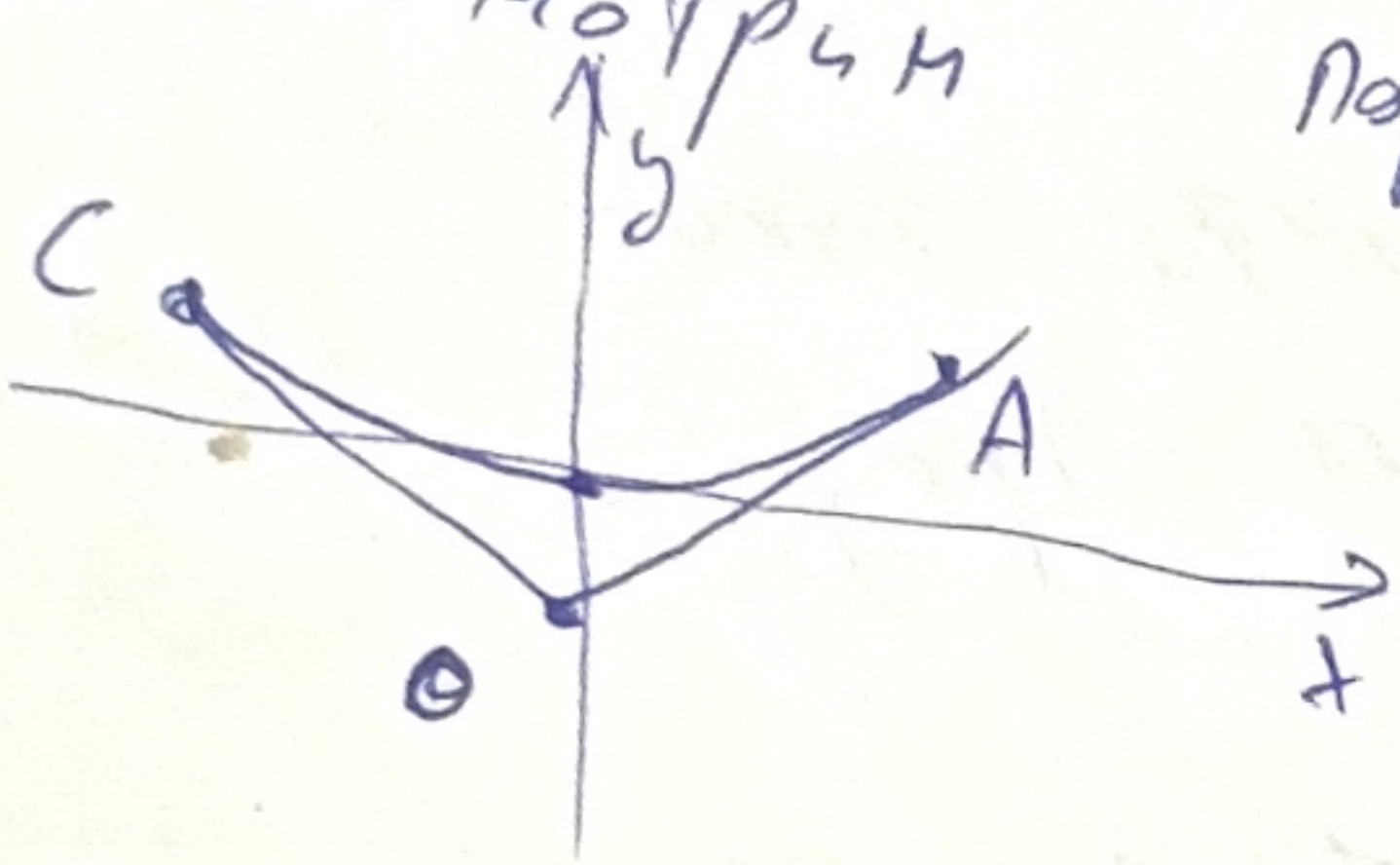
биссектрисы касательные к параболам.

В силу симметрии точка пересечения этих биссектрис будет находиться в центре окружности

(Т.к. треугольник между ABC правильный угол  $\angle AOC = 120^\circ$  O - центр окруж.)

BO - биссектриса, высота, медиана  $\triangle ABC$

Рассмотрим



параболу с точками A и C

Она симметрична от касательных BO.

Введём систему координат

так, что BO это ось Oy

В точке  $x = \frac{1}{2}$  угол наклона касательной к графику  $y = 2cx$  равен  $30^\circ$

$y' = 2cx$

Значит  $\tan 30^\circ = 2c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = \frac{1}{\sqrt{3}} = 2c \cdot \frac{1}{2}$

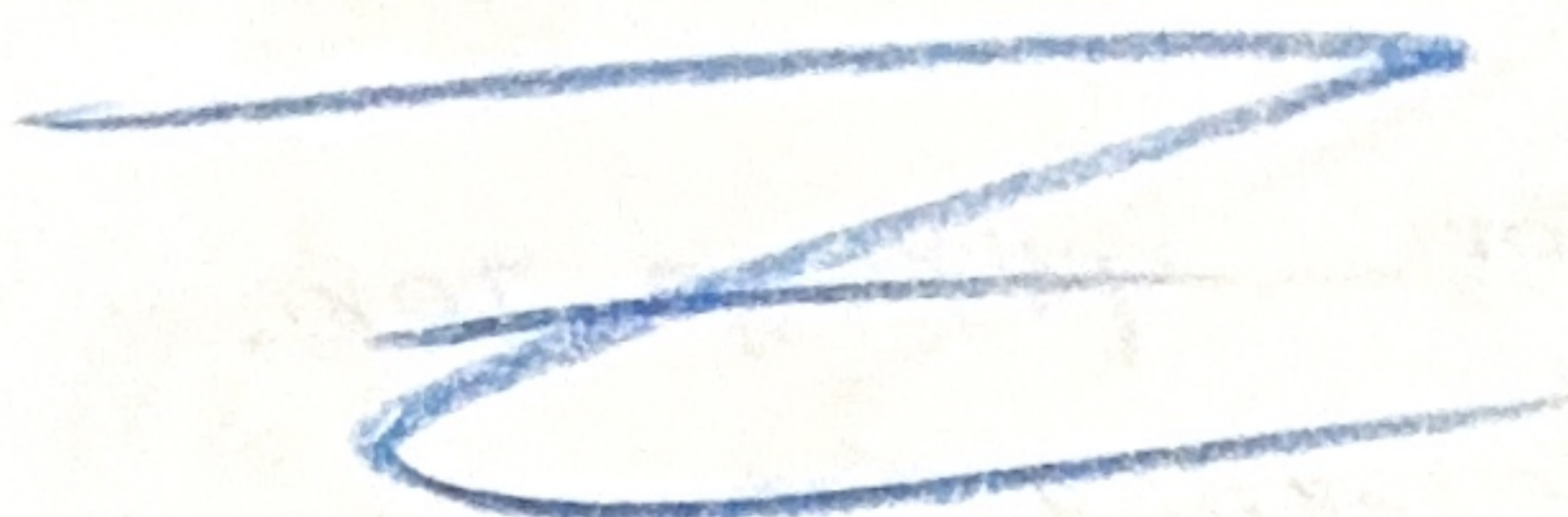
$$g'(\frac{1}{2}) = \lg 30 \Rightarrow 2C \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ - (расстояние от вершины } \Delta OAC \text{ параллельно } BC)$$

Расстояние от точки  $O$  до  $AC$  это треть медианы треугольника  $ABC$ , равно  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$  расстояние от точки  $O$  до параллели  $BC$

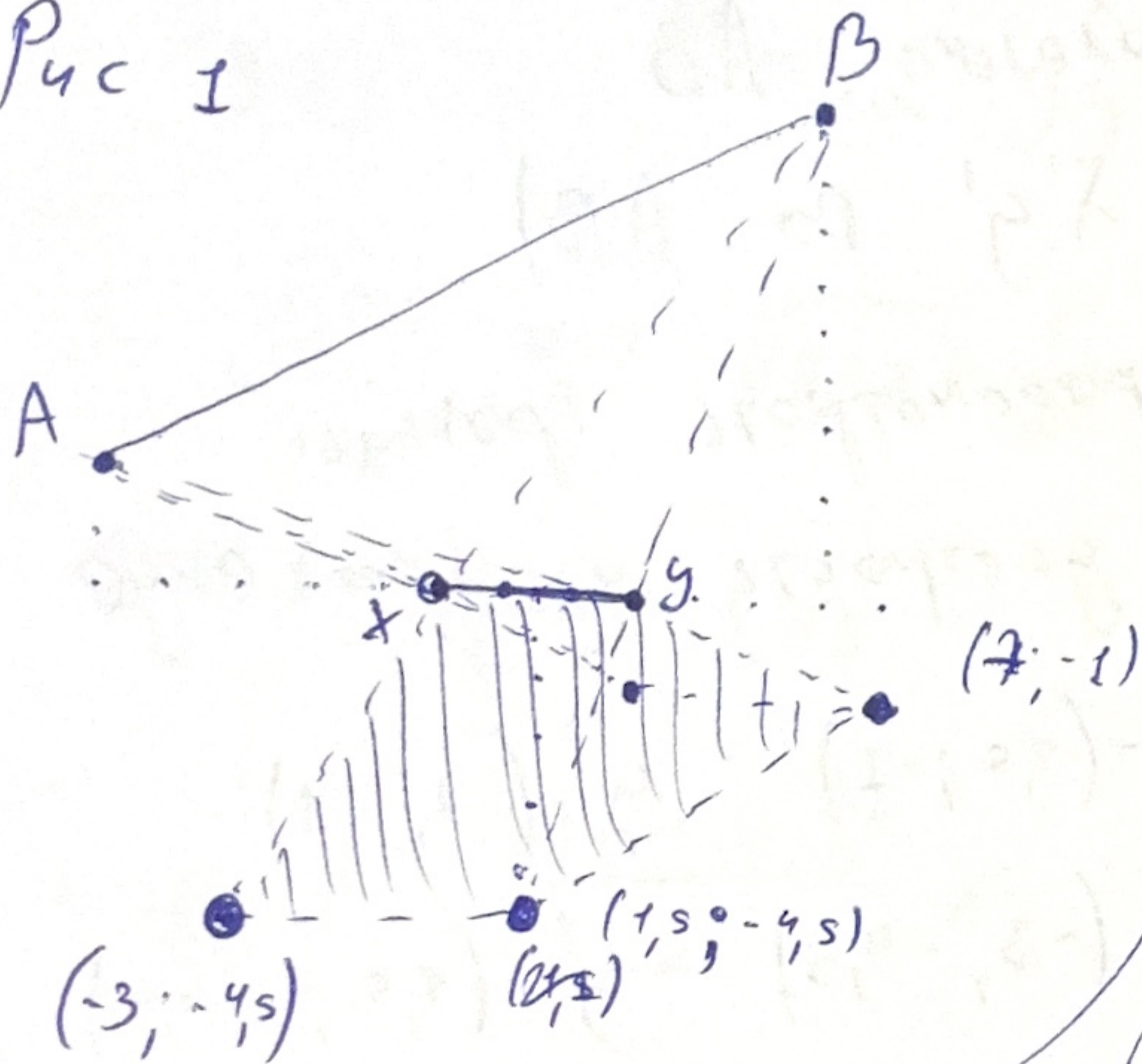
$$\text{это } \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{12}$



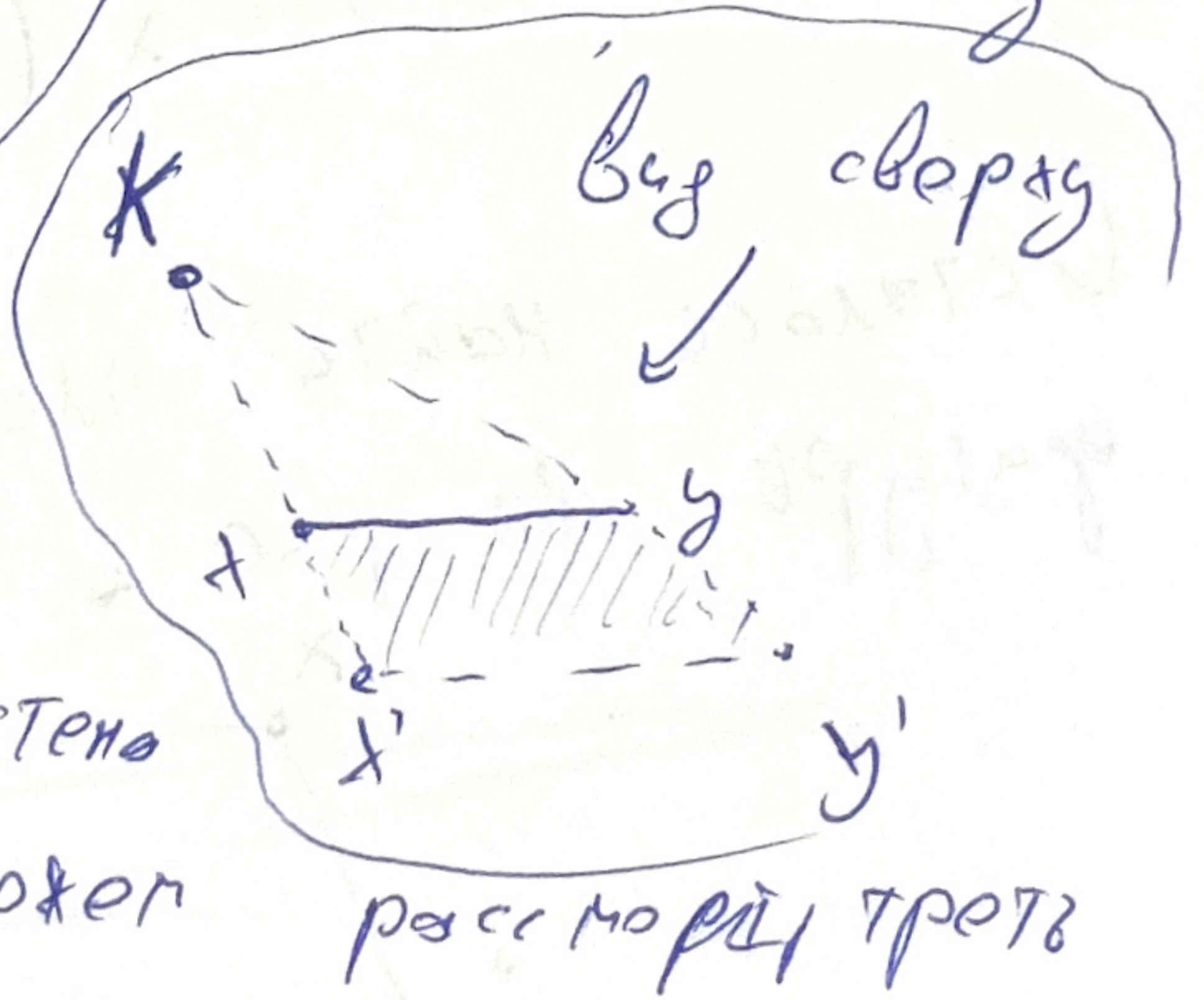
№ 6

Рис 1



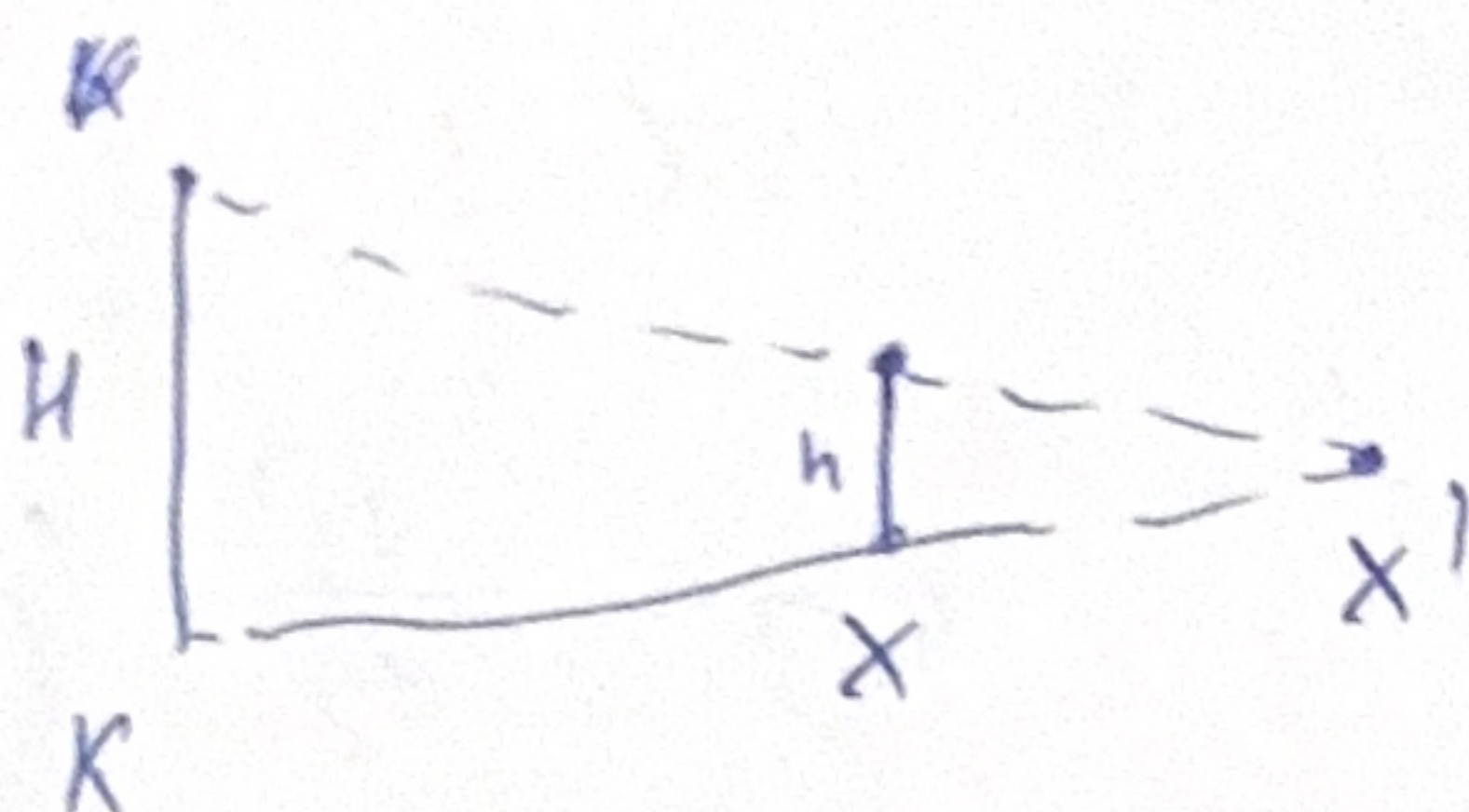
Если мы проведем из каждой точки  $AB$  перпендикуляр

Рассмотрим любую точку  $AB$  и стенку



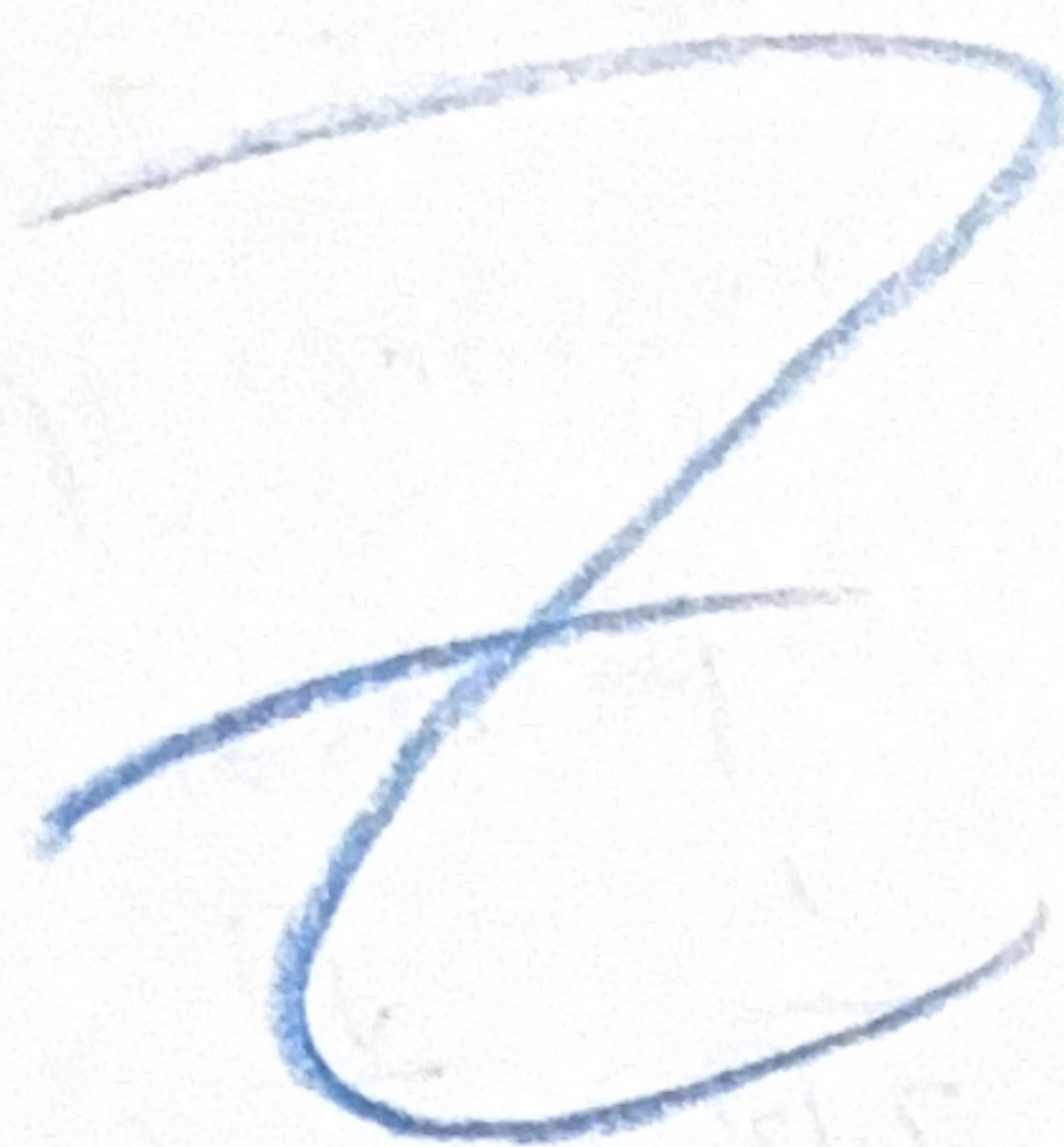
Т.к. точка  $K$  на высоте  $6$  метров, а стена высотой  $2$  метра мы можем подобие треугольничк

Вид сверху



$$\frac{KX'}{X'X} = \frac{\sigma}{2} = 3 \quad \text{р.к}$$

$$\frac{KX'}{X'X} = \frac{H}{h} = \frac{\sigma}{2} = 3$$



Посмотрим на рис 1

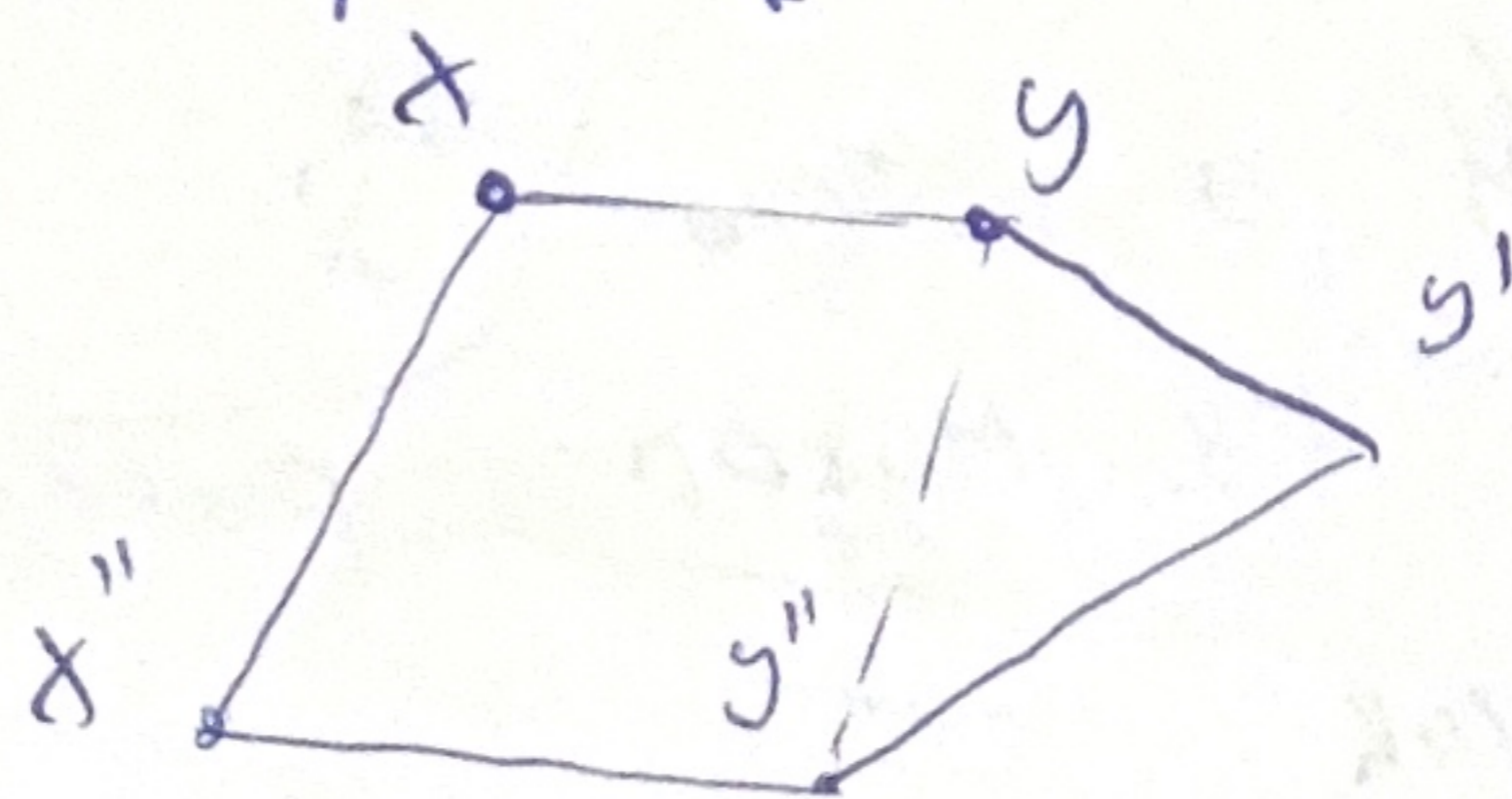
Т.к. стрела движется прямолинейно, то и ось границы текс  $X'Y'$  тоже движется прямолинейно пр. параллельно АВ (параллельный перенос  $X'Y'$  по АВ)

Значит достаточно рассмотреть границы точки А и В и достроить изображение

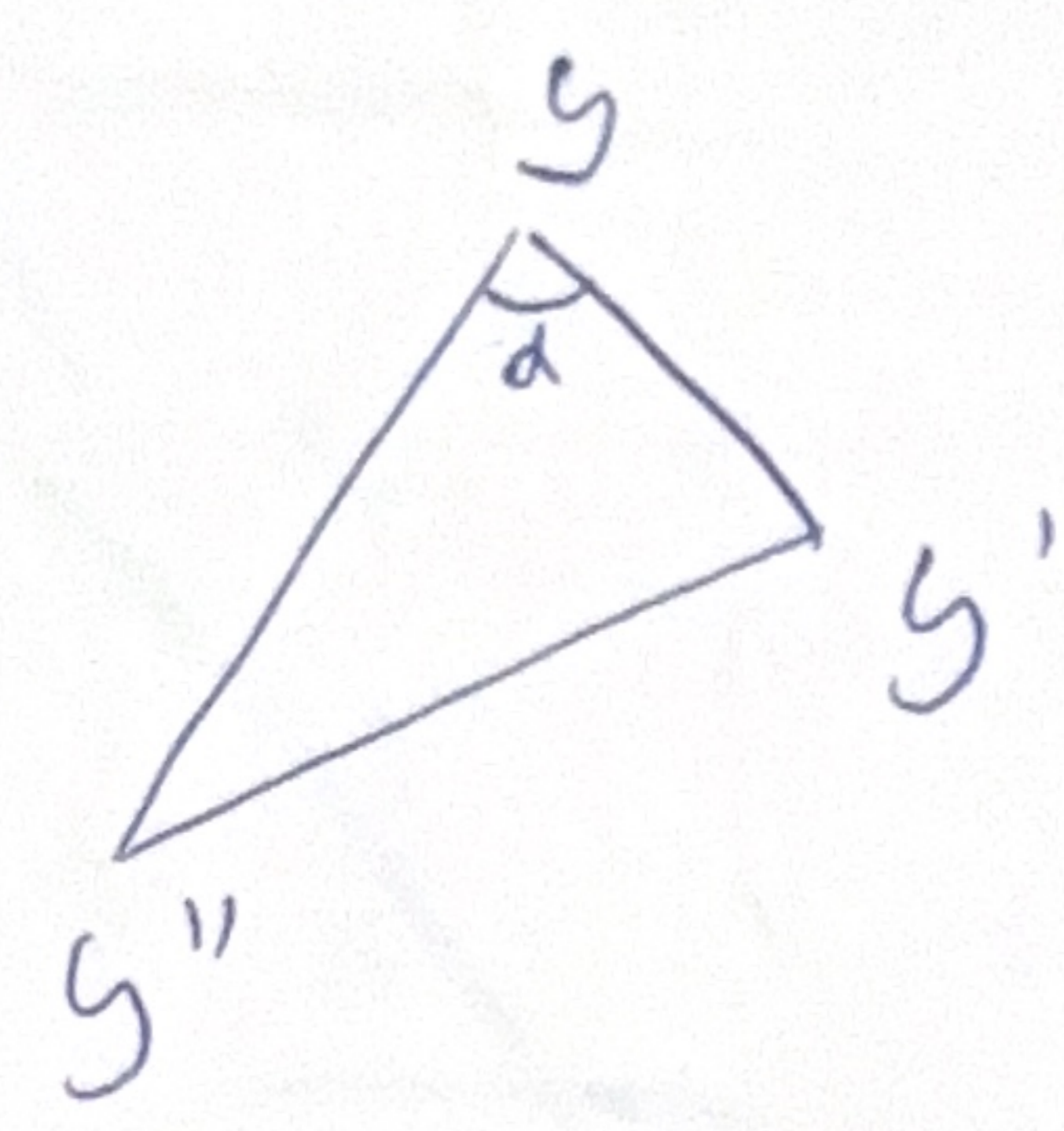
из точки А  $X'(-3,5; -1)$   $Y'(7; -1)$

из точки В  $X'(-3; -4,5)$   $Y'(1,5; -4,5)$

Осталось найти площадь закрашенной фигуры на рис 1



$$S = S_{xyx''} + S_{yy'y''}$$



$$yy' = \sqrt{(7-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{17}$$

$$yy'' = \sqrt{4,5^2 + 4,5^2} = \sqrt{22,5}$$

$$y'y'' = \sqrt{5,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{42,5}$$

$$42,5 = 17 + 22,5 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{22,5} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{99}} = -\frac{1}{\sqrt{170}}$$

$$\sin^2 \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{13}{\sqrt{170}}$$



$$S_{yy'y''} = \sin \alpha \cdot yy' \cdot yy'' \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{170}} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{22,5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{2} \cdot \sqrt{\frac{22,5}{10}} = \frac{13}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} =$$

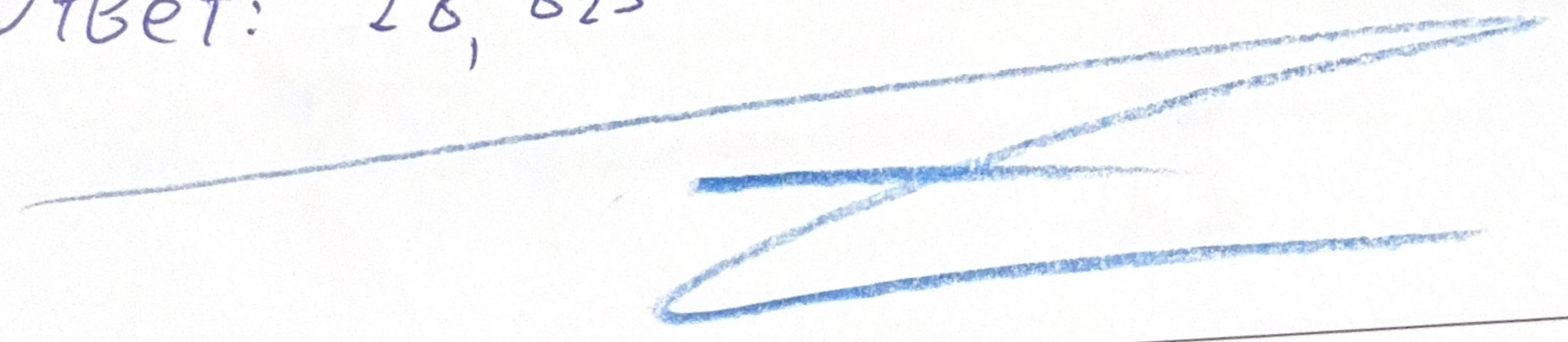
$$\frac{13 \cdot 3}{4} = \frac{39}{4} = 9,75$$

$$S_{xyx''} = \frac{xy + x''y''}{2} \cdot h \quad h = 4,5$$

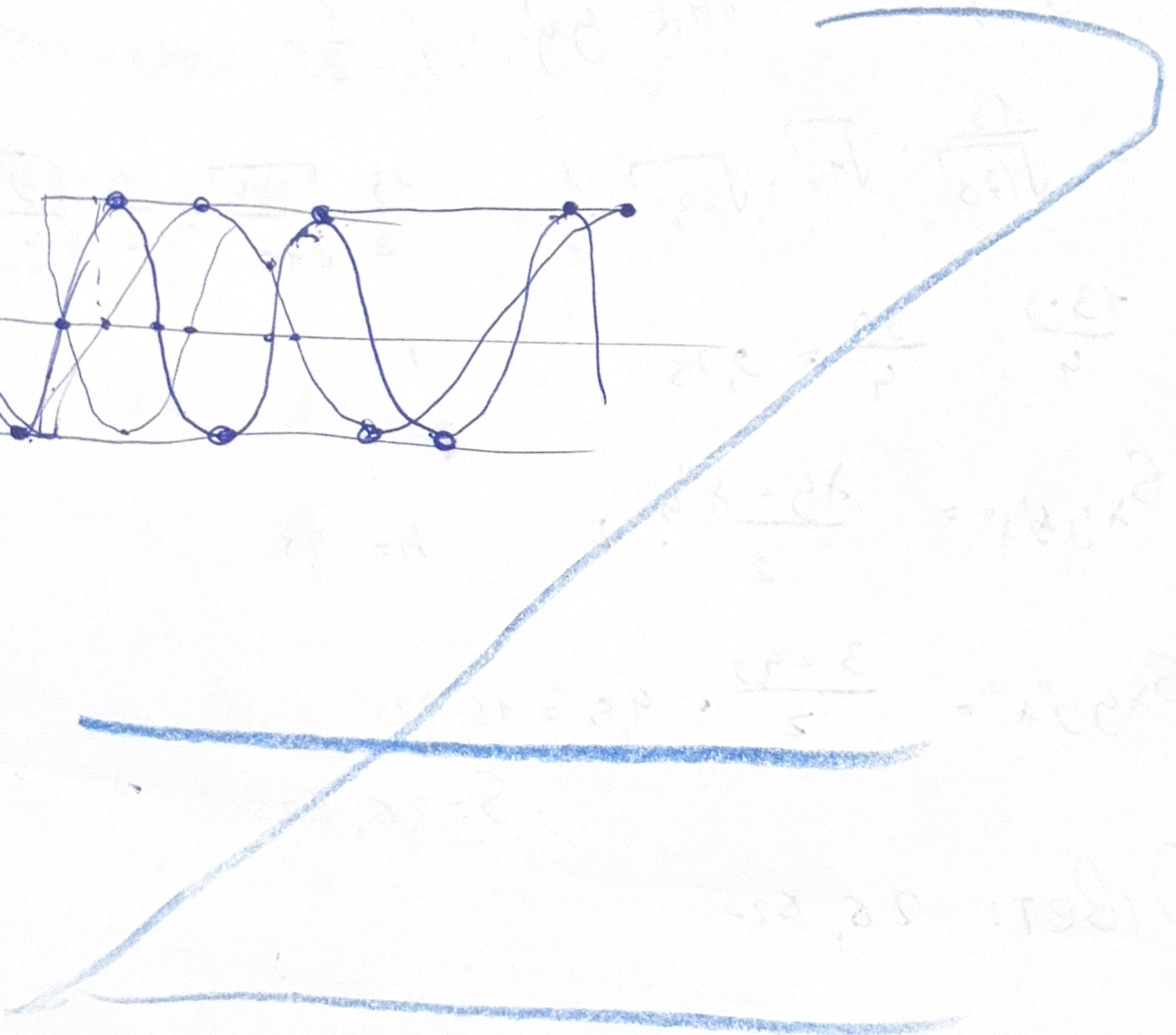
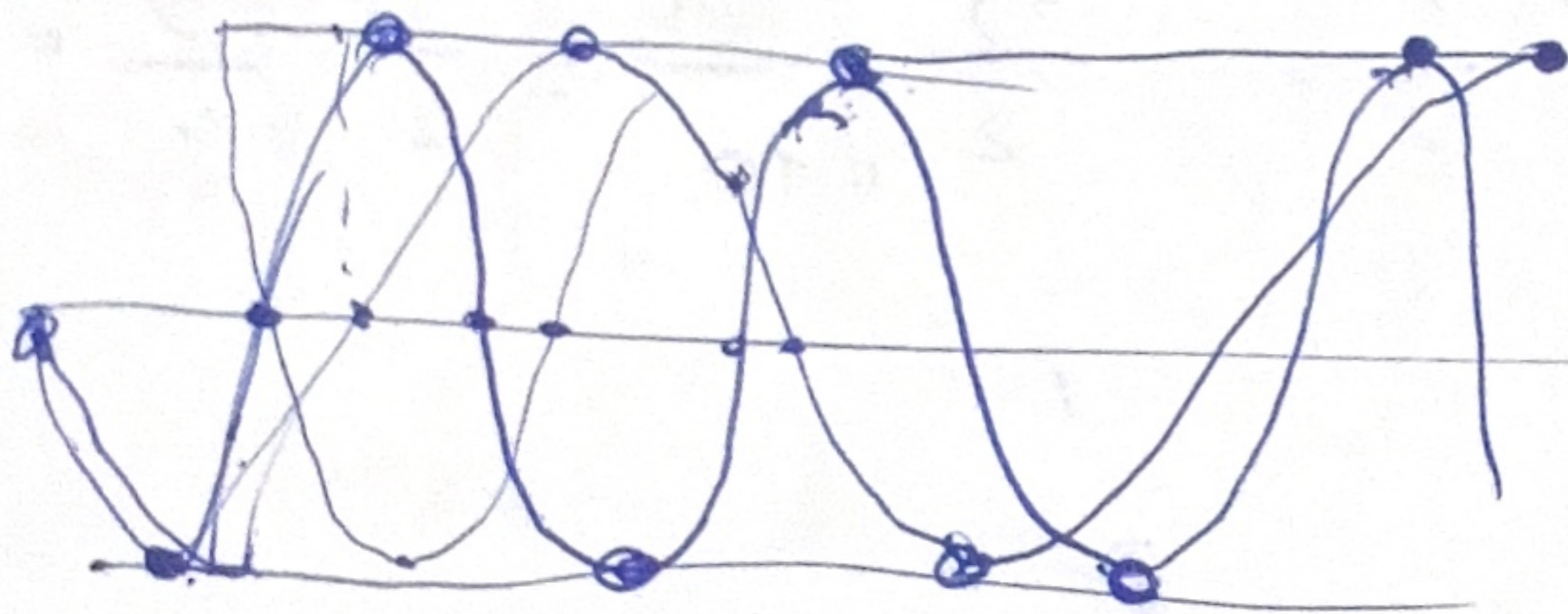
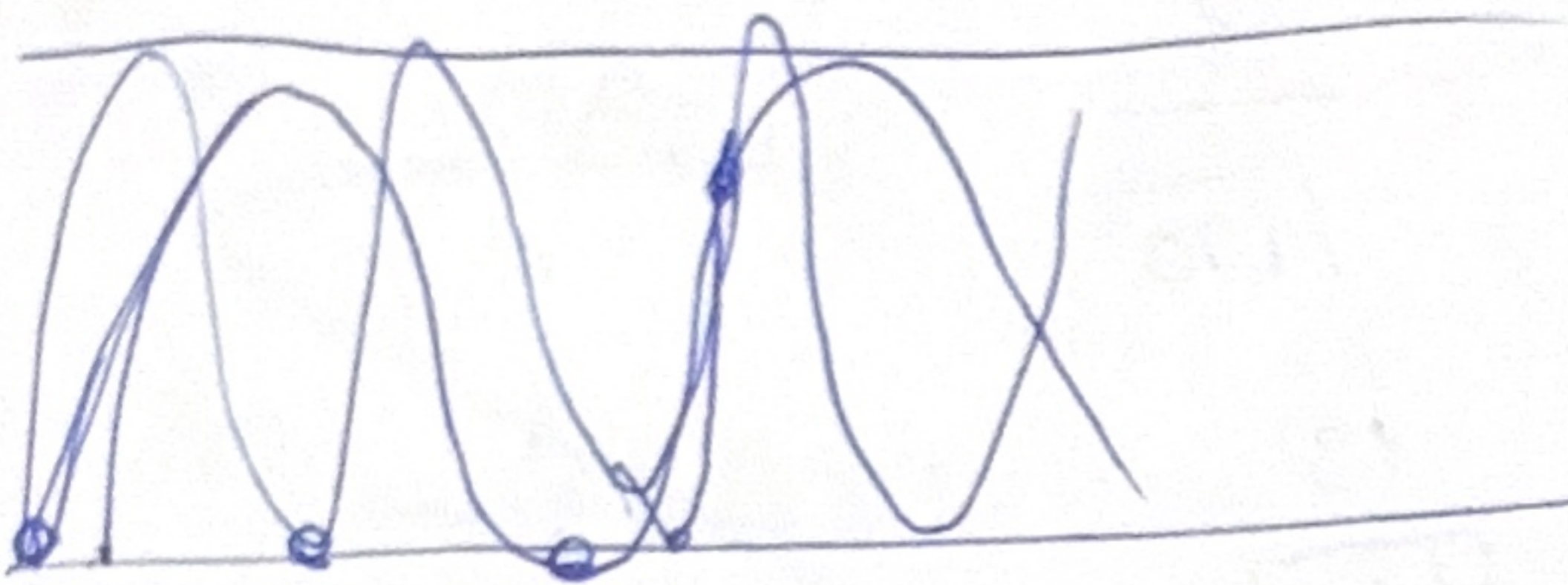
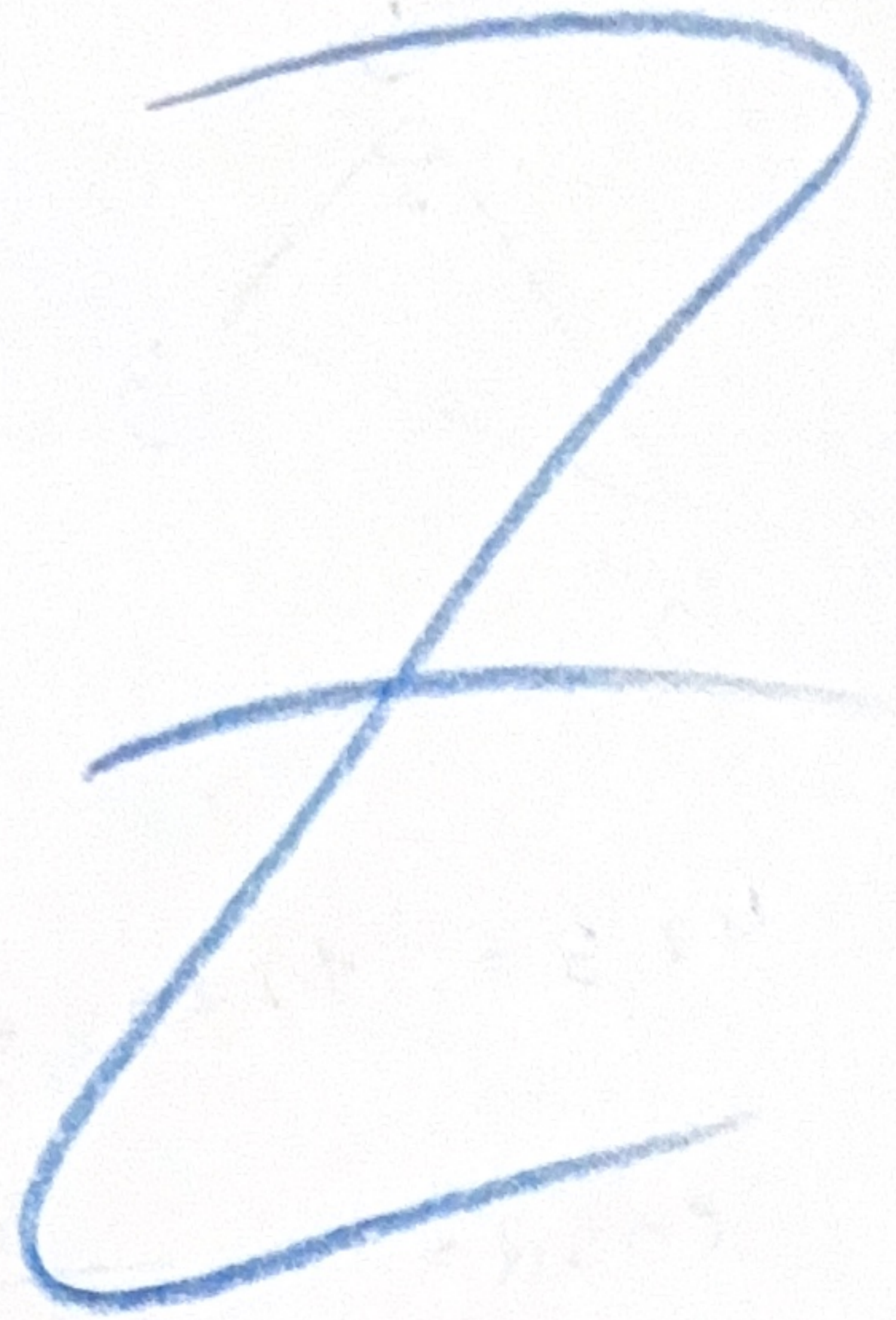
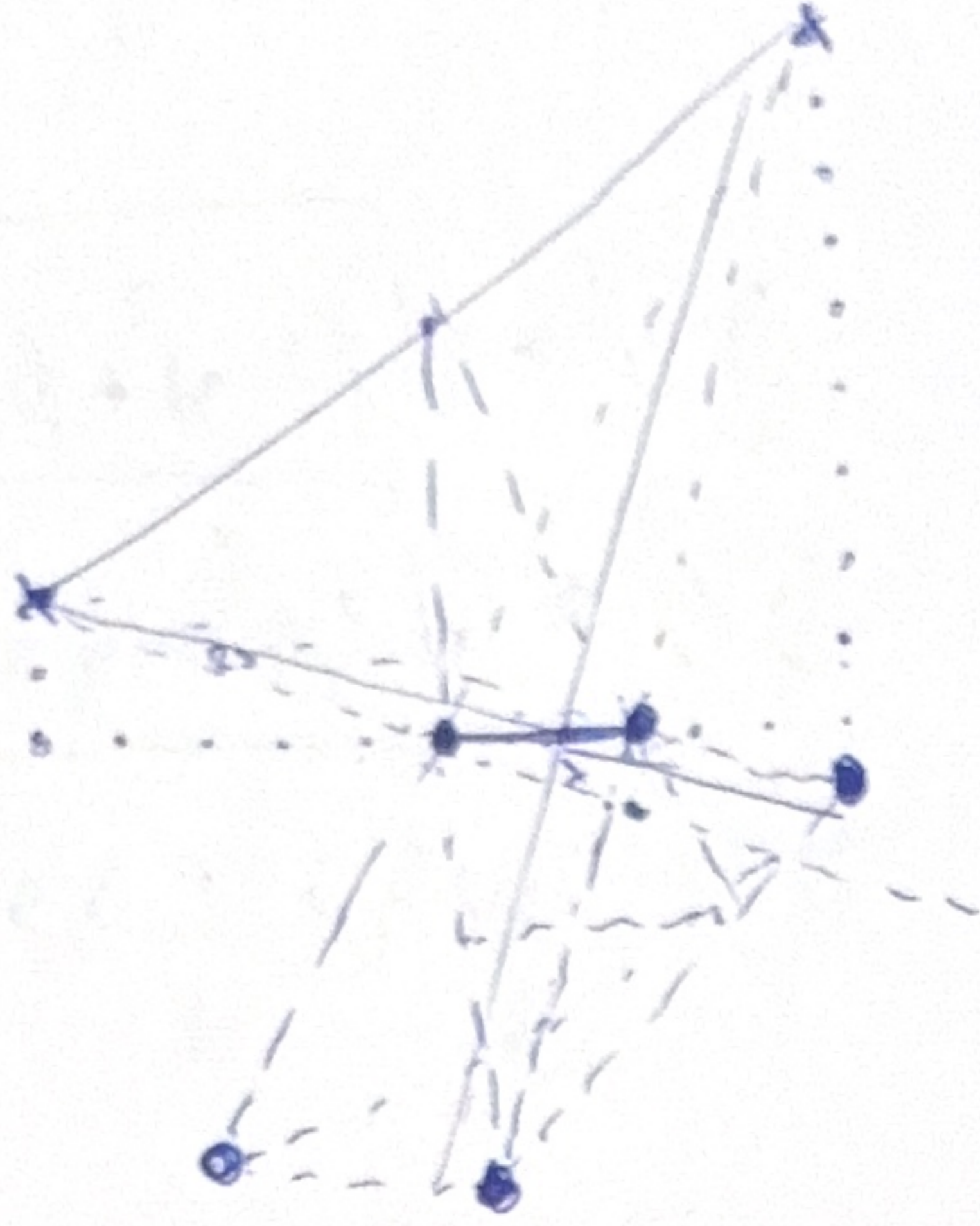
$$S_{xyx''} = \frac{3 + 9,5}{2} \cdot 4,5 = 18,875$$

$$S = 28,625$$

Ответ: 28,625



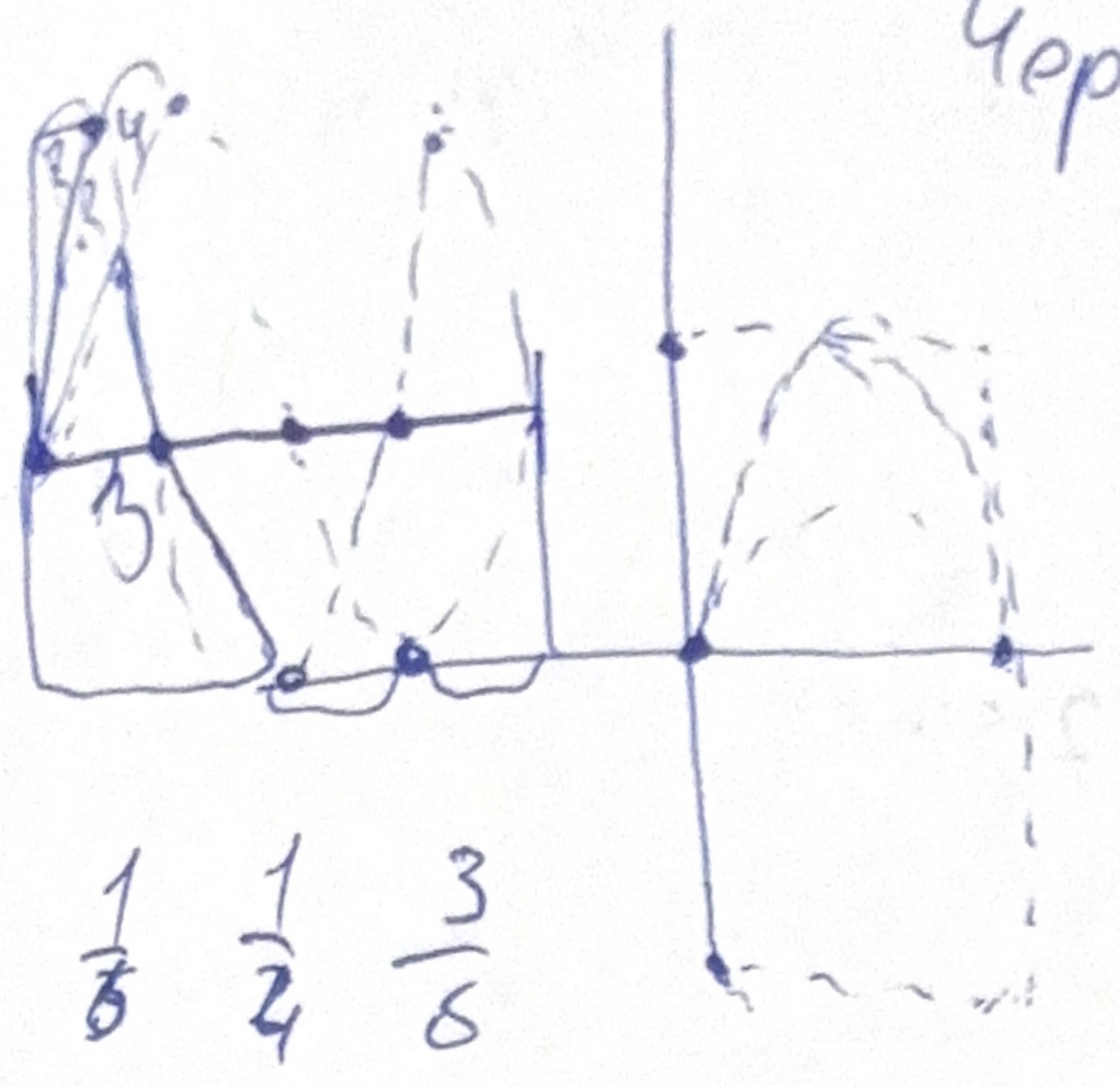
16



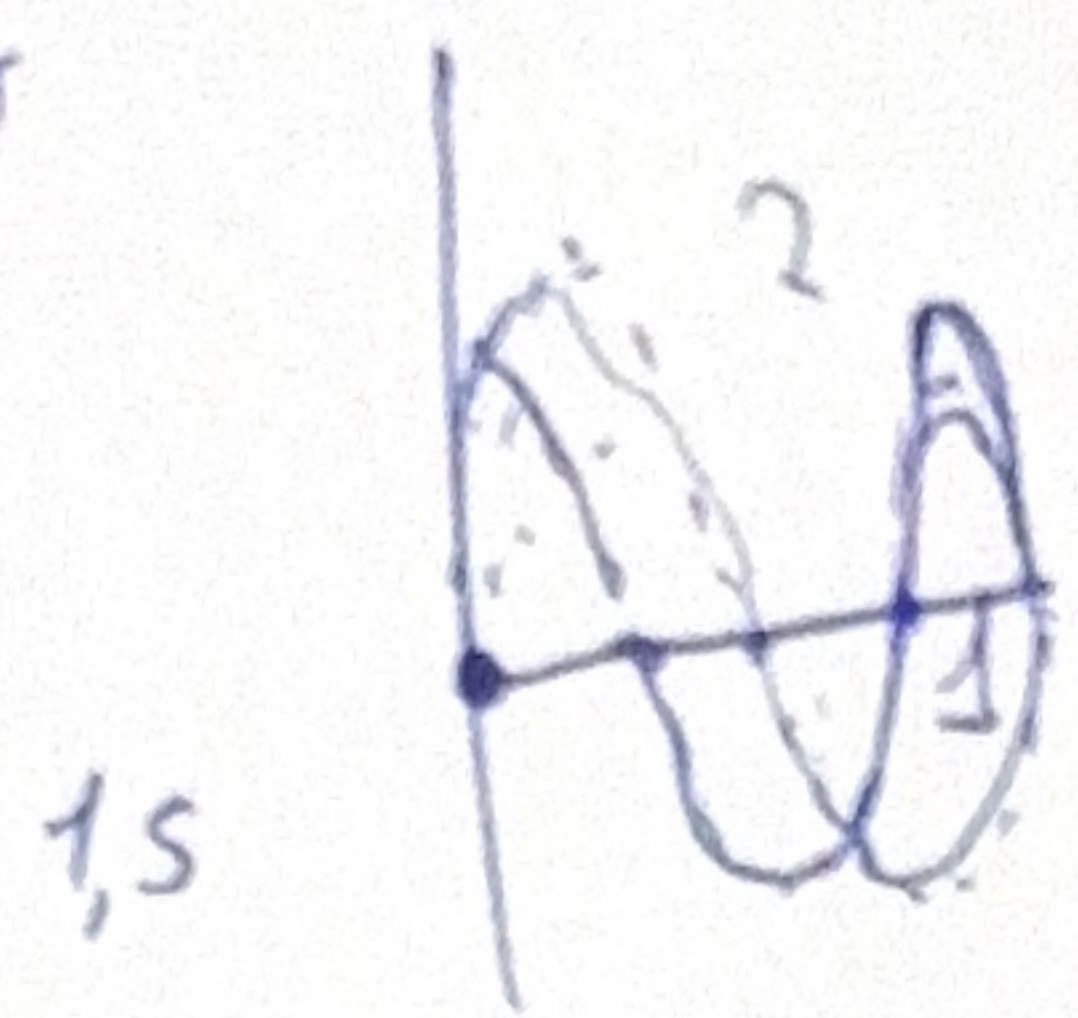
Чертовик

$$y = \sin k\pi x$$

2,3



$\frac{1}{8}$   $\frac{1}{4}$   $\frac{3}{8}$



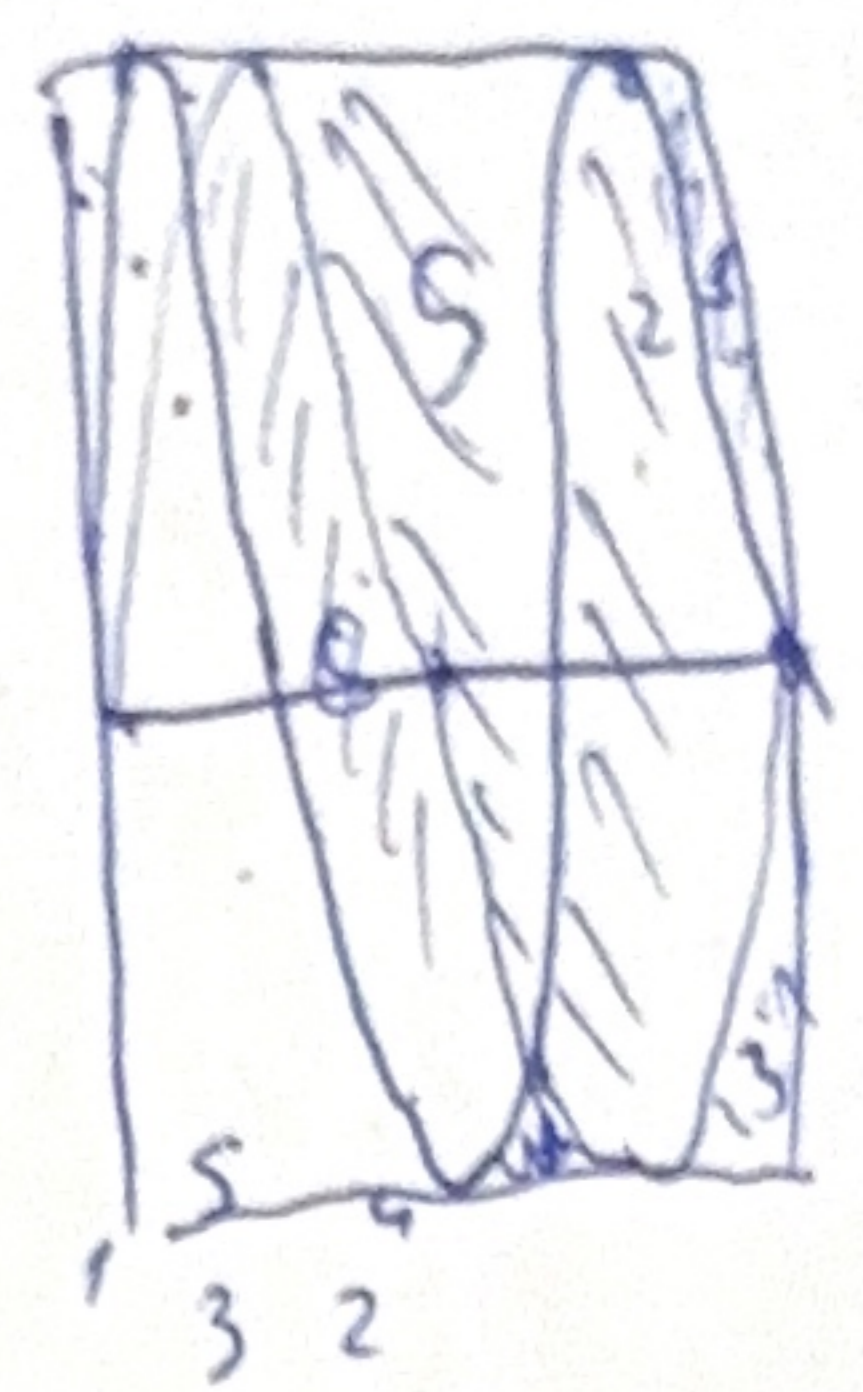
1,5

2,25  
2,25  
2,25

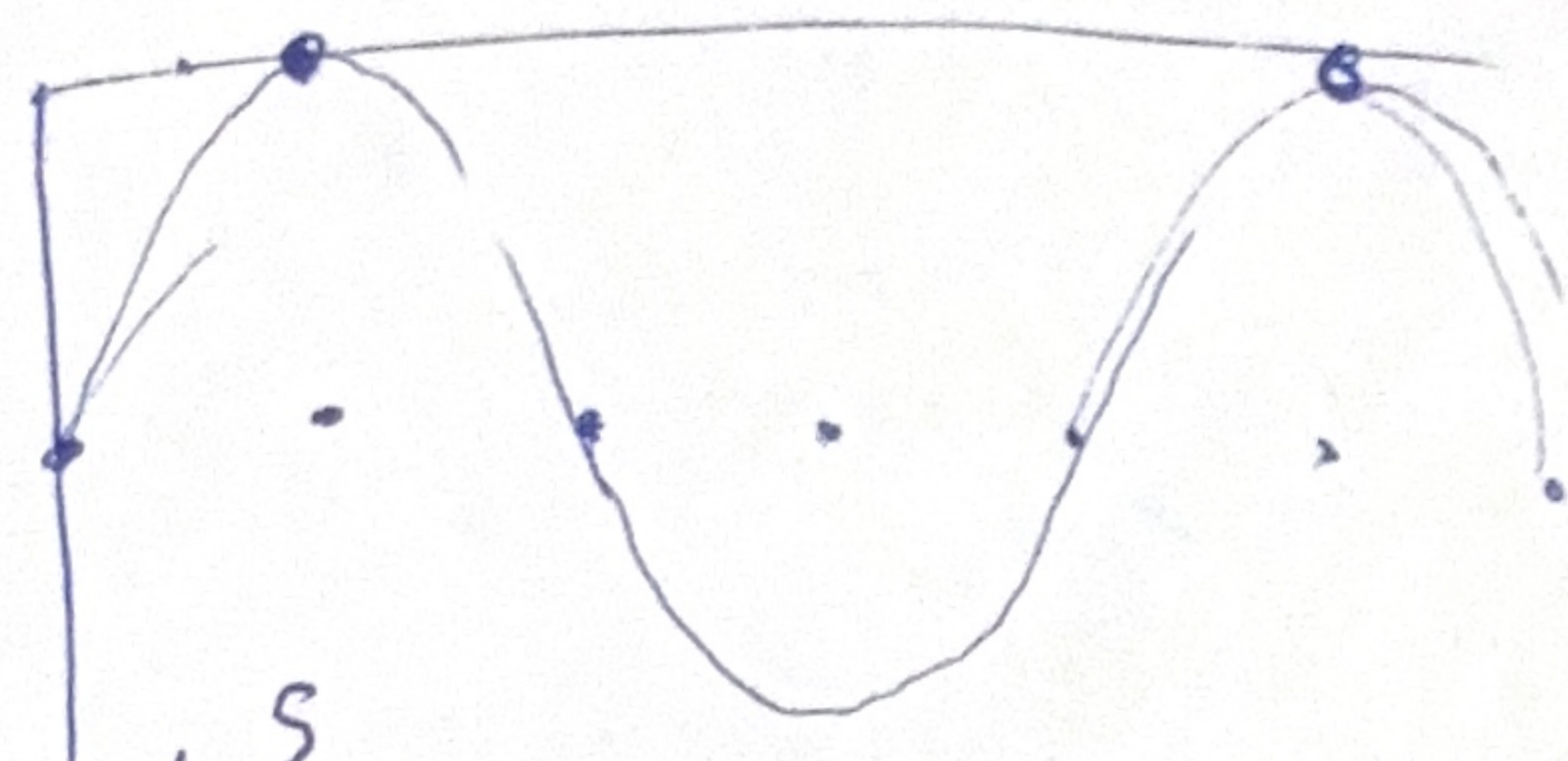
$$\sin 2\pi x$$

$$\sin 5\pi x$$

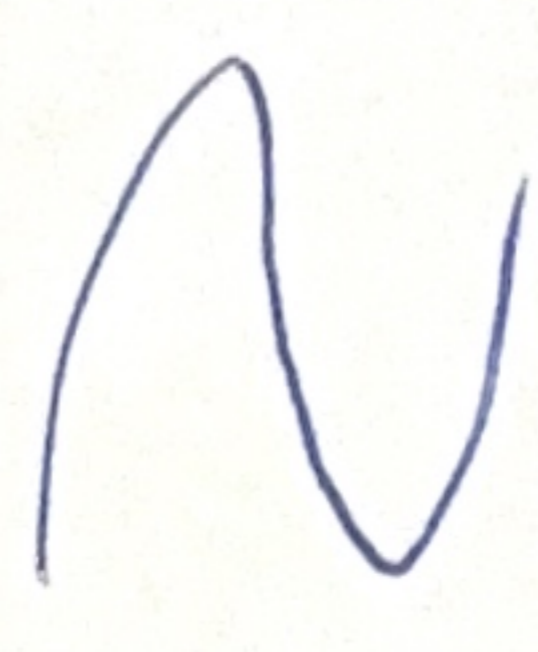
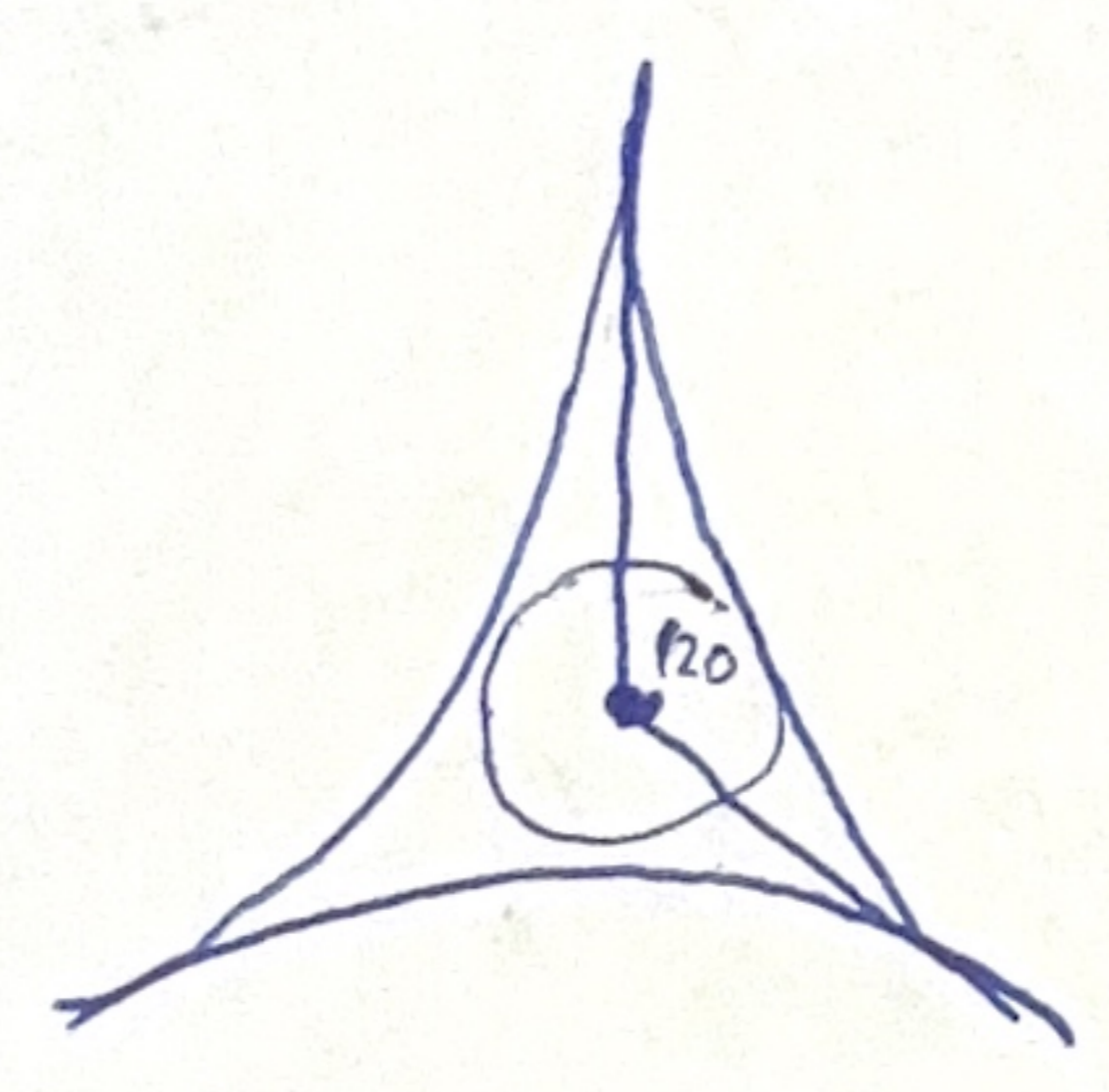
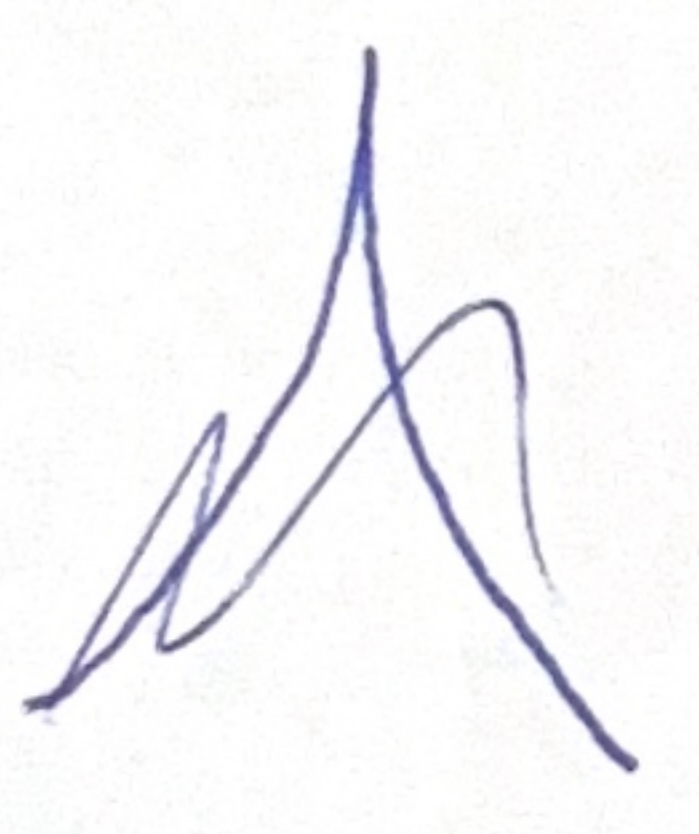
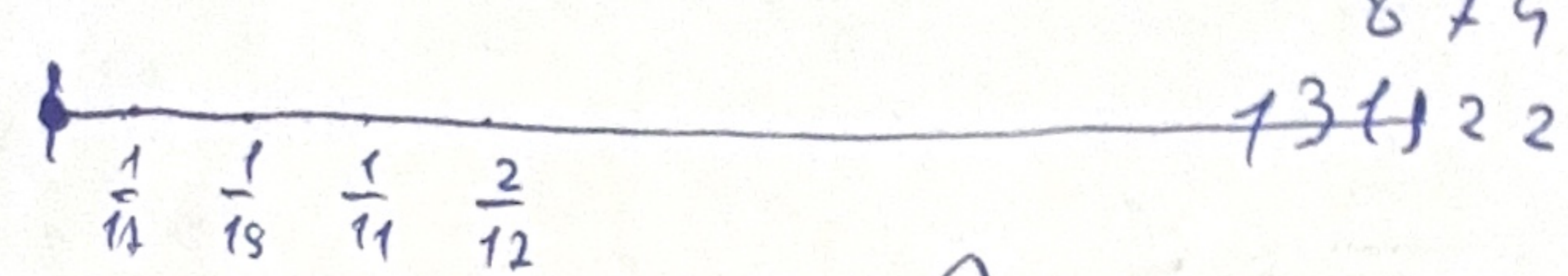
1,1  
2,43  
8,10  
54,8  
170,1



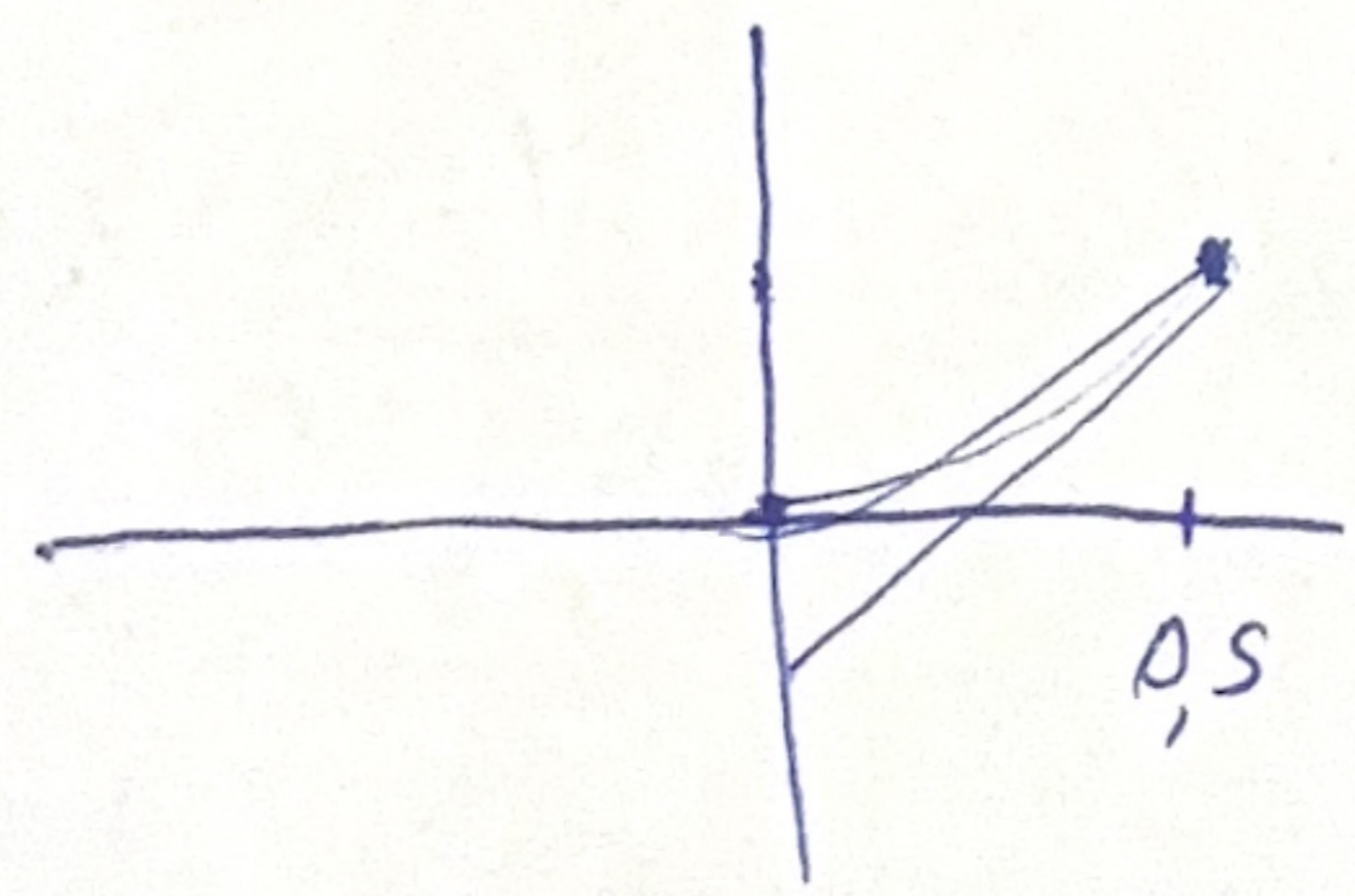
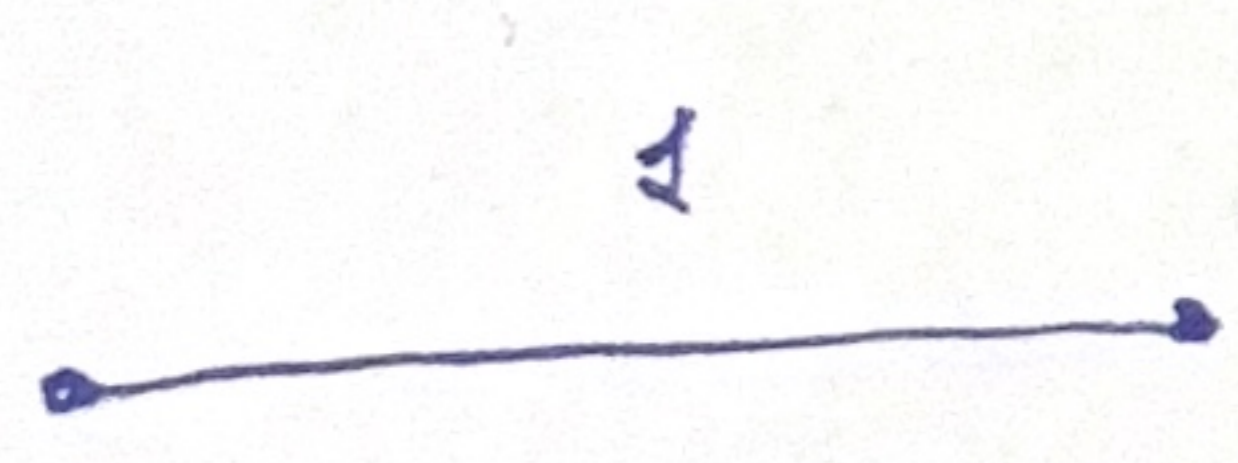
3,2  
21,87  
64  
87,48



1,5  
3,2  
21,87  
64  
87,48  
131,228  
1399,68



30,25  
12,25  
42,5



81  
27  
567  
162  
2187

$$2Cx = \lg 50$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} ?$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\lg 50 = \sqrt{3}$$

$C = \sqrt{3}$   
3,2  
3,2  
37,5  
45  
187,5  
1500  
10,875

3,75  
1  
875  
750  
1625

243 Черновик

1/1

$$\sqrt{6(1 - \cos^2 x)} = 4 \sin x$$

$$6 \left( \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin \cos^2 x} \right) = \sqrt{6 \cos 2x} = 2 \sin 2x$$

$$6 \cos 2x = 4 - 4 \cos^2 2x$$

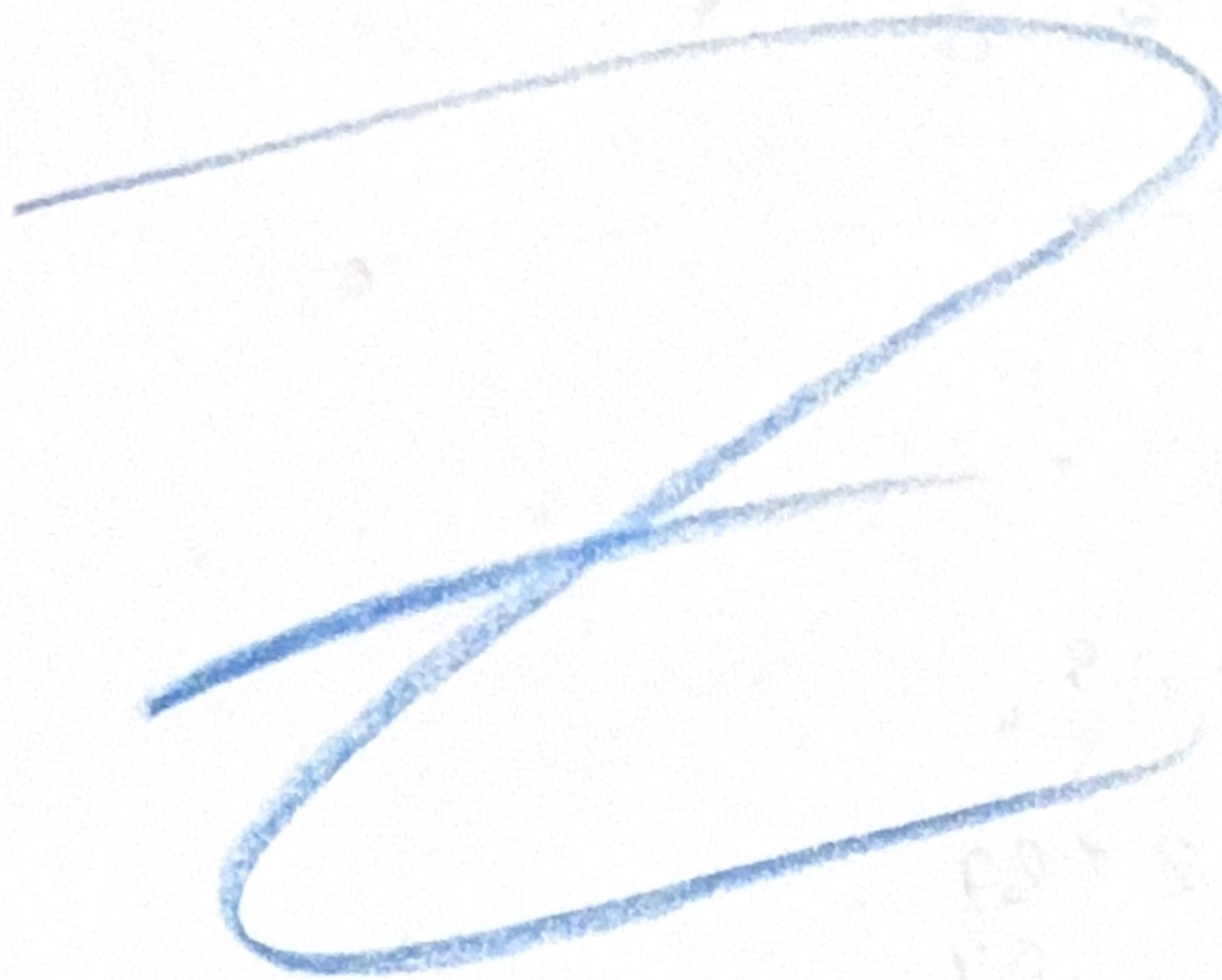
$$4t + 6t - 4 = 0$$

$$2t + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$t_1 = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

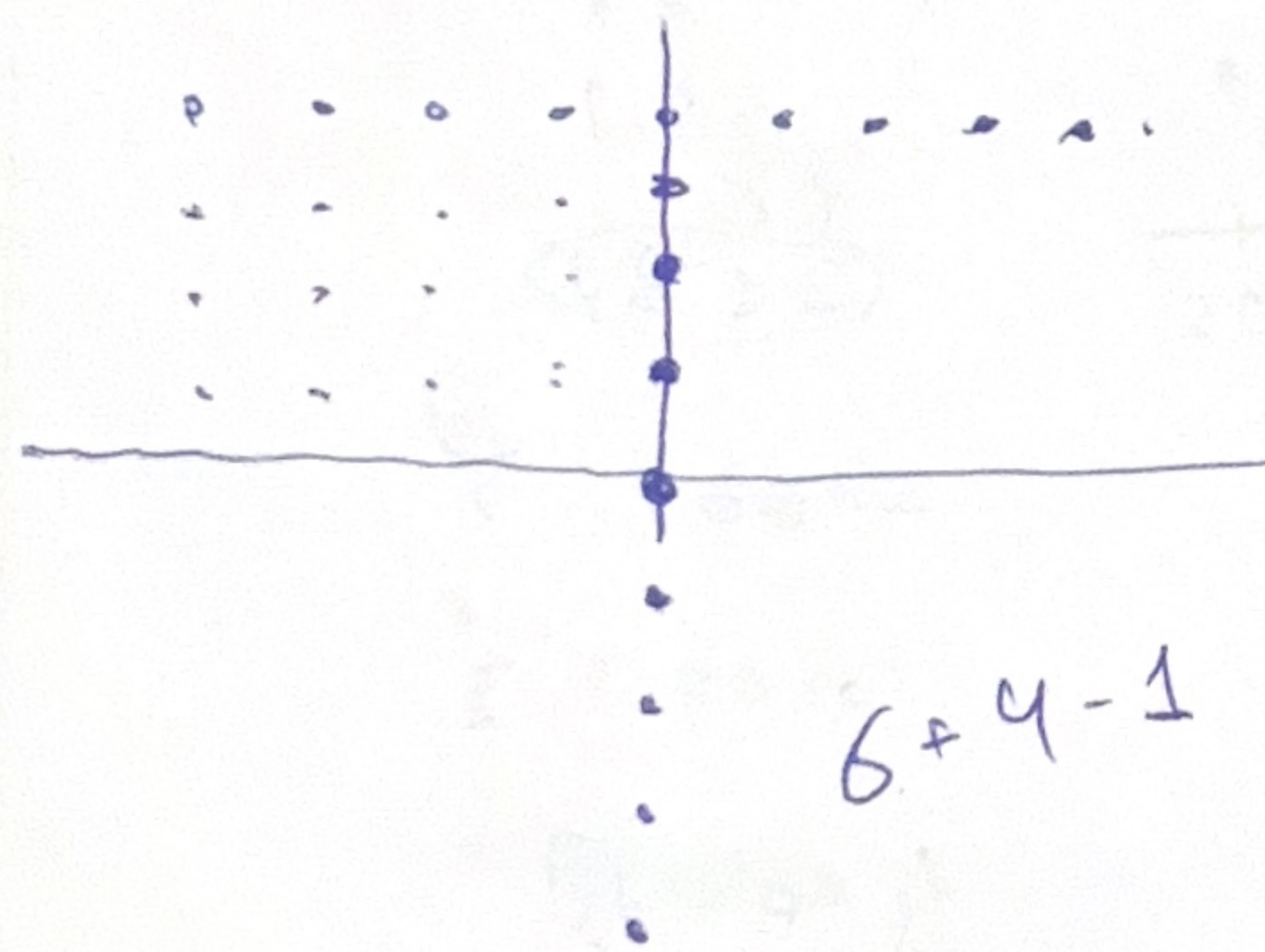
$$t_2 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} - \text{проверьте по 243}$$



1/2

~~462~~ число кратно 81 проверьте по 80 вступу  
около 13 чисел

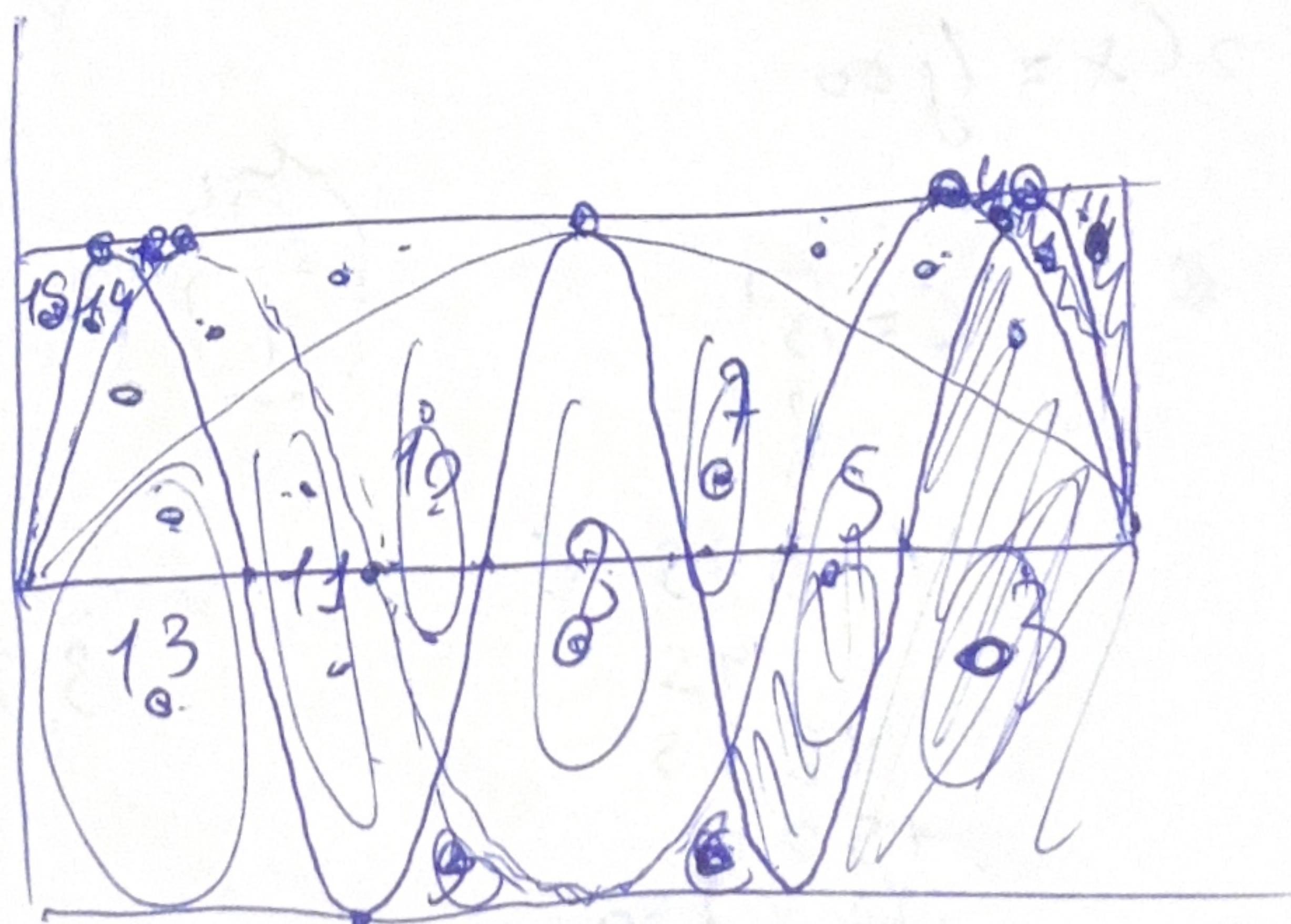
1/3



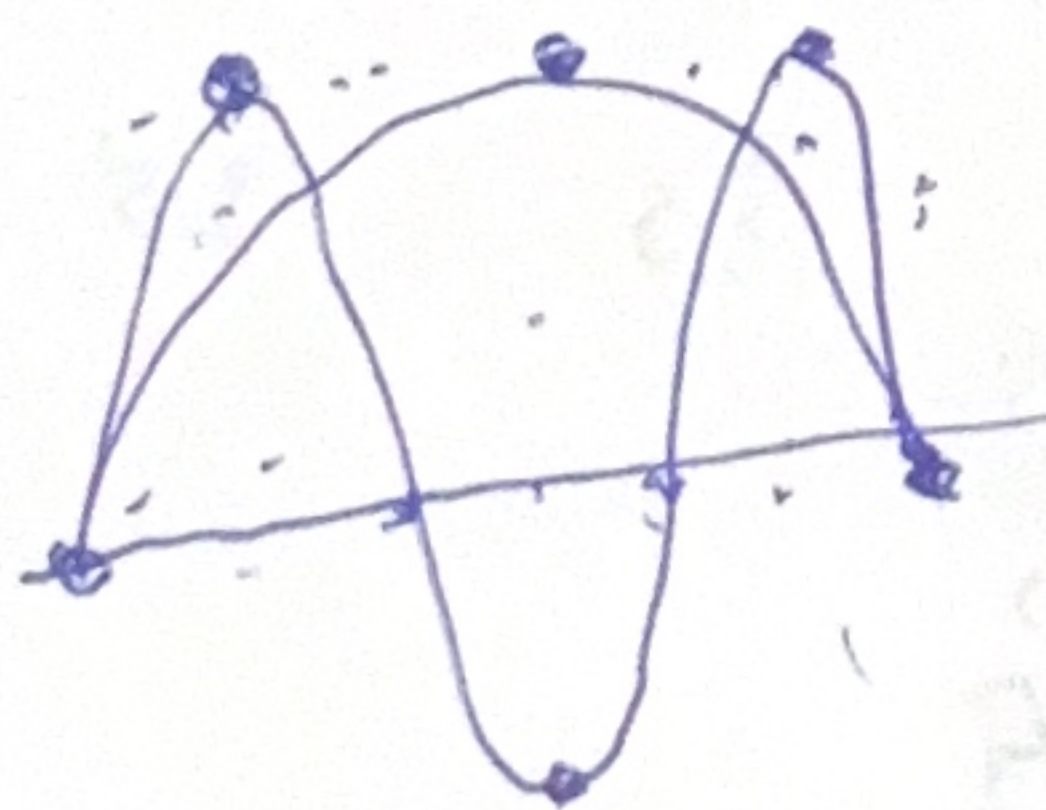
$$6 + 4 - 1$$

$$81 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3$$

$$10 = 6 +$$



1/4

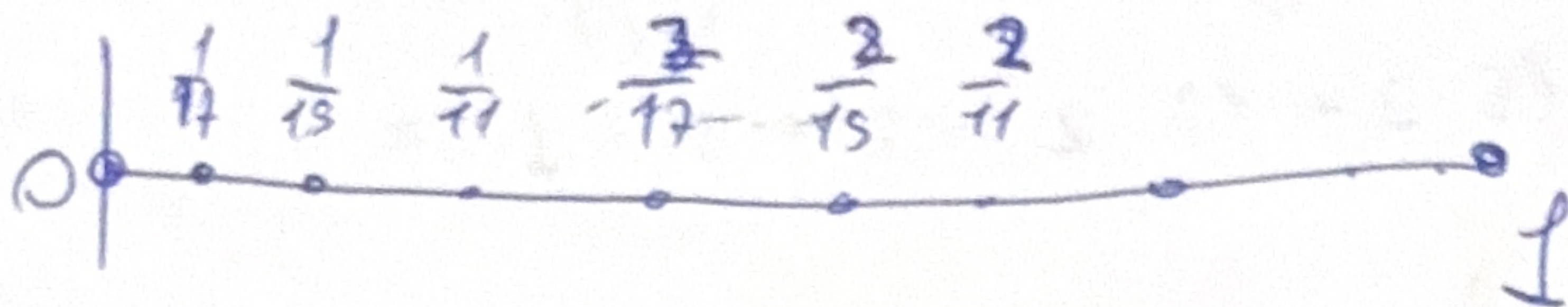


22-02-49-14  
(1248)

№4

Лист 10

Показать точки пересечения с  $Ox$

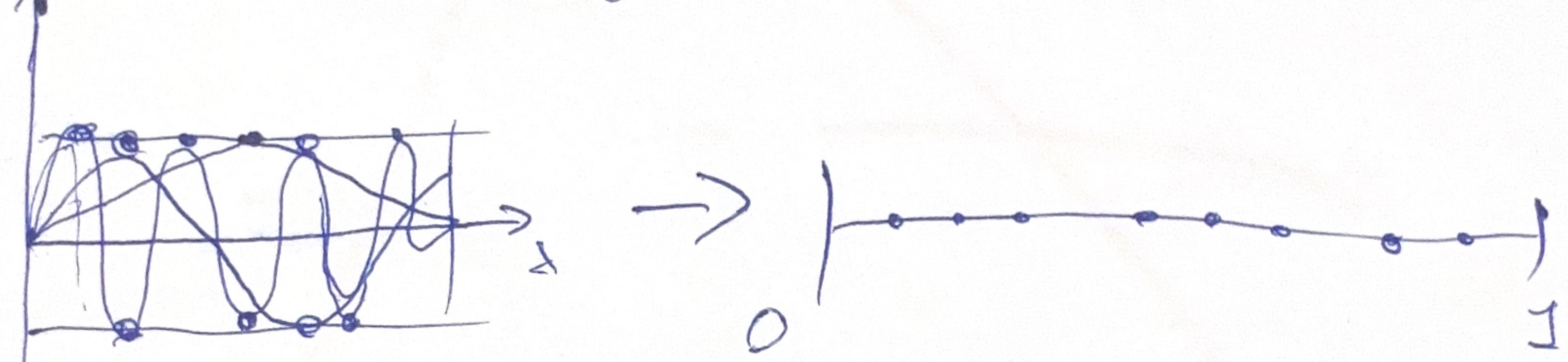


Как неважно в каком порядке они  
расположены точки пересечения  
графиков с  $Ox$  не совпадают т.к.

~~11; 15; 17~~ взаимно просты (кроме точки  $(0,0)$ )

Расположим точки касания графиков с  
прямыми  $y=1$   $y=-1$  на прямой  $Ox$

т.е. мы получим что-то такое



Все эти точки различны и т.к.  
из-за взаимной простоты 11; 15; 17

Всего этих точек  $11 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 17 \cdot 2 - 2 + 1$  (повер в  $Ox$  (точка 0))

~~не считая точку~~

Все эти точки как-то расположены  
на прямой количество областей это  
количество промежутков между точками

т.е.  $11 \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 17 \cdot 2 - 2 + 1 - 1 =$

$$2(11 + 15 + 17 - 1) = 84$$

Ответ: 84

Лист 11