13:57 - 14:00 Баурова

0 167769 750000

16-77-69-75

(128.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Орловского Евгения Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

16-77-69-75 (128.8)

Черновик

$V=abc$ $a>b>c$

$2(ab+bc+ca)$

$4(a+b+c)$

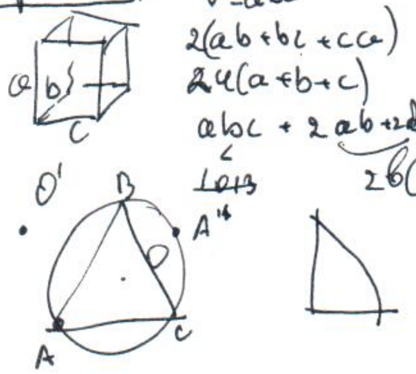
$abc+2ab+2bc+2ca+4a+4b+4c=2026$

$2b(a+c)+4(a+c)$

$\sin\uparrow;\ \cos\downarrow$ $(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+x)(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-x)$

$\operatorname{tg}x\uparrow$

$\operatorname{tg}(x)\cdot\operatorname{tg}(y)\Rightarrow\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})\cdot\operatorname{tg}(x+y-\frac{\pi}{6})$

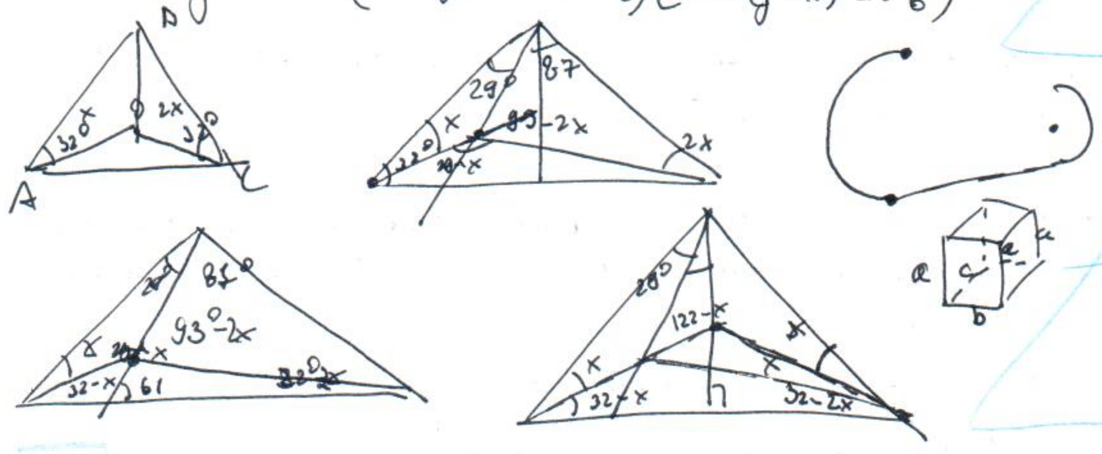


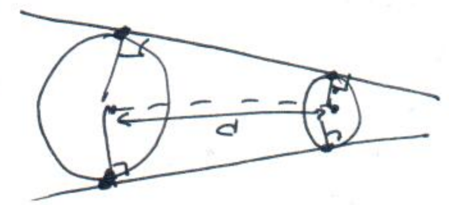
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})\cdot\operatorname{tg}(x+y-\frac{\pi}{6})=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})\cdot\frac{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})}{1-\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})}$

$\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z}$ $\frac{\sin(\frac{\pi}{6})\cdot\sin(y+x-\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})\cdot\cos(y+x-\frac{\pi}{6})}$

$\sin x\cdot\sin y\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cancel{(\cos^2(y+x)+\sin^2\frac{\pi}{6})}(\cos(y+x)\cdot\cos\frac{\pi}{6})$





$a\cdot b\cdot c\ \cancel{=2(ab+bc+ac)}$

$\cancel{=4}$

$c=1$

$\cancel{abc+ab+ab+bc+bc+a+a+a+a}$

2016 2026 $\cancel{1013}$ $8\cdot8\cdot8$

$64+64+64$

$a>b>c$

$c=1\Rightarrow$ $ab+2ab+2b+2a+4+4a+4b=2026$

$3ab+6b+6a=2022$ $\quad 2022:3=674$

$abc+\cancel{ab+bc}$ $ab+2b+2a=674$

$c>1$ $ab+2b+2a+4=678$ $\quad 678:3=226,\ 226:2=113$

$\cancel{4ab+8a+8b}$ $(a+2)(b+2)=678$

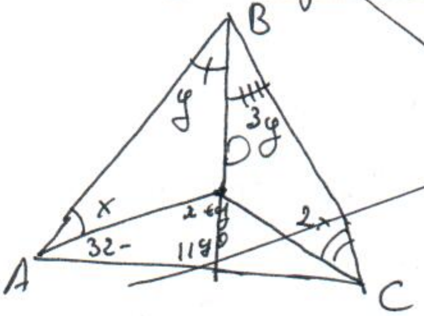
$(2+n)ab+(2n+4)a+(2n+4)b=2026-n$ $\quad a=4;\ b=111$

$(2+n)\cdot a(b+2)+(2n+4)(b+2)=2026-n+3n+8$

$(b+2)(a(2+n)+(2n+4))=2034+3n$

Страница №3 из 7

Чистовик | Задача №6 |



$\angle A = \angle C = 32^\circ$

$\angle BAD = x$, тогда $\angle BCD = 2x$

$\angle ABD = y$; тогда $\angle DBC = 3y$

$\angle ABD + \angle DBC = 4y = \angle ABC = \angle B =$

$= 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$

$y = \frac{116^\circ}{4} = 29^\circ$

Задача №1 |

Пусть a – длина; b – ширина; c – высота

БОО: $a > b > c$, тогда пусть $\Rightarrow$ $c = 1$; значит

$ab + 2(ab + a + b) + 4(a + b + 1) = 2026$

$3ab + 6a + 6b = 2022$

$ab + 2a + 2b = 674$

$ab + 2a + 2b + 4 = 678$

$(a+2)(b+2) = 3 \cdot 2 \cdot 113$ ← простое

$b + 2 \neq 2$, т.к. $b > 0$; $b + 3 = 2$, т.к. $b > c = 1 \Rightarrow b + 2 = 6$ (т.к. $a + 2 \neq 2$; $a + 2 \neq 3$,

a $a + 2 > b + 2 \Rightarrow a + 2 = 113$) $\Rightarrow b = 4$; $a = 111$; $\Rightarrow abc = 444$

– min объем.

Пусть не так, тогда сущ. объем $< 444 \Rightarrow c \geq 2$, $b \geq 3$, $a \geq 4$

(т.к. для $c = 1$ мы док. что мин. объем 444, то для объема

~~в при~~ < 444 : $c \geq 2$)

$abc < 444$; $ab < 222$; $ac < \cancel{150}\ 148$; $bc < 111$

$abc + 2(ab + bc + ca) < 444 + 2(222 + 148 + 111) = 444 + 2(370 + 111) =$

$= 444 + 2 \cdot (481) = 444 + 962 = 1406$

Значит $4(a + b + c) > 2026 - 1406 = 620$

$a + b + c > 155$, тогда т.к. ~~$a \cdot b \cdot c = (155 - b - c) b \cdot c =$~~

~~$\pm$ min пусть c – const, тогда min $a + b\,ab$, при $b \geq 3$~~

~~≥ 15~~ Если $a > 100$, т.о. $bc \geq 6 \Rightarrow abc > 600 \Rightarrow$ ~~abc~~ ?!

Если $a < 100$, то т.к. $a \geq 52$, то $b + c > 56$, $\Rightarrow$ min

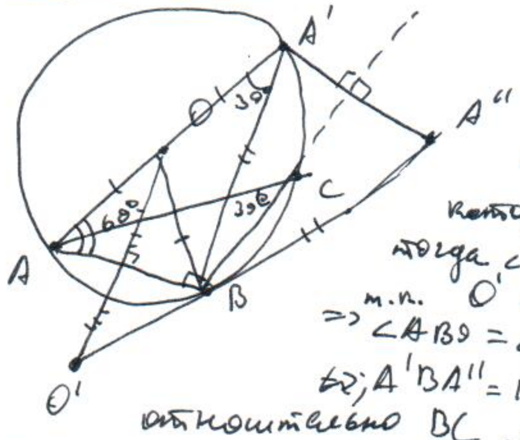
$(bc) = \cancel{56}\ 56 \Rightarrow abc \geq 52 \cdot 56 > 444 \Rightarrow$?!

Тогда противоречие и min $abc = 444$

Ответ: 444.

16-77-69-75 (28.8)

Задача №3 | |Чистовик|



Заметим, что $OA = OB = OA'$, тогда $\angle ABA' = 90°$

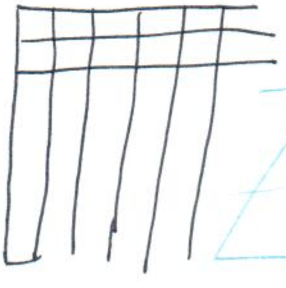
$\angle AA'B = \angle ACB$, как впис. углы, которые опираются на одну хорду, тогда $\angle A'AB = 60° \Leftrightarrow \triangle AOB$ – равносторонний $\Rightarrow$ т.к. O' симм. O отн. AB, то $\triangle AOB = \triangle AO'B$ $\Rightarrow \angle ABO = \angle ABO' = 60° \Rightarrow$; $O'BA'' = 180° \Leftrightarrow$; $A'BA'' = 180° - 60° - 90° = 30°$; т.к. A'' симм A' относительно BC, то $\triangle A'BA''$ – р/б, причем BC – медиана, биссектриса, тогда $\angle A'BC = \angle CBA'' = \frac{30°}{2} = 15°$

$\angle B = 90° + 15° = 105°$

Ответ: ~~H~~ $105°$

Задача №2 |

Т.к. квадрат занумерован, то перевернув у нас получится другой вариант разбиения. Заметим, что вырезать из квадрата ~~100~~ 101×101 прямоугольник размером $n\times m$ $(n<101, m<101)$ можно $2\cdot(\cancel{10}\,204-m-n)-4$ раз. Докажу это:



Заметим, что из условия следует, что наш прямоугольник должен соприкасаться со стороной нашего изначального квадрата $(n<101, m<101)$, тогда с верхней стороной он это может сделать $102-n$ раз, с левой $102-m$, с нижней $102-n$, с ~~верхней~~ правой $102-m$, и ещё 4 раза нужно вычесть (угловые прямоугольники)

Заметим, что вырезать прямоугольник $101\times m$, где $m\neq101$ можно 2 раза, а где $m=101$ – 1 раз (выполняя ~~2-ой~~ 1-ый пункт условия, что квадрат не должен рассыпаться)

Тогда всего вариантов: $(2\cdot(204-m-n)-4) - 100\cdot100$, где все m, n ~~встречаются~~ от 1 до 100 встречаются ровно 100 раз; $2\cdot204\cdot100\cdot100 - \frac{100\cdot101}{2}\cdot2\cdot100 - \frac{100\cdot101}{2}\cdot2\cdot100 - 4\cdot100^2 = 408\cdot100^2 - 2\cdot100^2\cdot101 - 4\cdot100^2 = 100^2 = (408-202-4)\cdot100^2 =$
$= 202\cdot100^2$, а ещё есть 200 вариантов по 2 вырезания и 1 по одному: $2020000 + 200\cdot2 + 1 = \underline{2020401}$

Ответ: 2020401

Страница №3 из 7

Чистовик | Задача №4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

1) $a > 1$, значит $\log_2 a > 0$, значит

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0$

$a^{2(x-1)}-3a^{x-1}+2 \geq 0$

$a^{x-1}=t$; $t^2-3t+2 \geq 0$

$(t-2)(t-1) \geq 0$

$t \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$

Значит $a^{x-1} \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$

т.к. $a > 1$, то x может принимать бесконечное кол-во значений таких что $a^{x-1} \geq 2$ значит не существует таких $a>1$, что ~~вольномо~~ отрезок из x-ов был по длине равен 2026

2) $a \in (0;1)$, значит $\log_2 a < 0$, значит

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0$

$t^2-3t+2 \leq 0$

$(t-2)(t-1) \leq 0$

$t \in [1;2]$

$a^{x-1} \in [1;2]$; $a^{x-1}=1$, значит $x=1$, ~~тогда если существует такое a, что множество решений нер-ва составляет полоска~~ Заметим, что при $x > 1$ $x-1 > 0 \Rightarrow a^{x-1} < 1 \Rightarrow$?!

тогда $x \leq 1$, значит чтобы полоска до принимала вид отрезка длиной 2026, то нужно, чтобы при $x=-2025$

$a^{-2026}=2$; $\frac{1}{a^{2026}}=2$; $a=\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

Тогда решение параметра

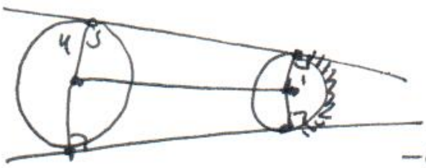
$a=\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

Ответ: $\sqrt[2026]{\frac{1}{2}}$

16-77-69-75 (128.8)

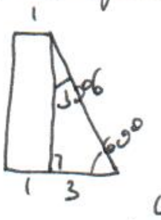
Чистовик | №1 |

Заметим что двигаясь по прямым линиям наша

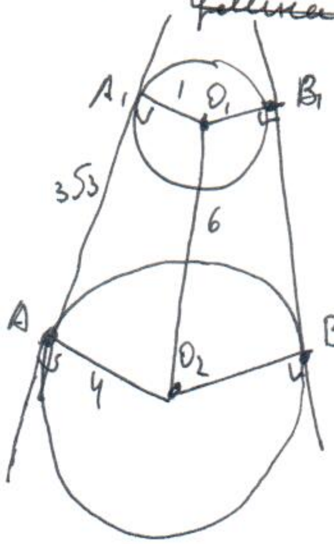


газонокосилка сбрасывала траву прямыми линиями, а двигаясь по дуге окружности — дугой окружности радиус которой ~~отличался~~ был другой: Двигаясь по большей окружности радиус окружности на которой лежала трава — 2,5; меньшей — 0,5

Найдем длины прямых линий и ~~длины~~ меры дуг по которым ездила газонокосилка



Из картинки наша трапеция прямоугольная с углом $60^\circ \Rightarrow$ длина прямой линии $3\sqrt{3}$; ~~Тогда длина мера дуги меньш. окр. = 120°,~~ ~~длина травы~~,



$\angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle AO_2B = 120^\circ = \angle AO_1B$, тогда длина дуги, по которой останавливалась трава с меньшей окружности: $0,5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Аналогично с большей окружности: $\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5\pi}{3}$

Тогда длина всей линии травы:

$\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{11\pi}{6} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11\pi}{6} + 6\sqrt{3}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

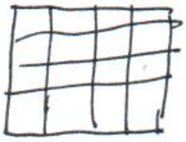
Черновик! $abc < 444$

$c \geq 2 \Rightarrow$ $\underbrace{abc}_{<444} + 2(\underbrace{ab}_{<222} + \underbrace{bc}_{<150} + \underbrace{ac}_{<111}) + \underbrace{4a+4b+4c}_{} = 2026$

$b \geq 3$

$a \geq 4$

$4(a+b+c)$



$\cancel{<555}$ 333

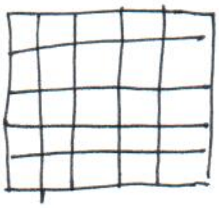
n^{4+101} $2 \cdot 3$ 483 $a+b+c \geq 150$ 616

$1000 - 34 + 444 = 1410$ $a \geq 75$

$\cancel{4-n}\ \cancel{5-n} = (5-n) \cdot (5-m) \cancel{-4}$ $2(10-n-m)-4$

$25 - 5n - 5m + mn - 4$

$= 21 - 10 - 15 + 6$ $20 - 2n - 2m - 4$



$6 = 4 \cdot 3 - 4$

$2(204 - n - m) - 4$

$\cancel{101}$

$101 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 204$ $-$ $202 \cdot n$ $-202m$

$202 \cdot \frac{k \cdot 102 \cdot 101}{2} - \frac{102 \cdot 101 \cdot 202}{2} - 4 \cdot 101 \cdot 101$

$2 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 204 - 202 \cdot 102 \cdot 101 - 4 \cdot 101 \cdot 101$

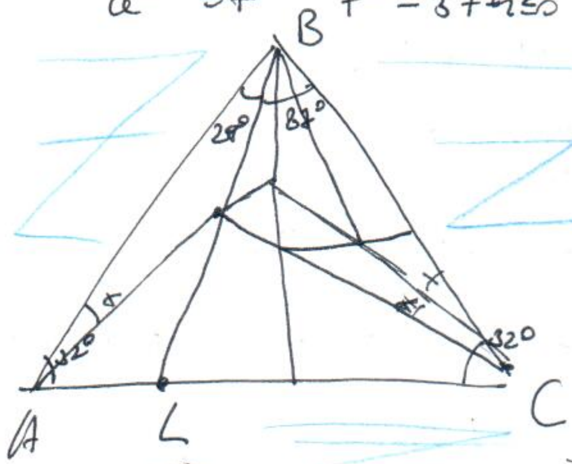
$101 \cdot 101 \times (408 - 2 \cdot 102 - 4) = 101 \cdot 101 \cdot 200 =$

$a \in (0; 1)$ $\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) +}$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \leq 0$

$a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2 \leq 0$ $D = 9 - 8 = 1;$

$a^{x-1} = t$ $t^2 - 3t + 2 \leq 0$ $t_{1;2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2; 1$



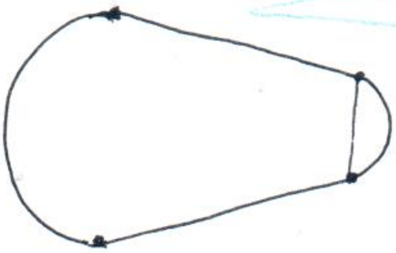
$a^{x-1} = 2$ $x = -2027$

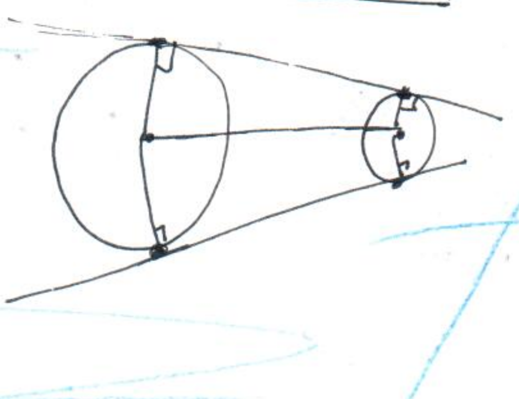
$a^{x-1} = 1$ $x = 1$

$x = -2015$

$\frac{tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$





Черновик:)

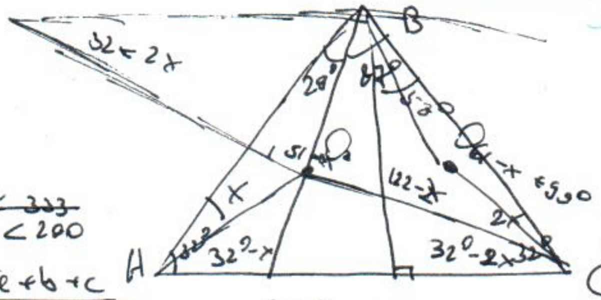
$c > 1$

$abc < 444$ $\quad < 400$ $\quad \cancel{222} < 500$

$abc + 2(ab + bc + ac) + 4($

$< 444 \quad < 666 \quad < 333 \quad < 200$

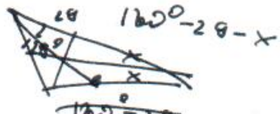
$444 + \cancel{1332}\ 1000$



$\dfrac{a+b+c}{\max(a+b+c)\ a}$

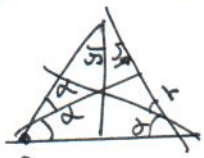
$\dfrac{BOA}{BAO}$?

$180^\circ - 2\theta - x$



$180^\circ - 2\theta$

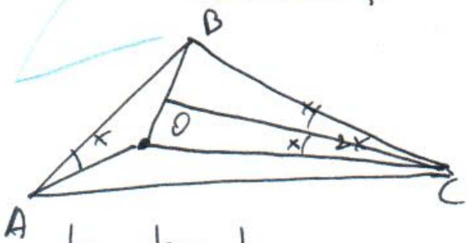
$180^\circ - 2x - 2\theta \cdot 2 = 18$



$abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a+b+c) = 2026$

$180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + \beta \quad 45^\circ$

$90^\circ + \beta = \cancel{90^\circ} + 45^\circ + 16^\circ - x$



$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) =$

$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$= \underbrace{2\sin\alpha \cdot \cos\beta}$

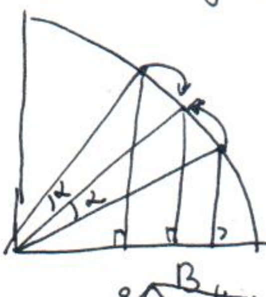
$-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$= 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$tg\,x \cdot tg\,y \cdot tg\,z$

$\dfrac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z} =$ $\quad \dfrac{1}{8} \cdot ($

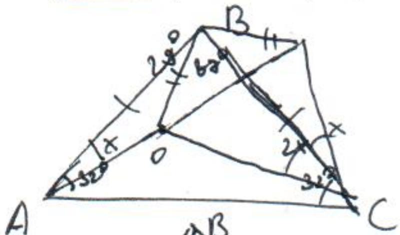
$tg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{}$



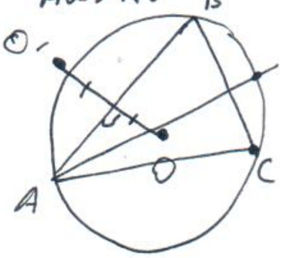
$tg\,x \cdot tg\,y \cdot tg\,z = \dfrac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$

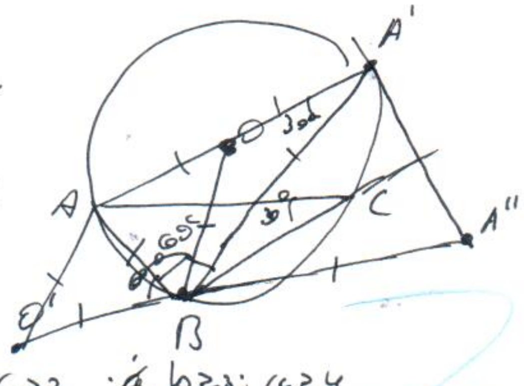
$\cos z \cdot \cos y \geq \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + y - \frac{\pi}{6}\right)$

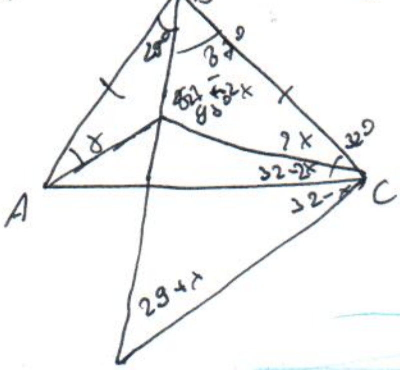
$\frac{1}{6}\left(\sin(x+y) + s(x-y)\right)\left(s(x+z) + s(x-z)\right)\left(s(y+z) + s(y-z)\right)$

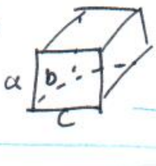


$AO \cdot AO' = B$









$c \geq 2$; $b \geq 3$; $a \geq 4$

$a, b, c \quad abc$

Страница №8 из 7