13:09 – 13:12
Баурова

0788889340003

78-88-89-34
(128.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Олимпиада им. Ломоносова
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Осиповой Виктории Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (семьдесят) ~~[illegible]~~ ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

78-88-89-34 (128.8)

ЧЕРНОВИК

N1 a, b, c

$abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) = 2026$

$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab+bc+ca + a+b+c + 1$

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8 = 2034$

$2026 + 8 = 2034$

$2034 : 2 = 1017$

$1017 : 9 = 113$

$2\cdot3\cdot3$

$113 \in P$

$2 \cdot 9 \cdot 113$

$1 \cdot 18 \cdot 113$

$3 \cdot 6 \cdot 113$

$1 \cdot 2 \cdot 113 \cdot 9$

$113 \times 18 = 904 + 113 = 2034$

$2, 3, 3, 113$

$2\cdot3\cdot3\cdot113$

$3 \cdot 6 \cdot 113$

$100 \cdot 99 \cdot 98$

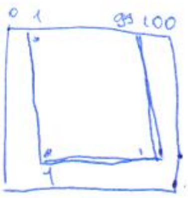
$98 \times 99 = 882 + 882 = 9702$

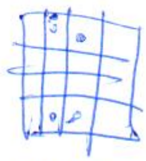
$2034 : 2 = 1017$

$1017 : 9 = 113$

$9702 \times 2 = 19400400$

$113 \times 18 = 1004 + 113$



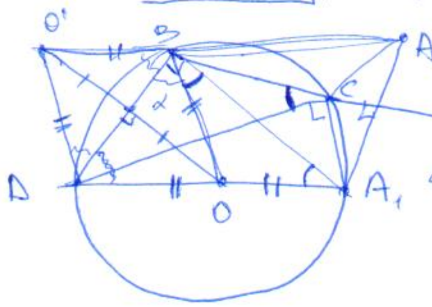


A $+0$ $\frac{99 \cdot 98}{2}$

i=1 все его до 100 1940400 $100 - 1$

~~0-99~~ 0-100

101.



$\angle O'BA = \angle BAO$

$\angle A_1''BC = \angle A_1''BC = \angle A_1AC = 90 - \angle AA_1C = 90 - (180 - \beta) =$

$= \beta - 90$ $\angle ABO = 60$

$\alpha + \beta + \beta - 90 = 180$

~~$\alpha + 90 + 2$~~ $60 + 90 + 2(90 - (180 - \beta))$

$180 + 2(\beta - 90) =$

$= 180 + 2\beta - 180 = 2\beta - 30 = 180$

$2\beta = 210$

$\beta = 105$

$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

в какую ст. возвести а чтоби получить а.

$a > 0$

1^0 $a > 1 \Rightarrow \log_2 a > 0$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$

$a^2(a^{2x-2} - 3a^{x-1} + 2) \geq 0$

$a^{x-1} \in (0, 1] \cup [2, +\infty)$

$a^{x-1} \leq 1$ или ≥ 2

$x + y, z = \frac{\pi}{2}$

$x - 1 \leq 0$

$a^{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \log_a 1 \leq x-1$

$a^{x-1} \geq 1$

$0 = \log_a 1$

$a^{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \log_a 2 \geq x - 1$

$a \to 1 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow \log_2 a < 0$

a^{2x} $a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2) \geq 0$

$tg x \, tg y \, tg z$

$tg x \, tg y \, tg(\frac{\pi}{2} - z)$

30,3030

≥ 0

$a^{x-1} \in [1, 2]$

$a^{x-1} \leq 2$

$\log_a 2 \leq x - 1$

$x \in [1, \log_a 2]$

ЧИСТОВИК

N1

Пусть a,b,c – длины ребер. Тогда abc – объём, 2(ab+bc+ca) – площ. пов-ти (тк ~~эт~~ поверх-ть состоит из 3 пар прямоуг-ков со сторонами (a;b) (b,c) (c,a) соотв-нно), 4(a+b+c) – сумма длин ребер

abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) = 2026. Прибавим 8 к обеим частям.

abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8 = 2034

(a+2)(b+2)(c+2) = 2034.

Обозн. x=a+2, y=b+2, z=c+2. Тогда x,y,z ≥ 3, и попарно различны

2034 = 2·3·3·113. НУО x<y<z => z ⋮ 113. (~~Если~~ 113∈P, то либо x, либо y ⋮ 113 но тогда x или y больше z, ??). Если z=113, то xy=18, 18=1·18=2·9=3·6. Тк x,y≥3 то подходит только x=3, y=6.

Если z=113·2 то xy=9. 9=3·3 => x=y=3 – плохо.

Если z ≥ 113·3, то xy ≤ 6 => либо x, либо y < 3, ?? =>

=> Единственное значение x,y,z – это (3,6,113) =>

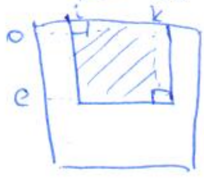
=> a,b,c это 1,4,111, откуда объём равен 444

Ответ: 444

N2 Будем считать, что дырка – это участок, со всех сторон ограниченный не вырезанными клетками.

Квадрат распадается на части тогда и только тогда, когда вырезанный прямоугольник имел высоту или ширину 101 и не был при этом крайним (т.е. не прислонялся к стороне длиной 101 целиком). Будем определять вырезанный прямоугольник координатами верхней левой и нижней правой клетки. Очевидно, это однозначно задает его. Для того, чтобы не было дырок, наш прямоугольник должен хотя бы одной стороной прислоняться к исходному квадрату.

Нумерация координат начинается с 0



1° Он присоед. только одной стороной, НУО верхней. ~~Пусть~~ ~~коорд. верх. лев.~~ J (i,0) – коорд. верх. лев. кл, (k,l) – нижн. прав, причем i>0, k,l>0 и < 100

Тогда для каждого такого i найдется 100−i таких подходящих k – от i до 99, и для каждого из них подойдет 100 значений l – любое от 0 до 99.

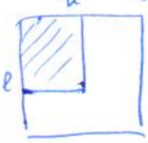
Т.е. для каждого из i существует 100(100−i) прямоугов.

В зависимости от i, 100−i принимает значение от 1 до 99.

Тогда сумма всех 100(100−i) равна $100 \cdot \frac{99\cdot 98}{2}$. Тк сторон квадрата 4, то итого $100\cdot 99 \cdot \frac{98}{2} \cdot 4 = 200\cdot 98\cdot 99 =$ ~~190400~~ 1940400

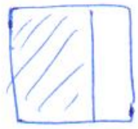
листовик
№2 (продол.)

2° прямоуг. прислонен к 2 сторонам. => есть угол, к кот. он прислонен.



~~Пусть~~ ∃ это лев. верх угол (НУО). Тогда ∃ (k, l) - коорд. прав. нижн. $0 \leq k, l < 100$. k и l любые => $100 \cdot 100$ вариантов. Тк углов 4, то $4 \cdot 100 \cdot 100$ вариантов => 40000

3° к 3 сторонам. ~~НУ~~ тогда ∃ сторона, к которой наш прямоуг. присоед. полностью. НУО это левая ∃ i - ~~й~~ коорд по горизонтали правой ниж. клетки прямоугла.



$0 \leq i < 100$, i - любое => 100 вариантов. => тк сторон квадрата 4, то $4 \cdot 100 = 400$ вар.

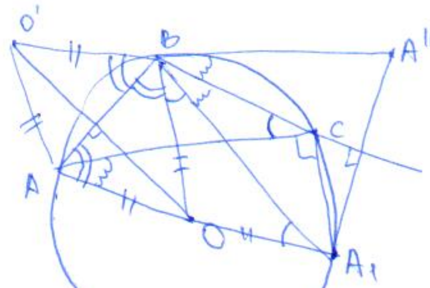
4° к 4 сторонам - невозможно, тк тогда мы возьмем весь квадрат

Итого

$$\begin{array}{r} 1940400 \\ +\ 40000 \\ 400 \\ \hline 1980800 \end{array}$$

Ответ: 1980800 способов.

№3



∃ A_1 - т. диаметр. противоп. A.

$30 = \angle BCA = \angle BA_1A$ по вписс-ти

$\angle BAO = \angle OBA_1$, тк $OB = OA_1$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA = \angle ABA_1 - 30 = 90 - 30 = 60$

Тк $\Delta AO'B = \Delta AOB$ в силу симметрии то $\angle ABO = \angle ABO' = 60$

$\angle ADA'' = 2\angle A_1BC = 2\angle A_1AC = 2(90 - \angle AA_1C) =$
(тк $\angle A_1BC = \angle A''BC$ в силу симметрии) $= 2(90 - (180 - \angle ABC)) =$

$= 2(\angle ABC - 90) = 2\beta - 180$ - обозн. $\angle ABC$ за β.

Тогда $180 = \angle O'BA + \angle ABO + \angle OBA_1 + 2\angle A_1BC = 60 + 60 + 30 + 2\beta - 180 = 180$

$150 + 2\beta - 180 = 180$

~~$30 +$~~ $2\beta - 180 = 30$

$2\beta = 210$

$\beta = 105$ Ответ: $\beta = 105^{\circ}$

№4

заметим, $\log_2 a$ существует только при $a > 0$. Рассм. 2 случая:

1° $a > 1 \Rightarrow \log_2 a > 0$. Тогда $a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2$ должно быть ≥ 0.

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 = a^2(a^{x-1} - 2)(a^{x-1} - 1)$. Первый множитель ~~всег~~ всегда > 0.

$(a^{x-1} - 2)(a^{x-1} - 1) \geq 0$ при $a^{x-1} \in (-\infty, 1] \cap [2, +\infty)$. Тк $a > 0$ то $a^{x-1} \in (0, 1] \cup [2, +\infty)$. В этом случае подходят все $x \geq$ ~~$\log_a 2 + 1$~~ $\log_a 2 + 1$

Действительно, тогда $x - 1 \geq \log_a 2 \Rightarrow a^{x-1} \geq 2$. Но тогда ~~это~~ мн-во решений бесконечное, не подходит

2° $a<1$ ЧИСТОВИК $\log_2 a<0 \Rightarrow a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0 \Rightarrow a^{x-1}\in[1,2] \Rightarrow$

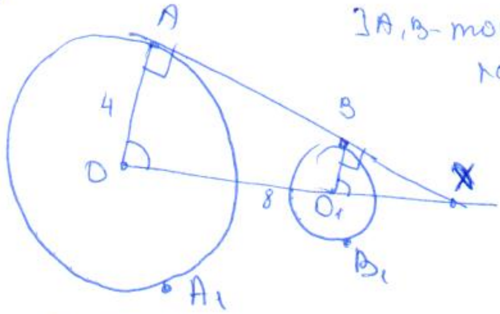
$\Rightarrow x\in[1, \log_a 2+1]$. Нужно, чтобы отрезок имел длину 2026 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a 2+1 = 2027 \Rightarrow \log_a 2 = 2026 \Rightarrow a^{2026}=2 \Rightarrow a=\sqrt[2026]{2}$, но тогда

~~Ответ: при $a=\sqrt[2026]{2}$~~ $a>1$, ?? $\Rightarrow$ ни при каких

Ответ: ни при каких.

№7



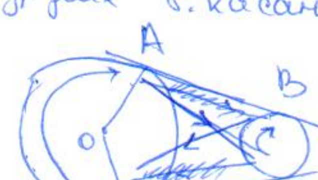
∃ A, B – точки касания прямой радиусов 4 и 1 с окр-ми, а O и O_1 – их центры соотв-нно.

$OO_1=6$
$OA=4$
$O_1B=1$

Пусть $X=(AB)\cap(OO_1)$. Тогда $\triangle OAX \sim \triangle O_1BX$ т.к. $OA \parallel O_1B$ и OO_1 – общ сторона и $\angle O_1XB$ – общий. Тогда $\frac{AX}{BX}=\frac{OA}{O_1B}=\frac{OX}{O_1X}$, т.е. $\frac{4}{1}=\frac{OX}{OX+6}$, откуда $OX=2$.

т.к. $O_1X=2$ то $OX=8$
т.к. $OA=4$, то $\angle AOO_1=60°$
~~тогда $\frac{OO_1+O_1X}{OX}$~~
Тогда ~~sin т.к. $\cos 60=\frac{\sqrt3}{2}$, то~~
~~OA~~ т.к. $\sin 60=\frac{\sqrt3}{2}$, то $\frac{AX}{AOX}=\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{AX}{8}=\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow \frac{AX}{4}=\sqrt3 \Rightarrow AX=4\sqrt3$. Ан-но, $BX=\sqrt3$. Тогда $AB=3\sqrt3$

Тогда посмотрим, как едет косилка. Обозн. за A_1 и B_1 две другие т. касания. Косилка начинает от A_1 (так удобнее представить) и идет к A по час стр, дорожка ее справа обрисовывает ~~окружно~~ часть окружности радиусом $4-1{,}5=2{,}5$. Эта часть составляет $\frac{2}{3}$ от всей длины окр-ти



т.к. угол, который прошла косилка – $360-60-60$ $(=360-\angle AOO_1-\angle A_1OO_1)=240$ – это $\frac{2}{3}$ от 360. Потом прошла $3\sqrt3$ по прямой. ~~потом~~ потом обходила окружность ~~до~~ радиусом $1{,}5-1=0{,}5$, причем т.к. $1<1{,}5$ то движение было направлено от точки, которая ближе к B_1 к точке, которая ближе к B, а не наоборот. Потом прошла еще $3\sqrt3$. Итого –

$2\pi r_1\cdot\frac{2}{3}+3\sqrt3+2\pi r_2\cdot\frac{2}{3}+3\sqrt3=\frac{2}{3}2\pi(0{,}5+2{,}5)+6\sqrt3=4\pi+6\sqrt3$

Ответ: $4\pi+6\sqrt3$

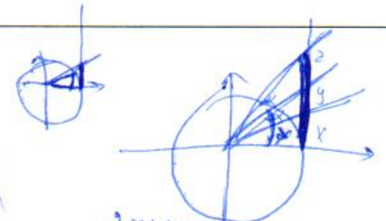
78-88-89-34 (128,8)

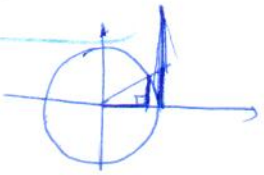
ЧЕРНОВИК

$x, y, z = 30^\circ \Rightarrow tg\, x, y, z = \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$tg(x+\alpha)\, tg(x-\alpha) \cancel{\ } tg^2 x$



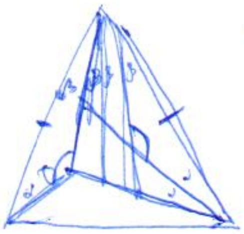


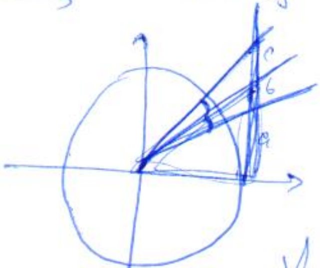
$2x+y+z$ $\cancel{\ }$ $2x+2y$

$tg\,1 \cdot tg\,59$

$\downarrow$ $\downarrow$

0 $tg\,60$



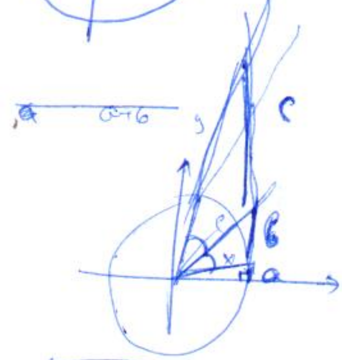


$tg^2 x = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$tg(x+\alpha)\, tg(x-\alpha) = (a+b+c)a = a^2+ab+ac$

$(a+b)^2 \ ?\ (a+b+c)a$ b^2+ab и ac

$\frac{(a+b)}{a} \ ?\ \frac{a+b+c}{a+b}$ $b(a+b)$ и ac



$b(a+b)$ и ac

$\frac{b}{c} \ ?\ \frac{a}{a+b}$

~~30, 1, 59~~ 60, 15, 15 180−64=116

tg 25

32 29

$\frac{b}{c} \ ?\ 1-\frac{b}{a+b}$

$\frac{b}{c} = \frac{x}{y}$

$c = \sqrt{xy - bc}$

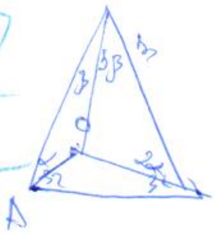
$b(a+b)$ и ac a

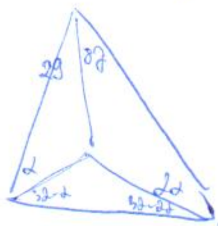
$\sqrt{a^2+(a+b+c)^2}$

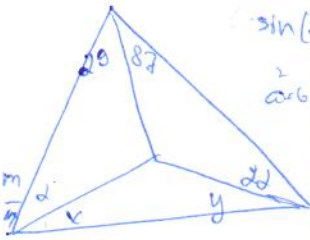
$a+b+c$

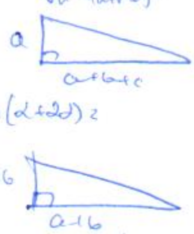
$\sin(\alpha+2\alpha) =$

$a+b$



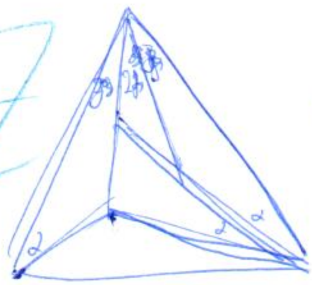


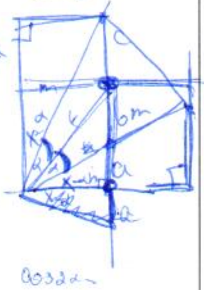




$\frac{b}{a}$ $\frac{c}{a+b}$

$\frac{\sin \alpha}{\sin(x-\alpha)} = \frac{k}{}$ $\frac{\sin \alpha}{\sin x} = \frac{m}{}$





$\frac{\sin x}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 29}{\sin 87} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin y} = 1$

$\frac{\sin x}{\sin 2\alpha}$

$a(b+a) = A$

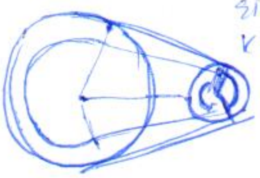
$\frac{k}{\sin(x-\alpha)} \ ?\ \frac{m}{\sin x}$

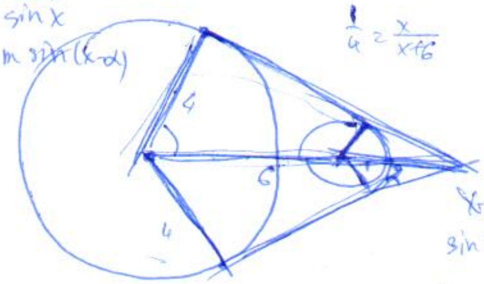
$k \sin x \ ?\ m \sin(x-\alpha)$

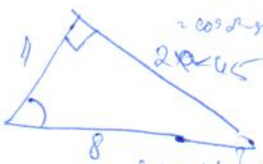
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+6}$

$2x < 45$







$x-\alpha,\ x+\alpha$ $b(a+b) \geq ac$

$\sin 3\beta = \sin(\beta+2\beta) =$

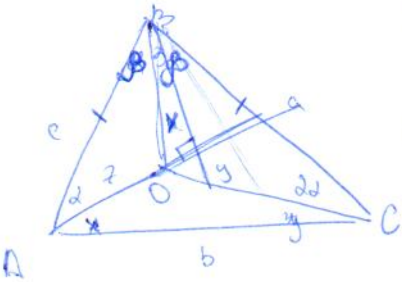
$\frac{\sin x}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin y} = 1$

$\cancel{x} = \frac{\sin 3\beta}{\sin 2\alpha}$

$\cancel{x} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

$x+\alpha < 90$

$2x-\alpha < 90$



$\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{c \cdot x \sin\beta}{a \sin 3\beta}$

$\sin 3\alpha = \sin\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos\alpha =$

$= \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$= \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)$

$= \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$\frac{\sin\alpha}{\sin 29} \cdot \frac{\sin 87}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin(32-2\alpha)}{\sin(32-\alpha)} = 1$

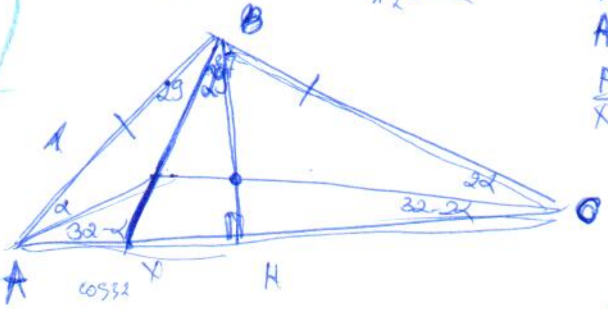
$\frac{\sin\alpha}{\sin 3\beta} \cdot \frac{\sin\beta(3\cos^2\beta - \sin^2\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(32-2\alpha)}{\sin(32-\alpha)} = 1$

ЧЕРНОВИК

$\frac{3\cos^2\beta - \sin^2\beta}{2\cos\alpha}$, $\frac{\sin 32-2\alpha}{\sin 32-\alpha} = 1$

$\sin 32\text{-}2\alpha = \sin 32\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos 32 =$

$29+29+32 = 58+32 = 90$



$AC = 2\cos 32$

$AH = \cos 32$

$\frac{AX}{XH} = \frac{1}{\cos 32}$

AX

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$

$\sin^2\alpha = \sqrt{1 - \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \cos 2\alpha - 1}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin = \frac{1}{2}$

$tg\,15 = \frac{\sin 15}{\cos 15} = \frac{\sin\frac{30}{2}}{\cos\frac{30}{2}}$

$\sin = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$\cos = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$tg^2 15$

$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \overset{?}{<} \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$tg\,60 =$

$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)^2 \overset{?}{<} \frac{1}{9}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \overset{?}{<} \frac{1}{3}$

$3(\sqrt{6}-\sqrt{2}) < \sqrt{6}+\sqrt{2}$

$2\sqrt{6} \overset{?}{<} 4\sqrt{2}$

$4\cdot 6 \overset{?}{<} 16\cdot 2 \quad 32$

24

$\sin 15 = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\frac{2\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\frac{1}{4}\cdot(8-2\sqrt{12}) = 2-\sqrt{3}$

$\sqrt{1-\frac{8-2\sqrt{12}}{16}} < \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Чистовик

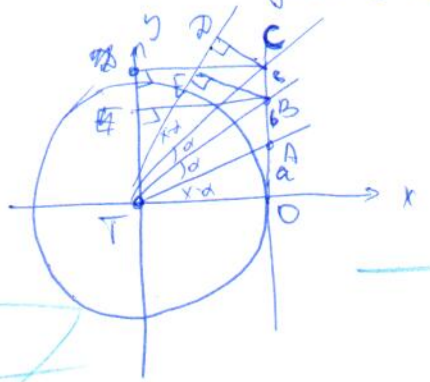
№5

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ при $x=y=z=30°$

~~Заметим, наименьш~~

Заметим

$\exists$ $x+\alpha$, $x-\alpha$ — 2 угла из x, y, z. докажем $tg^2x > tg(x+\alpha)tg(x-\alpha)$ при усл. $2x<90$



$\exists$ есть тригоном. окр-ть рад. 1

$\exists$ лучи под углом x оси x перес. прямую $x=1$ в т. A, B, C

$OA=a$, $AB=b$, $BC=c$.

$tg^2\alpha = (a+b)^2$, $tg(\alpha+x)tg(x-\alpha) < a(a+b+c)$

(!) $(a+b)^2 > a(a+b+c) \Leftrightarrow \underbrace{ab+b^2}_{b(a+b)} > ac$

посчитаем $\frac{S\Delta TBA}{S\Delta TAO}$ с одной стороны это $\frac{b}{a}$, с другой — $\frac{TB}{TO}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}$

Ан-но с $\frac{\Delta TCB}{\Delta TBO}$

$\longrightarrow \frac{b}{a} > \frac{c}{a+b}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}\cdot\frac{TB}{TO} > \frac{\sin\alpha}{\sin x}\cdot\frac{CT}{TO}$

$\Updownarrow$

$\frac{TB}{\sin(x-\alpha)} < \frac{CT}{\sin x}$

$\Updownarrow$

$\underbrace{TB\cdot\sin x}_{BO} < CT\sin(x-\alpha)$

$\Updownarrow$

$BO < CT\sin(x-\alpha)$

опустим из C перпенд-р к лучу под углом $x-\alpha$ к TC. ~~тогда~~

$\exists$ пересек в (·)D

Опустим из B то же, пересеч-е в (·)E. Тогда т.к. TB — бис-са $\angle OTE$ то $a+b=BO=BE$, и т.к. C выше B, то $CD<BE=a+b$, а CD это именно $CT\cdot\sin(x-\alpha)$

Тогда $CT\sin(x-\alpha) < TB\sin x$

откуда $tg^2x < tg(x-\alpha)tg(x+\alpha)$

=> max при равных углах

Опустим из C на ось y перпенд-р. $\exists$ он пересек в (·)D. $\angle CTD > x-\alpha$ т.к. $2x<90$ Тогда $CD = CT\sin\angle CTY > CT\sin(x-\alpha)$

проведем из B перп. к оси y. $\exists$ пересек в точке E. Тогда, т.к. $x<45$, то $BE<BO=a+b$, тогда получаем нужное. Тогда при наличии неравных x и y значение не ~~min => m~~ max => max знач-е при $x=y=z=30°$ и это $\frac{1}{3\sqrt{3}}$