



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9 класс

Место проведения г. Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

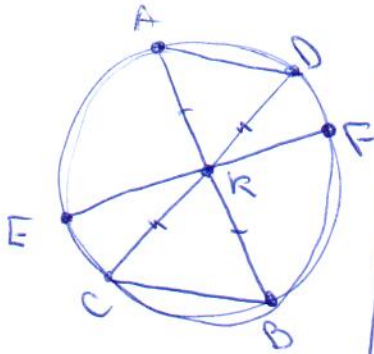
Павлыгиной Марии Захардовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника
[Подпись]

Чистовик

Задача №1.



Заметим, что $\angle DAB = \angle DCB$, а также треугольники $\triangle AKD = \triangle CKB$ по 2 сторонам и углу между ними, это значит, что $\angle DAK = \angle KBC$ но тогда $\angle DCB = \angle DAB = \angle DAK = \angle KBC$ и $CK = KB$ но тогда $AK = KB = CK = DK$, это значит что K равноудалена от A, B, C, D значит K - центр окружности и EF - диаметр, а длина диаметра равна $2r = 10$.

Ответ: 10

Задача №2. Предположим, что такое число есть. Рассмотрим его.

Так как n -четырехзначное, то $10^3 \leq n < 10^4$.
 тогда $10^6 \leq n^2 < 10^8$ (значит в n^2 либо 7, либо 8 цифр).

1. случай: в n^2 7 цифр:

$(k \neq 0) | n^2 = n \cdot 10^3 + k$ (тогда либо $k=0$, либо $k:n$), но так как k трехзначное или двузначное или однозначное, то если $k \neq 0$, то k не делится на n (тогда $n \cdot 10^3$ не делится на n)
 $n^2 = n \cdot 10^3 \Rightarrow |n = 10^3 = 1000|$

2 случай: в n^2 8 цифр:

$n^2 = n \cdot 10^4 + k$, но тогда $n^2 \geq n \cdot 10^4$ и $n \geq 10^4$, а n четырехзначное, такого не бывает.

Ответ: 1000.

Задача №3.

Числовик.

Множество F - это ~~121~~ 100 точек, которые образуют квадрат 10×10 .

Назовём в прямоугольном треугольнике отмеченную вершину особой, а две другие зависящими. Тогда выбор среди множества F одну особую вершину и две зависящие линии по сути треугольник прямоугольный, поскольку можно выбрать особую и две зависящие вершины.



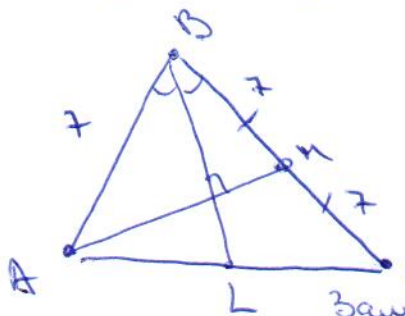
(зависимая вершина лежит с собой либо в одной строке, либо в одном столбце).

Вариантов выбора ~~особую~~ вершину - 100 (в множестве всего 100 точек тк). А выборы 1 зависящую в строке - 9 вариантов, и 2 зависящую в столбце - 9 вариантов.

Значит всего вариантов $100 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 100 = 8100$.

Ответ: 8100.

Задача №4.

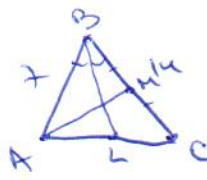


тк в треугольнике ABM биссектриса совпала с высотой, то она равнобедренный: $AB=BM \Rightarrow BM=7 \Rightarrow BC=14$
и теперь заметим, что

$AB+AC > BC$, $AB+BC > AC \Rightarrow$
Заметим, что $AC \neq BC = 14 \Rightarrow AC \neq 14$

$21 > AC$ и $7+AC > 14 \Rightarrow AC > 7$, тогда $8 \leq AC \leq 20$

Теперь докажем что при каждой длине AC медиана будет перпендикулярна биссектрисе. Тк $BC=14$, то $BM=7$ и $AB=BM$, но тогда биссектриса $\angle ABM$ перпендикулярна AM , что и требуется.



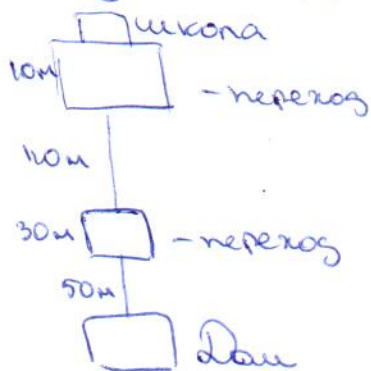
Значит все возможные значения периметра это $7+14+8=29$ до $7+14+20=41$ включительно, без 35.

Ответ: все натуральные числа от 29 до 41 включительно, без 35!

51-50-24-75
(127.1)

Чистовик

Задача №5.



Заметим, что когда девочка вышла то 1 светофор загорелся, значит, тк она не ехала на красный, то доезжала она до перехода со скоростью не более 50 м / 30 сек.

До второго перехода ей ехать

200 м. Тогда заметим, что она потратила на доезжание до 2 перехода хотя бы 2 минуты, но заметим, что он загорелся красный после 10 секунд как она вышла из дома, через минуту пошли люди, а после 1 минуты 50 сек снова поехали машинки, но тк она до 2 перехода ехала хотя бы 2 минуты, а разрешено его перейти только через хотя бы 2 м 40 сек, то доезжала девочка до 2 перехода хотя бы 2 мин 40 сек. - 160 сек
Значит скорость не более 200м / 160 сек - 5 м / 4 сек.

Но тогда посмотрим, если девочка ехала со скоростью 5 м / 4 сек, то до 1 перехода она доехала ~~за~~ за 40 сек, там горел зелёный, потом она его переехала за 24 сек (там до сих пор горел зелёный), уже она ехала 64 сек. Потом за 96 сек она переехала до 2 перехода, то есть потратила 160 сек. Там загорелся зелёный тк 10 сек в начале - зел, 50 сек - кр, 50 сек - зел, 50 сек - кр и далее зелёный, она за 8 сек переехала его и доехала до школы.
То есть за 5 м / 4 сек можно. Это равно 75 м / мин.

Ответ: 5 м / 4 сек (75 м / мин).

Чистовик.

Задача №6. Рассмотрим такое a .



Заметим, что $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3}$ — это квадратный трёхчлен, и его функция — парабола.

1 случай: ветви опущены вниз, но тогда решение неравенства $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$ ~~или~~ не отрезок, а либо прямая, либо два нуля.



2 случай: ветви вверх.

тогда множество решений, это вот этот отрезок (заштрихованный)

А если корней у параболы нет, то множество ~~решений~~ решений пустое, если один корень, то множество ~~этот~~ 1 корень.

Значит, тк наше множество решений — отрезок длины ~~ноль~~, то единственной вариант; это парабола ветви вверх и два корня.

Тогда в $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3}$ коэффициент при x^2 — положительный $\Rightarrow a^3 < 0 \Rightarrow a < 0$.

(так же заметим, что $a \neq 0$, тк тогда множество решений — все числа).

скажем, что $a = -t$ и

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} = \frac{3x^2}{t^3} + \frac{2x}{t^2} - \frac{1}{t}$$

Найдём корни уравнения $\frac{3x^2}{t^3} + \frac{2x}{t^2} - \frac{1}{t} = 0$,
 $x_1, x_2 = \frac{-\frac{1}{t}}{\frac{3}{t^3}} = \frac{-t^2}{3}$, $x_1 + x_2 = \frac{-\frac{2}{t}}{\frac{3}{t^3}} = \frac{-2t^2}{3}$,
 по теореме Виета.

Но заметим так же, что тк множество решений $\frac{3x^2}{t^3} + \frac{2x}{t^2} - \frac{1}{t} \leq 0$ — отрезок длины ~~ноль~~, то $(x_1 - x_2)^2 = 2026$ тогда

$$2026^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4t^4}{9} + \frac{4t^2}{3} = \frac{16t^4}{9}$$

Задача №6 (проект) Числовик

$$2026^2 = \frac{16t^2}{9}$$

$$\text{тогда } t^2 = \frac{3^2 \cdot 2026^2}{4^2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 2026}{4} = \frac{3 \cdot 1013}{2} =$$

$$= \frac{3039}{2} = 1519,5$$

⇓

$$a = -t = -1519,5 \Rightarrow \boxed{a = -1519,5}$$

~~Ответ~~Тогда подставим a и проверим ответ.

$$\text{корни уравнения } \frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{3}{a^3}} = \frac{a^2}{-3}, \quad x_1 + x_2 = \frac{-2a^2}{-\frac{3}{a^3}} = \frac{2a}{3}$$

Вычисляем разность равно $(x_1 - x_2)^2$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{3} = \frac{16a^2}{9} =$$

$$\frac{16 \cdot (-1519,5)^2}{9} = \frac{4 \cdot 3039^2}{9} = \frac{2^2 \cdot 3039^2}{3^2} = 4 \cdot 1013^2 =$$

$$2026^2.$$

Тогда множество решений неравенства

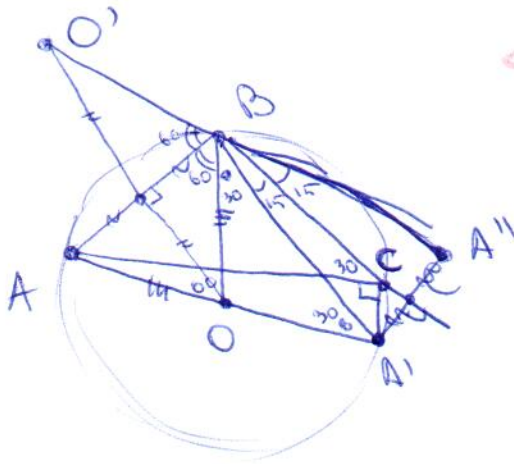
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \text{ и есть отрезок длины}$$

$$2026 \text{ при } \boxed{a = -1519,5}$$

Ответ: $-1519,5$.

Чистовик.

Задача №7



треугольник $\triangle O'BO$ -
равнобедренный, тк
медiana совпала с
высотой $\Rightarrow O'B = OB$
значит $\angle O'BA = \angle ABO$

а так же $\angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$
тогда $\angle ABO = 60^\circ$ и $\angle O'BA = 60^\circ$

$\angle BA'A = \angle BCA = 30^\circ$ тк
 $OB = OA' \Rightarrow \angle OBA' = 30^\circ$
тк $\angle O'BA + \angle ABO + \angle OBA' +$
 $\angle A'BA'' = 180^\circ$ и

$\angle O'BA + \angle ABO + \angle OBA' =$
 $60 + 60 + 30 = 150^\circ$. Значит
Угол $\angle A'BA'' = 30^\circ$.

$\angle A'BC = \angle CBA''$ (тк
 $A'BA''$ равнобедренный
тк в нем медiana и
высота совпали. Тогда

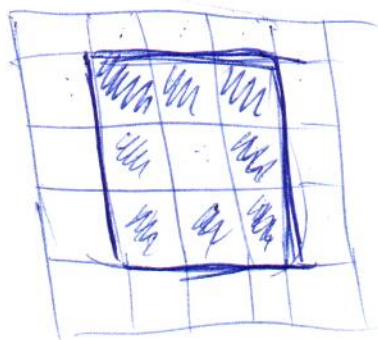
$\angle A'BC = 15^\circ$, $\angle OBA' = 30^\circ$,
 $\angle ABO = 60^\circ \Rightarrow$

$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBA' + \angle A'BC =$
 $60 + 30 + 15 = 105^\circ$

Ответ: $\angle B = 105^\circ$.

Чистовик

Задача №8



Вот мы начали с какой-то клетки. Скажем, что мы хотим там это сделать в отмеченном квадрате макс что далее будет закрашена клетка из $\frac{1}{2}$, потом $\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$

(мы выбираем закр. клетку и красим её соседа) поэтому такие вероятности

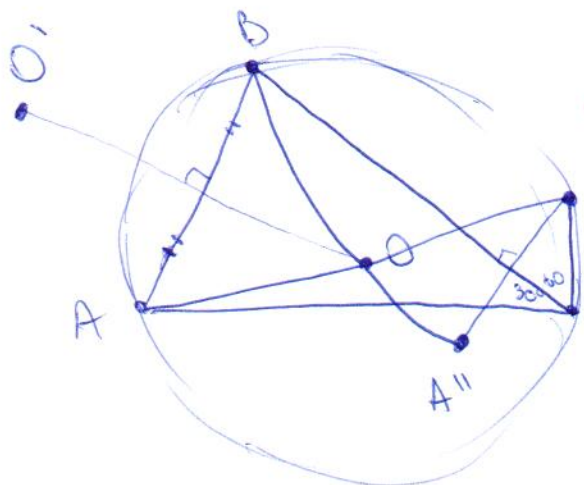
А ещё мы могли покрасить любую из 8 клеток каёмки в начале, тогда способов:

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{1}{24 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{1}{720 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{1}{5040 \cdot 4} = \frac{1}{20160}$$

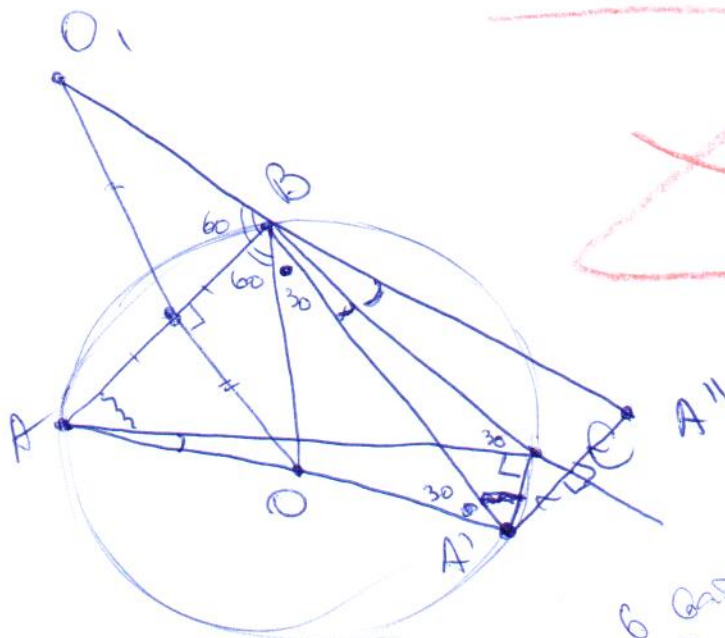
Ответ:

~~$\frac{1}{20160}$~~ $\frac{1}{20160}$

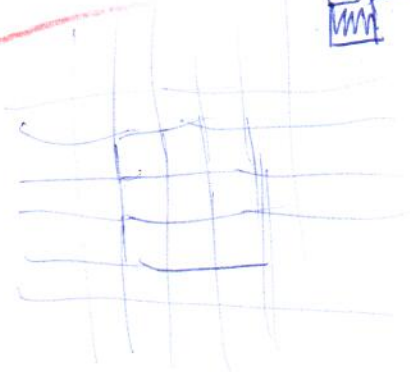
Чертовик.



$2\alpha + 2\beta = 30$
 $2(\alpha + \beta) = 30$
 $\alpha + \beta = 15$
 $2\gamma = 0$



$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6$
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6$



$$\begin{array}{r} 720 \\ \times 7 \\ \hline 5040 \\ \times 5040 \\ \hline 20160 \end{array}$$

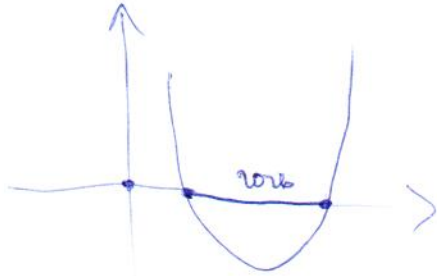
Задача

Чертовик

$$1 + \frac{2a}{a} - \frac{3a^2}{a^3} \leq 0$$

$a - 0 \rightarrow \text{пу}$

Знак



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$a = -t$$

t - номер

$$\frac{1}{t^3}$$

$$\frac{3a^2}{t^3} + \frac{2a}{t^2} - \frac{1}{t} \leq 0$$

~~$$\frac{3a^2}{t^3} + \frac{2a}{t^2} - \frac{1}{t} \leq 0$$~~

$$x_1 =$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{t}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{t^2}$$

$$x_1 =$$

нам надо $(x_1 - x_2)^2$ найти

$$(x_1 + x_2)^2 = \frac{4}{t^4}$$

$$1013^2 = \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t}$$

$$1013^2 t^4 - t^3 - 1 = 0$$

$$\text{кор}^2 = (x_1 - x_2)^2 = \frac{4}{t^4} + \frac{4}{t}$$

$$t^4 \text{ кор}^2 = 4 + 4t^3$$

$$t^4 \text{ кор}^2 - 4t^3 + 4 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\frac{1}{t}}{\frac{3}{t^3}} = \frac{-t^2}{3}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-\frac{2}{t^2}}{\frac{3}{t^3}} = \frac{-2t}{3}$$

$$2016^2 = (x_1 - x_2)^2 =$$

$$16t^2 = 2016^2 \cdot 9$$

$$t^2 =$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-t^2}{3}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2t}{3}$$

$$\frac{4t^2}{9} + \frac{4t^2}{3} = \frac{16t^2}{9}$$

$$\frac{2016^2 \cdot 3^2}{4^2}$$

$$t = \frac{2016 \cdot 3}{4}$$

$$a = -\frac{2016 \cdot 3}{4}$$

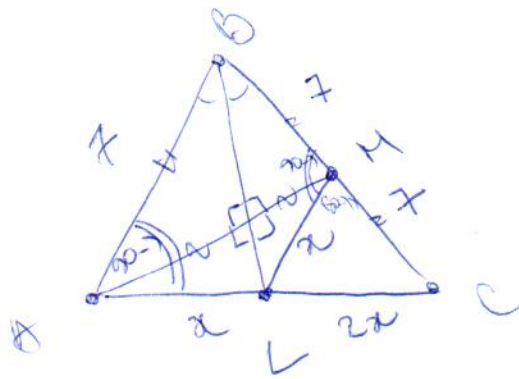
$$\begin{array}{r} 1519 \\ \times 4 \\ \hline 6076 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2016 \\ \times 3 \\ \hline 6078 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6078 \\ \times 4 \\ \hline 24312 \end{array}$$

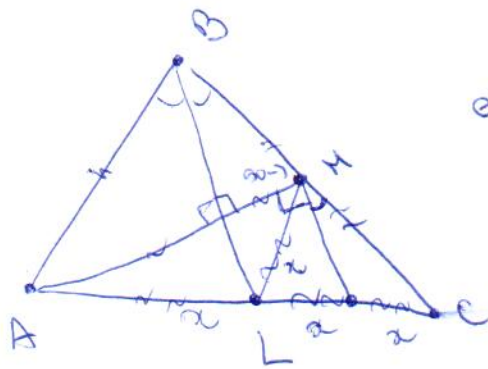
$$\begin{array}{r} 1519,5 \\ \times 4 \\ \hline 6078 \end{array}$$

Черковик



$$\frac{14}{\sin A} = \frac{7}{\sin C}$$

$$\frac{x}{\sin C} = \frac{2x}{\sin A}$$

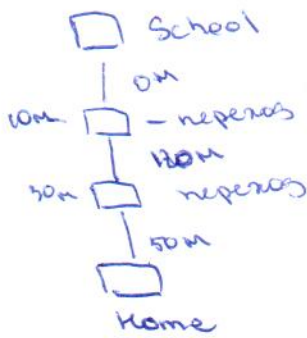


если $x > 7$
то max max

если $x \leq 7$
то max max
↓

x от 3 до 6

Home
5000 m



50 м за 30 сек
макс.

30 сек

5 м за 3 сек

200 м 2 мин.

50

60 + 50 + 50

10 +

160 сек

160 сек

200 м за 160 сек

168 сек

20 м за 16 сек

она етня 40 сек
мин

5 м за 4 сек

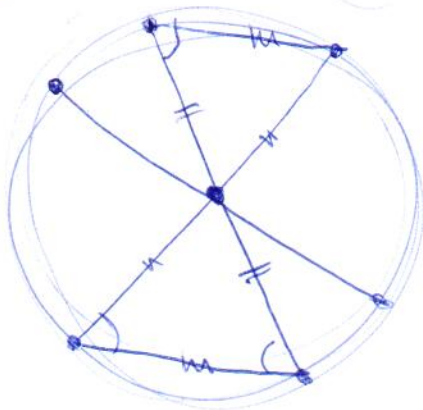
мин скорость 5 м за 4 сек

75 м / мин

3039

Черновик

1



10

n

n²

какой знак вообще может быть

$$10^3 \leq n < 10^4$$

$$10^6 \leq n^2 < 10^8$$

то есть

$$1000000 \leq n^2 < 100000000$$

2

если в n² всего 7 знаков, то

$$n^2 = n \cdot 10^3 + k \text{ и } k:n \text{ но в } k \text{ всего 3 знака}$$

$$n^2 = n \cdot 10^4 + k \text{ в } k \text{ - 4 знака}$$

не можно

$$3000 \cdot 3000 = 9000000$$

$$n > 3000$$

тогда $n \neq k$
 $n \neq k=2n$
 $n \neq k=3n$

$$n^2 = n \cdot 10^4 + n$$

$$n = 10^4 + 1$$

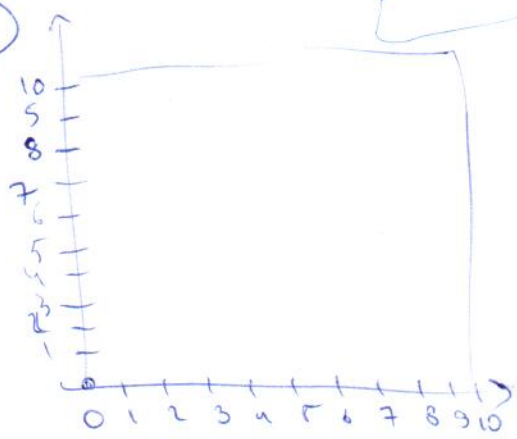
$$n^2 = n \cdot 10^4 + 2n$$

$$n = 10^4 + 2$$

$$n^2 = n \cdot 10^4 + 3n$$

$$n = 10^4 + 3$$

3



это только числа

и 899. и чем больше же

$$10 \cdot 10$$

$$12 \cdot 10^2 = 1200$$