



0 953856 600002

95-38-56-60

(128.7)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Усть-Лабинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Панкрашиной Дианы Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

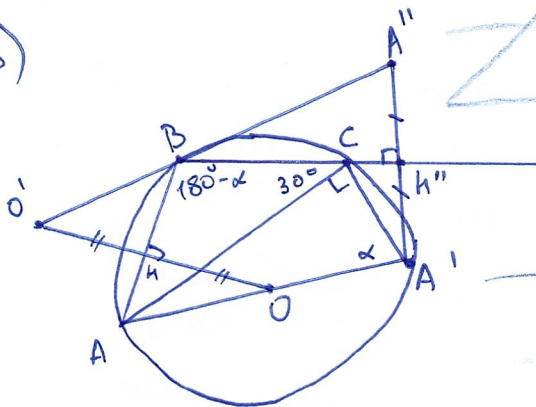
«29» марта 2026 года

Подпись участника

95-38-56-60
(128.7)

Чистовик 1

№3)



H - основание перпендикуляра из O на хорду AB
H'' - основание перпендикуляра из A' на хорду BC

1) Пусть A' - точка, диаметрально противоположная A
 $\angle A'D'C = \alpha$, тогда $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ (четырехугольник ABCA' вписан в окружность)

2) Т.к. AA' - диаметр, то $\angle ACA' = 90^\circ$ (как угол, опирающийся на диаметр)

Тогда $\angle BCA' = \angle C + \angle ACA' = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$

$\angle BAA' = 180^\circ - \angle BCA' = 60^\circ$ (ABCA' - вписанный)

3) Рассмотрим $\triangle AOK$ и $\triangle BOK$:

OK - общая сторона

OA = OB как радиусы одной окр $\Rightarrow \triangle AOK = \triangle BOK$ по гипотенузе и катету

Тогда $\angle OKB = \angle OKA = 60^\circ$

4) Рассмотрим $\triangle BOK$ и $\triangle BOK'$:

BK - общая сторона

$OK = OK'$ из симметрии $\Rightarrow \triangle BOK = \triangle BOK'$ по двум катетам

Тогда $\angle O'BK = \angle OKB = 60^\circ$

5) Т.к. O', B и A'' лежат на одной прямой, то

$\angle O'BK + \angle ABC + \angle A''BC = 180^\circ$

$60^\circ + 180^\circ - \alpha + \angle A''BC = 180^\circ$

$\angle A''BC = \alpha - 60^\circ$

Тогда $\triangle \triangle BA''H''$: $\angle A''BH'' + \angle H'' + \angle BA''H'' = 180^\circ$

$\alpha - 60^\circ + 90^\circ + \angle BA''H'' = 180^\circ$

$\angle BA''H'' = 150^\circ - \alpha$

6) Рассмотрим $\triangle BA''H''$ и $\triangle BA'H''$:

BH'' - общая сторона

$\angle A''H'' = \angle A'H''$ из симметрии $\Rightarrow \triangle BA''H'' = \triangle BA'H''$ по двум катетам

Числовик 2

Тогда $\angle BA'H'' = \angle BA''K'' = 150^\circ - \alpha$

7) $\angle AA'B = \angle ACB = 30^\circ$ (т.к. углы опираются на одну дугу)

Тогда $\angle AA'K' = 150^\circ - \alpha + 30^\circ = 180^\circ - \alpha$

$\angle CA'K'' = \angle AA'K' - \angle AA'C = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$

8) $\angle C + \angle ACA' + \angle A'CH'' = 180^\circ$

$30^\circ + 90^\circ + \angle A'CH'' = 180^\circ$

$\angle A'CH'' = 60^\circ$

9) $\angle BACH''A'$:

$\angle A'CH'' + \angle H'' + \angle CA'K'' = 180^\circ$

$60^\circ + 90^\circ + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$

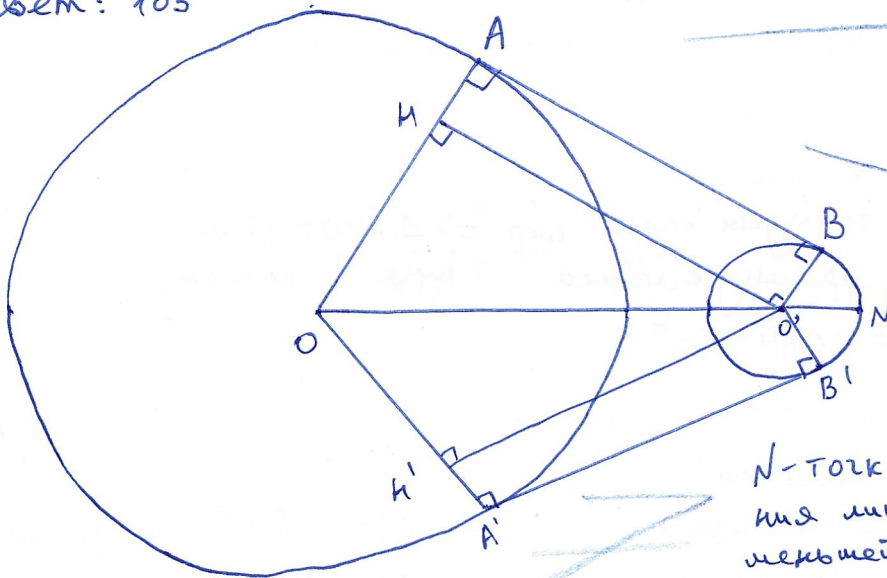
$2\alpha = 150^\circ$

$\alpha = 75^\circ$

Тогда $\angle B = 180^\circ - \alpha = 105^\circ$

Ответ: 105°

№7)



N - точка пересечения линии центров с меньшей окр.

1) Пусть O - центр первой окружности, O' - второй

Пусть A - точка касания первой касательной с первой окружностью, B - со второй.

Тогда $AO \perp AB$ (радиус \perp касательной), $O'B \perp AB$

проведем через O' прямую $\parallel AB$ до пересечения с OA

в точке K. Тогда $OK \perp AO \Rightarrow \begin{matrix} \angle A = 90^\circ \\ \angle B = 90^\circ \\ \angle K = 90^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{в } \triangle ABO'K: \\ \angle O' = 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = \\ = 90^\circ \end{matrix}$

$\triangle ABO'K$ - \Downarrow прямоугольник

$AB = OK$
 $AK = O'B = 1$

Чистовик 3

Тогда по теореме Пифагора в $\triangle OO'K$:

$$(OO')^2 = (O'K)^2 + OK^2$$

$$6^2 = (O'K)^2 + (OA - AK)^2$$

$$6^2 = (O'K)^2 + 3^2$$

$$(O'K)^2 = 36 - 9 = 27$$

$$O'K = 3\sqrt{3} = AB$$

Аналогично, вторая касательная $A'B' = 3\sqrt{3}$

2) Заметим, что в $\triangle OKO'$ $OK = \frac{OO'}{2}$, т.е. катет равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы $\Rightarrow \angle KO'O = 30^\circ \Rightarrow \angle KOO' = 60^\circ$

Аналогично в $\triangle K'O'O$: $\angle K'O'O = 60^\circ \Rightarrow \angle KOA' = 120^\circ$

3) В $\triangle BO'OA$: $\angle B + \angle BO'O + \angle K'O'O + \angle A = 360^\circ$

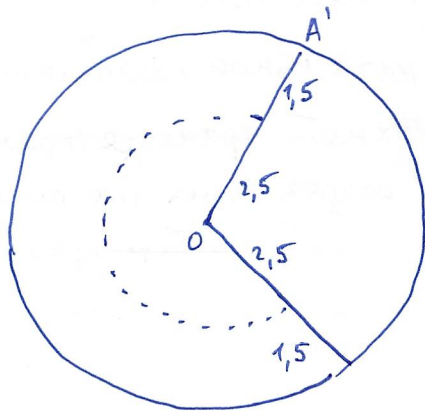
$$90^\circ + \angle BO'O + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\angle BO'O = 120^\circ \Rightarrow \angle BO'N = 180^\circ - \angle BO'O = 60^\circ$$

(как смежные)

Аналогично $\angle NO'B' = 60^\circ \Rightarrow \angle BO'B' = 120^\circ$

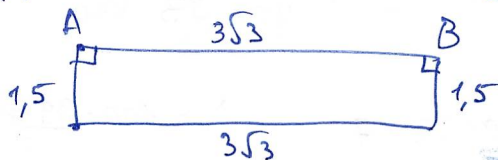
4) Когда косишка проедет по большей дуге $A'A$ окружности, она оставит такой след (пунктир)



То есть часть окружности радиуса 2,5, ограниченную углом в $360 - 120 = 240^\circ$

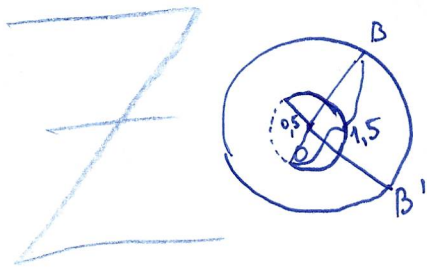
$$\text{Его длина: } 2\pi \cdot 2,5 \cdot \frac{240}{360} = 5\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

Когда косишка будет проезжать по касательным, она просто оставит след, равный длине касательных:



Когда косишка будет проезжать по меньшей дуге BB' окружности, она оставит такой след (пунктир):

Чистовик ч



То есть часть окружности радиуса 0,5, ограниченная углом 120°

Его длина: $2\pi \cdot 0,5 \cdot \frac{120}{360} = \pi \cdot \frac{1}{3}$

Тогда общая длина: $\frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$



Т.к. нужно, чтобы у оставшейся фигуры не было дырки внутри, то какая-то вершина вырезаемого прямоугольника лежит на границе большого квадрата.

Будем сначала рассматривать начальное положение квадрата, а позже выберем на верхней границе (кроме вершин). Тогда мы можем делать разрез вниз (не более 100 клеток): ~~это~~ это будет одна из сторон квадрата-прямоугольника, а потом вправо так, чтобы не дойти до границы квадрата. То есть:



- от этой клетки можно сделать разрез от 1 до 100 клеток вниз и от 1 до 99 вправо $\Rightarrow 100 \cdot 99$ вариантов

Для следующей - 100 вниз и от 1 до 98 вправо $\Rightarrow 100 \cdot 98$ вариантов

Всего таких вариантов $100(99 + 98 + 97 + \dots + 1) = 100 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 100 \cdot 99 \cdot \frac{50}{2} = 485000$

Но т.к. начальное положение квадрата можно было выбрать 4-мя способами, то всего $485000 \cdot 4 = 1940000$

Ответ: ~~1940400~~ 1980000

Чистовик 5

Н4) $\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

1) $\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} = \frac{(a^x)^2 - 3a \cdot a^x + 2a^2}{\log_2 a} = \frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a}$

2) $\log_2 a \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$
 При этом $a > 0$

3) $\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0$

Если $a < 1$, то $\log_2 a < 0 \Rightarrow (a^x - a)(a^x - 2a) \leq 0$

Тогда $a^x \in [a, 2a]$
 $x \in [1, \log_a 2 + 1]$

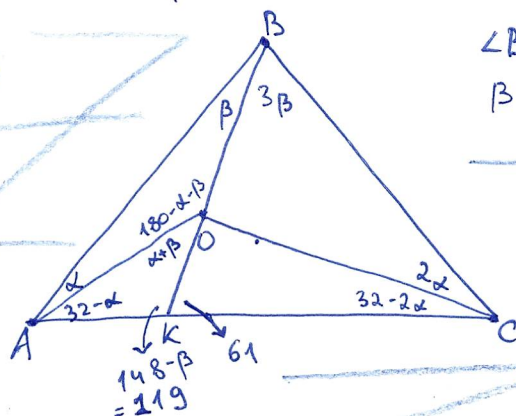
Тогда $\log_a 2 + 1 - 1 = 2026$
 $\log_a 2 = 2026$
 $a^{2026} = 2$
 $a = \sqrt[2026]{2}$

Если $a > 1$, то $\log_2 a > 0 \Rightarrow (a^x - a)(a^x - 2a) \geq 0$

Но это будет верно для очень маленьких и очень больших $x \Rightarrow$ решение - не отрезок.

Ответ: при $a = \sqrt[2026]{2}$

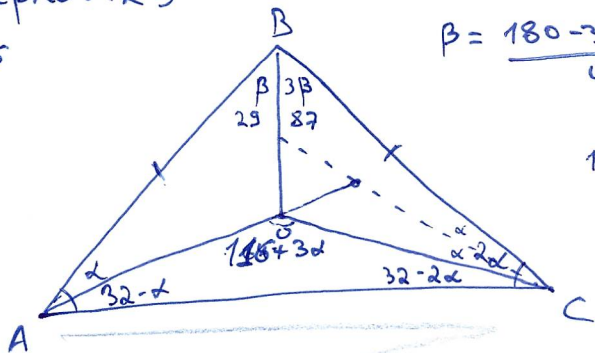
Н6)



$\angle B = 180^\circ - 32^\circ \cdot 2 = 116^\circ$
 $\beta = \frac{\angle B}{4} = 29^\circ$

Черновик 3

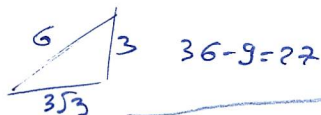
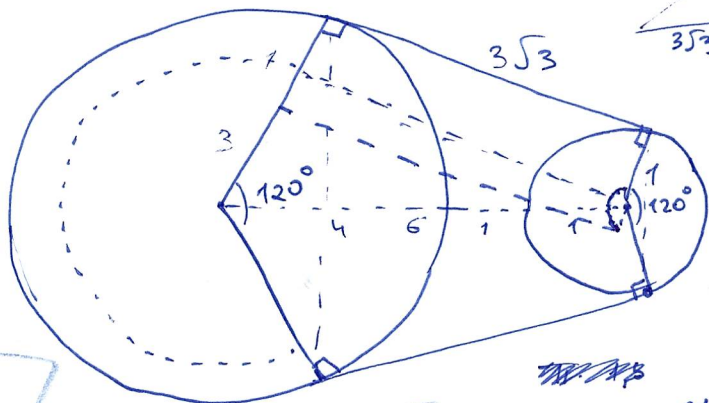
№6



$$\beta = \frac{180 - 32 - 32}{4} = \frac{148 - 32}{4} = \frac{116}{4} = 29^\circ$$

$$180 - (64 - 3\alpha) = 116 + 3\alpha$$

№7



$$2\pi \cdot 0,5 \cdot \frac{240}{360} = \pi \cdot \frac{2}{3}$$

$$2\pi \cdot 1,5 \cdot \frac{240}{360} = \pi \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 2\pi$$

$$\frac{8\pi}{3} + 6\sqrt{3}$$

Черновик 2
 N4 $\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

1) $a > 0$

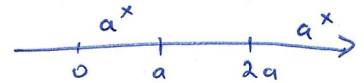
2) $\frac{(a^x)^2 - 3 \cdot a \cdot a^x + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

$a^x = t : \frac{t^2 - 3at + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$

$a \in (0; 1)$
 $\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0$

$a^x \in [a; 2a]$ "2027"
 $X \in [1; \log_a 2 + 1]$
 N5) $\text{tg } x \text{ tg } y \text{ tg } z = ?$
 $a^{2026} = 2$
 $\log_a 2 = 2026$

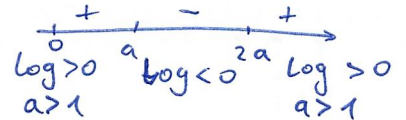
$a > 1 : a^x = 2a$
 $a^{x-1} = 2$



$x \in (-\infty; 1) \cup (1; \log_a 2 + 1]$

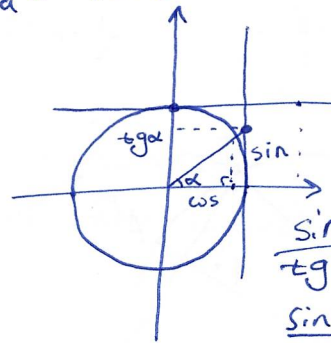
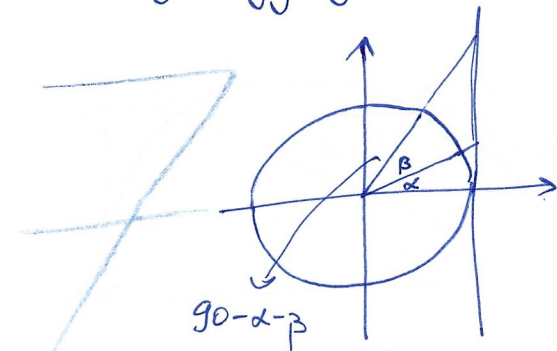
$a < 1 : a^x \in [a; 2a]$
 $x \in [1; \log_a 2 + 1]$

$\log_a 2 = \frac{2027}{2026}$



$t \in (-\infty; a) \cup (2a; +\infty)$

$a^x \in (-\infty; a) \cup (2a; +\infty)$
 $a^{\frac{2026}{2027}} = 2$



$\frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sin}{\text{tg}} = \frac{\cos}{1}$

$\frac{\sin}{\cos} = \text{tg}$

$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\text{tg} \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \text{tg} \alpha \sin \beta}$

$= \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$

$\cos(30 + 60) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}(\alpha + \beta + 90 - \alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha + \beta) + \text{tg}(90 - (\alpha + \beta))}{1 - \text{tg}(\alpha + \beta) \cdot \text{tg}(90 - (\alpha + \beta))}$

$= \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta} + \text{tg} \delta$
 $\frac{1 - \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta} \cdot \text{tg} \delta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$

$= \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta + \text{tg} \delta - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta \text{tg} \delta}{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta - (\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta) \text{tg} \delta} = \text{tg}(\alpha + \beta + \delta)$

$\frac{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta - (\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta) \text{tg} \delta}{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta - (\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta) \text{tg} \delta} = \text{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$

$\mathbb{E} - P$

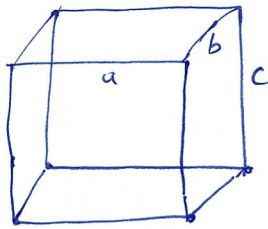
$1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta - (\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta) \text{tg} \delta = 0$

$\text{tg} \alpha \text{tg} \beta + (\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta) \text{tg} \delta = 1$

$2(\text{tg} \alpha \text{tg} \beta + \text{tg} \alpha \text{tg} \delta + \text{tg} \beta \text{tg} \delta) = 2$

Черновик 1

N1)



$$abc + 2(ab + bc + ac) + 4(a + b + c) = \boxed{2026}$$

$\begin{matrix} \text{bc} \\ \text{12} \\ \text{23} \\ \text{6} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{bc} \\ \text{23} \\ \text{6} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{bc} \\ \text{23} \\ \text{6} \end{matrix}$

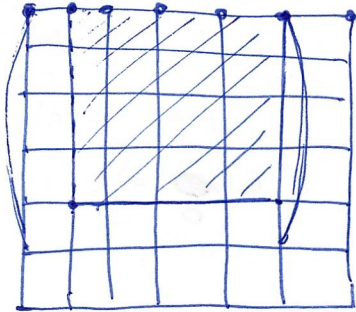
abc : 2 одно четное, два нечетных

$$ab \cdot (c+2) + 2(a+b) \cdot c + 4(a+b) + 4c$$

$$ab(c+2) + a+b(2c+4) + 4c = (c+2)(2a+2b+ab) + 4c = 2026$$

$$1 \cdot 3 \cdot 20 + 2(3+60+20) + 4(23) = 60 + 2 \cdot 83 + 92 = 60 + 166 + 92 = 60 + 258 = 318$$

N2)



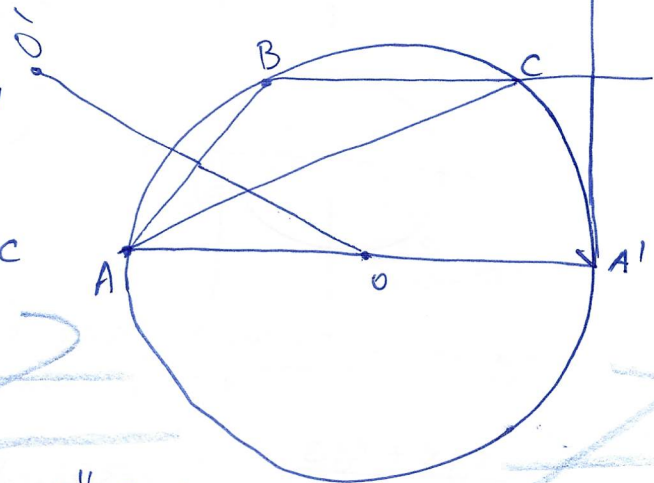
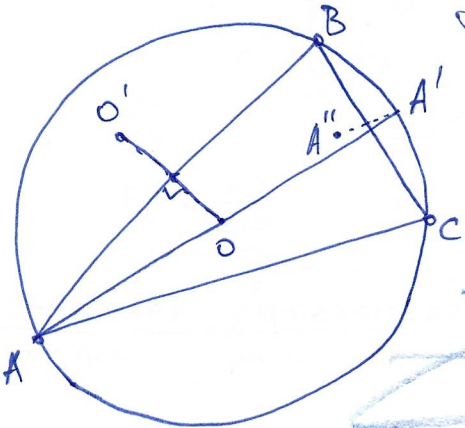
$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 2(6+12+8) + 4 \cdot 9 = 2026$$

$$24 + 2 \cdot 26 + 36 = 112$$

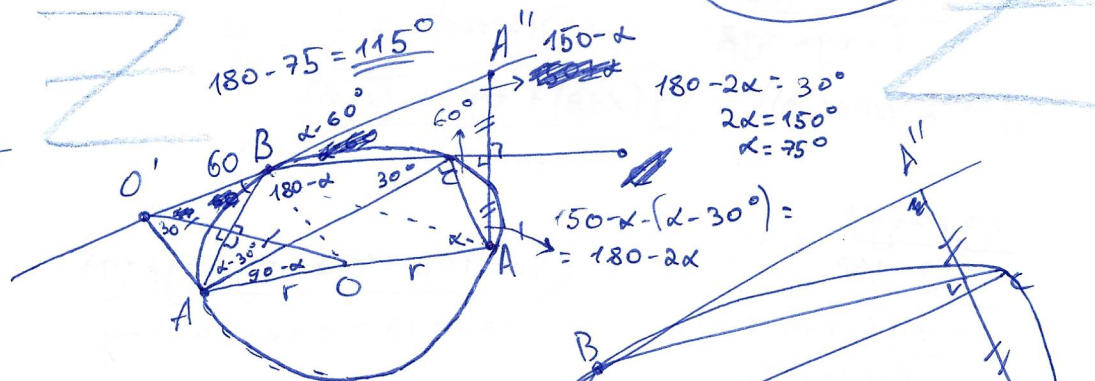
Пусть a : 2

$$\frac{a}{2} \cdot b \cdot c + ab + bc + ac + 2(a+b+c) = 1013$$

N3)



$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 891 \\ 396 \\ \hline 4851 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 485100 \\ 4 \\ \hline 1940400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 5 \\ \hline 495 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 495 \\ 4 \\ \hline 1980 \end{array}$$

