0 888982 540000

88-89-82-54
(123.17)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Поповой Василисы Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

 60 (Шестьдесят)

88-89-82-54 (123.17)

Чистовик

Задача 1

Пусть длина, ширина и высота прямой прямоугольной призмы равны соответственно a, b, c

По условию $abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$

Заметим, что $(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) + 8$

Значит $(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

$2034 = 2 \cdot 1017 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$

Известно, что a, b и c являются натуральными числами, значит ни один из множителей не равен 1 и не равен 2.

Без ограничения общности пусть $a < b < c$

Рассмотрим, чему могут равняться $(a+2)$, $(b+2)$ и $(c+2)$

$\begin{cases} a+2=3 \\ b+2=3 \\ c+2=226 \end{cases}$ но тогда $a=b$ - противоречие

$\begin{cases} a+2=3 \\ b+2=6 \\ c+2=113 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=111 \end{cases}$ $V = abc = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$

$a+2$ не может быть >3 иначе предположения $a<b<c$ неверно

Ответ: 444.

Задача 2

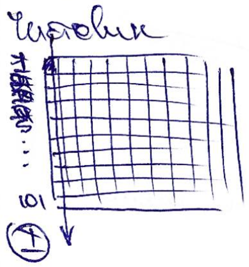
Чтобы в квадрате не было дырки ~~на две части~~, вершина вырезаемого прямоугольника ~~и чтобы он не распался~~ должна находиться на границе данного квадрата обязательно

Например:

Рассмотрим первый случай, когда левый верхний элемент прямоугольника находится на левой границе квадрата

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик



т.е вершина лежит на прямой (I)

если вершина находится в углу квадрата, то правую нижнюю можно выбрать 101^2-1 способами (вычитаем единицу, т.к нельзя вырезать всю фигуру)

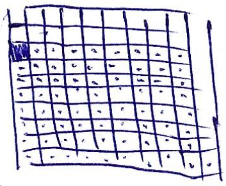
если вершина находится в клетке 2, то правую нижнюю можно выбрать $100^2 \cancel{+1}$ способами ~~(прибавляем самую нижнюю правую клетку)~~

если в клетке 3 – $(100 \cdot 99 \cancel{+1})$ спос.

если в клетке 4 – $(100 \cdot 98 \cancel{+1})$ спос.

⋮

если в клетке 101 – $(100 \cdot 1 \cancel{+1})$ способов.



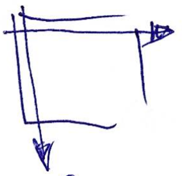
'◦' – подсчеты, где может находится право нижняя клетка прямоугольника

Всего: $101^2-1+\cancel{100}+100\times\sum_{i=1}^{i=100} i$

Это мы рассмотрели вырезы вот такого вида

Аналогично рассматривая еще 3 направления, получаем

для

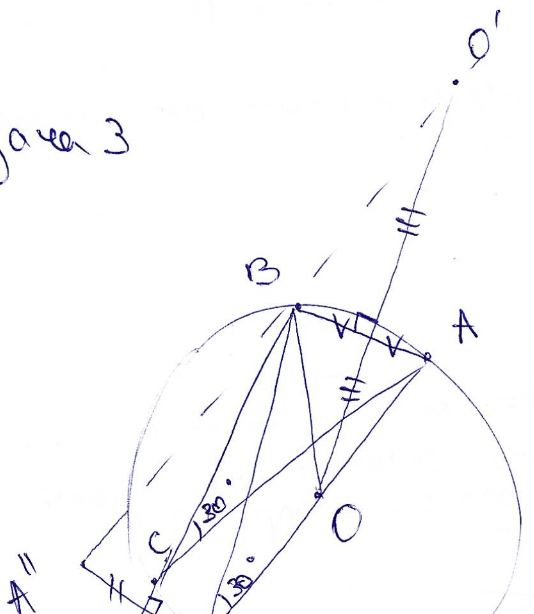


Всего $101^2-1+2\cdot(\cancel{100}+100\cdot\sum_{i=1}^{i=100})=102\cdot100\cancel{+200}+2\cdot100\cdot\frac{101\cdot100}{2}=10200\cancel{+200}+1010000=1020200$

Тогда всего способов: $2\cdot1020200=2040400$

Ответ: 2040400

Задача 3



Решение:

$\angle BOA = 2\angle BCA = 60^\circ$

ΔBOA – равносторонний

Значит $BA \cap OO'$ в середине BA, т.е $BO'A$ также является равносторонним

$A'A \parallel O'A''$ т.к $OBO'A$ – параллелограмм.

$\angle BA'A = \angle BCA = 30^\circ$

$\Delta A''BA'$ – равнобедренный

BC – биссектриса

$\angle A''BA' = \angle BA'A = 30^\circ$

Значит $\angle CBA' = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

88-89-82-54
(123,17)

$\angle B = \angle CBA' + \angle A'BA = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ ($\angle A'BA$ опирается на диаметр)

Ответ: 105°

Задача 5

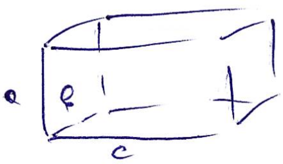
$tg x + tg y + tg z \quad 0 < x, y, z < \frac{\pi}{2} \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$tg\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \frac{\cos(x+y) - 0}{0 + 1 \cdot \sin(x+y)} = ctg(x+y)$

$tg x \, tg y \, ctg(x+y) = \frac{\sin x \sin y \cos(x+y)}{\cos x \cos y \sin(x+y)}$

Чистовик

Черновик



$a \neq b \neq c \in \mathbb{N}$

$abc + 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) = 2026$

$1000 + 2\cdot 300 + 4\cdot 30 = 1000 + 600 + 120$

$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2\cdot 1017 = 2\cdot 3^2 \cdot 113$ простое

$2\cdot 3\cdot 3\cdot 113$

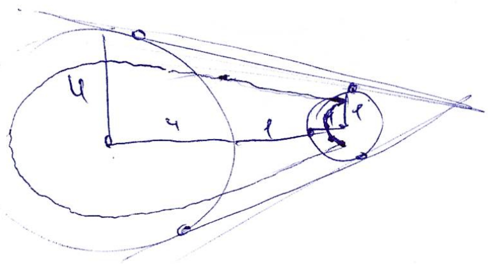
6 3 113

3 3 226

$\begin{cases} a+2=6 \\ b+2=3 \\ c+2=113 \end{cases}$ $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ c=111 \end{cases}$ $V=444$

3, 6, ~~9~~, ~~18~~, 226, 339, ~~113·6~~,

$\begin{cases} a+2=3 \\ b+2=3 \\ c+2=226 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=224 \end{cases}$ $V=224$ $a\neq b\neq c$!!



~~$100^2+1=2$.~~

Черновик

$a>0$

(4) $\dfrac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$ $\quad a\neq 1$ $a:\ x\in[k,\ k+2026]$

$(a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2)\log_2 a\geq 0$

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geq 0$

$a^2(a^{2x-2}-3a^{x-1}+2)=0$

$a^2(a^{2x-2}-3a^{x-1}+3-1)=0$

$a^{2(x-1)}-1-3(a^{x-1}-1)=(a^{x-1}-1)(a^{x-1}+1)-3(a^{x-1}-1)=$

$=(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\cdot a^2\cdot\log_2 a\geq 0$

$a^{x-1}-1=0$ $\quad a^{x-1}=2$ $\quad a^2=0$ $\quad \log_2 a=0$

$a^{x-1}=1$ нет реш $\quad \log_a 2=x-1$ $\quad a=0$

~~$a=0$ $x\neq 1$~~ $\quad a=1$ $\quad x=\log_a 2+1$

$\log_a 1$

$tg(a-b)=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\dfrac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\dfrac{tg a-tg b}{1+tg a\, tg b}$

(5) max $tgx+tgy+tgz$ $\quad 0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$, $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$tgx\in(0;+\infty)$ $\quad tg\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)=\dfrac{tg\frac{\pi}{2}-tg(x+y)}{1+tg\frac{\pi}{2}tg(x+y)}=\dfrac{\cos(x+y)-0}{0+1\cdot\sin(x+y)}$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$

$tgx\,tgy\,ctg(x+y)=\dfrac{\sin x\sin y\cos(x+y)}{\cos x\cos y\sin(x+y)}\to\max\to ctg(x+y)$

$=\dfrac{\sin x\sin y(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}{\cos x\cos y(\sin x\cos y+\sin y\cos x)}$

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$(a+b+c)^3\geq 3^3 abc$ $\quad \left(\frac{\pi}{6}\right)^3$ $\quad a=b=c$

$abc\leq\dfrac{(a+b+c)^3}{27}=$ $\quad tgx=tgy=tgz$

$116\,|\,4$, 29

(6) [?] $\dfrac{\angle BOA}{\angle BAO}$

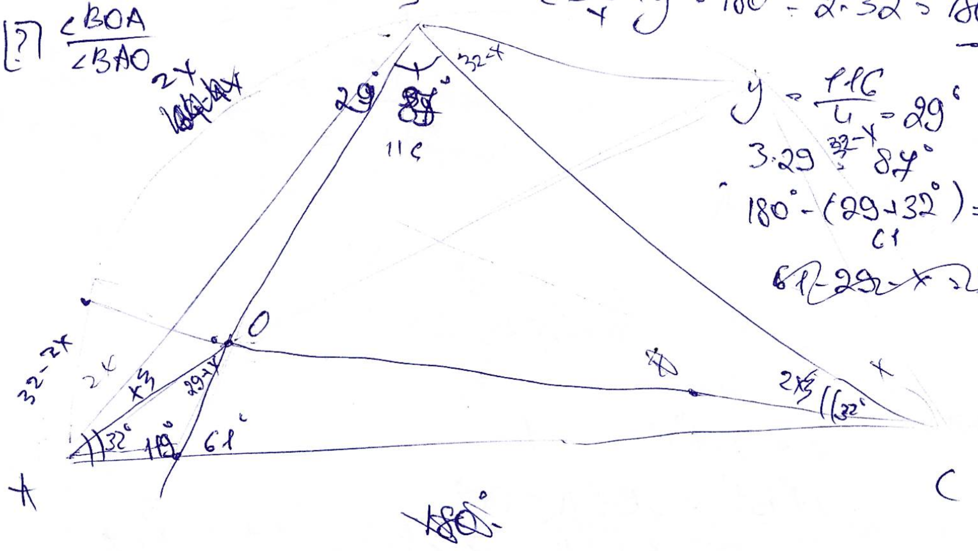
$\angle B=4y=180^\circ-2\cdot 32=180^\circ-64^\circ=116^\circ$

$y=\frac{116}{4}=29^\circ$

$3\cdot 29=87^\circ$

$180^\circ-(29+32^\circ)=119$

$61-29-x=32-x$



Черновик

$a \neq b \neq c \in \mathbb{N}$

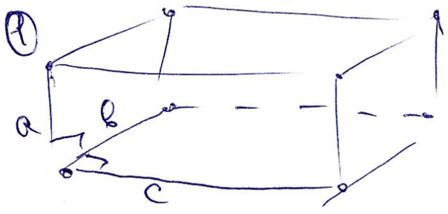
$abc + 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) = 2026$

$45 \times 45 = 2025$, $2025+1$, $1013 \cdot 2$

? $\min abc$

$(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$

(1)



$abc \vdots 2$

$(a+1)(b+1) = ab+a+b+1$

$abc + 2(a+1)(b+1) + 2(a+1)(c+1) + 2(b+1)(c+1)$

$= 2026 - 6 = 2020$

$abc + (a+1)(b+c+2) + (b+1)(a+c+2) + (c+1)(a+b+2) = 2020$

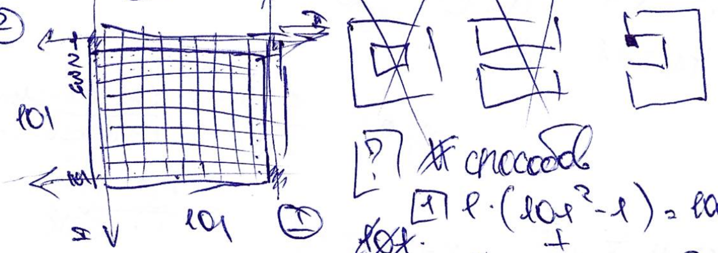
$(a+2)(b+2)(c+2) =$

$= abc + 2ab + 2ac + 4a + 2bc + 4b + 4c + 8$

$(a+1)(b+1)(c+1) + ab + ac + bc + 3(a+b+c) = 2027$

$(a+1)(b+1)+$

(2)



? # способов

I $\boxed{1}\ 1\cdot(101^2-1) = 100\cdot 102$ всё вырезать нельзя

$\boxed{2}\ 1\cdot(100^2+1)$

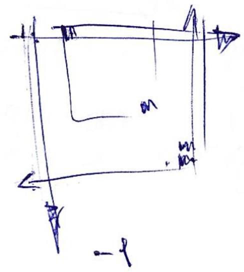
$\boxed{3}\ 1\cdot(100\cdot 99+1)$

$\boxed{4}\ 1\cdot(100\cdot 98+1)$

$\vdots$

$\boxed{101}\ 1\cdot(100+1)$

100



$100\cdot 102 + \underset{\smile}{100} + 100\cdot\sum_{i=1}^{100} i = 10800 + 100 + 100\cdot\frac{101\cdot 100}{2} =$

$= 10300 + 100\cdot 5050 = 515300$

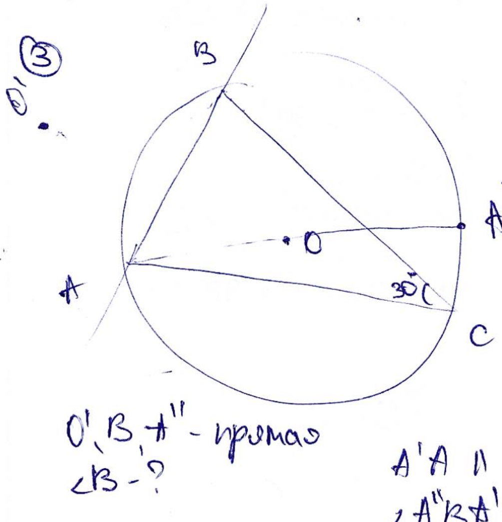
II $100\cdot 102 + 2(100 + 100\times\sum_{i=1}^{100}) = 10800 + 1010200 = $ 0!

505000, 10300, 505100

$\frac{10200}{1020400}$

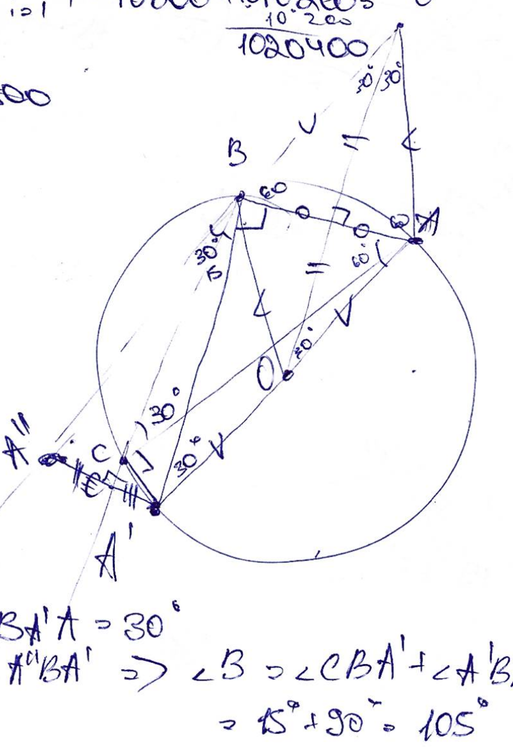
III и IV $1020400 \times 2 = 2040800$

(3)



O', B, A'' — прямая

$\angle B$ — ?



$A'A \parallel A''O'$

$\angle A''BA' = \angle BA'A = 30^\circ$

BC — бисс $\angle A''BA'$ $\Rightarrow \angle B = \angle CBA' + \angle A'BA =$

$= 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$