0 865651 130003

86-36-51-13
(122.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва.
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Панско~~г~~о Радомира Денисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «29» 03. 2026 года

Подпись участника Пан

черновик.

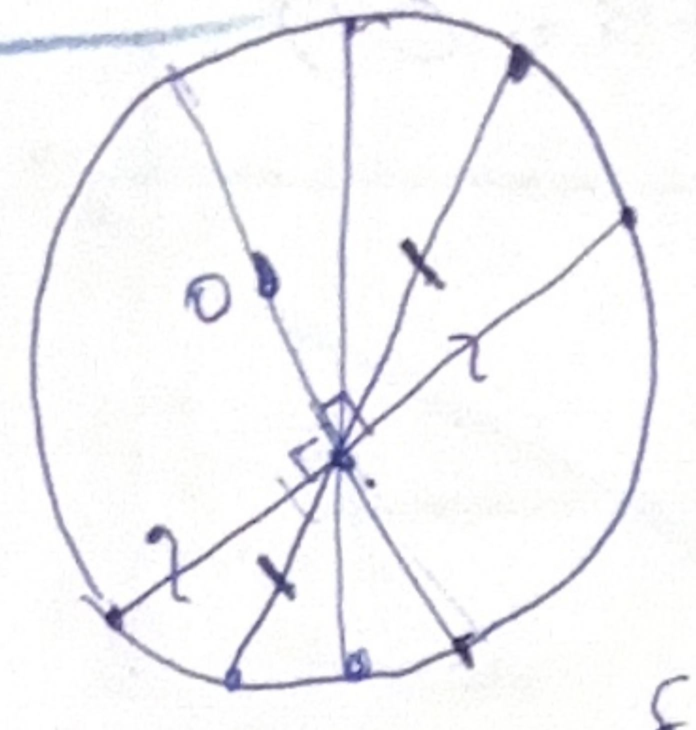
$9999 \cdot 9 = 89991$

R=5

Ответ: 10

$n = 1000$

$9999 \cdot 9999 = 99980001$

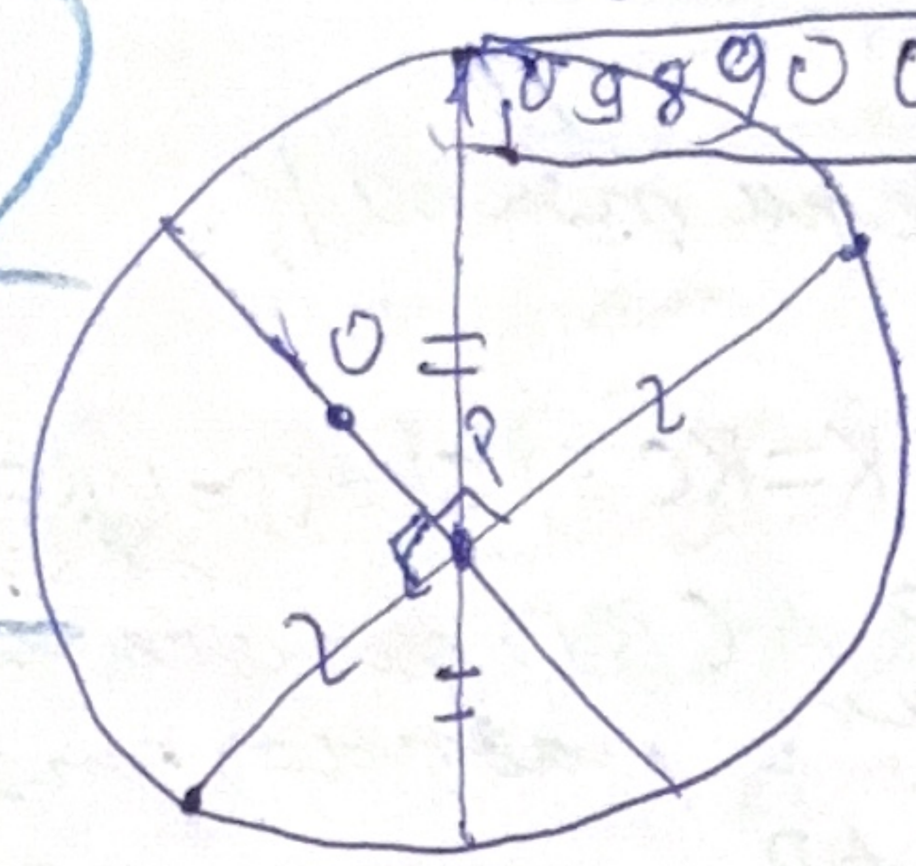


$\overline{abcd} = n;\ n^2 = \overline{abcd}\ldots$

$\overline{abcd} < 10000$

$n^2 = \overline{abcd} \cdot 10^3 + \overline{abcd} \cdot k$

пусть добавилось 3 или 4 разряда.



$n^2 = n\ldots$

$n^2 = n\ldots = kn$, $k \le 9$

$n \cdot 10^3 + k \cdot n = n^2$, $k = 0$

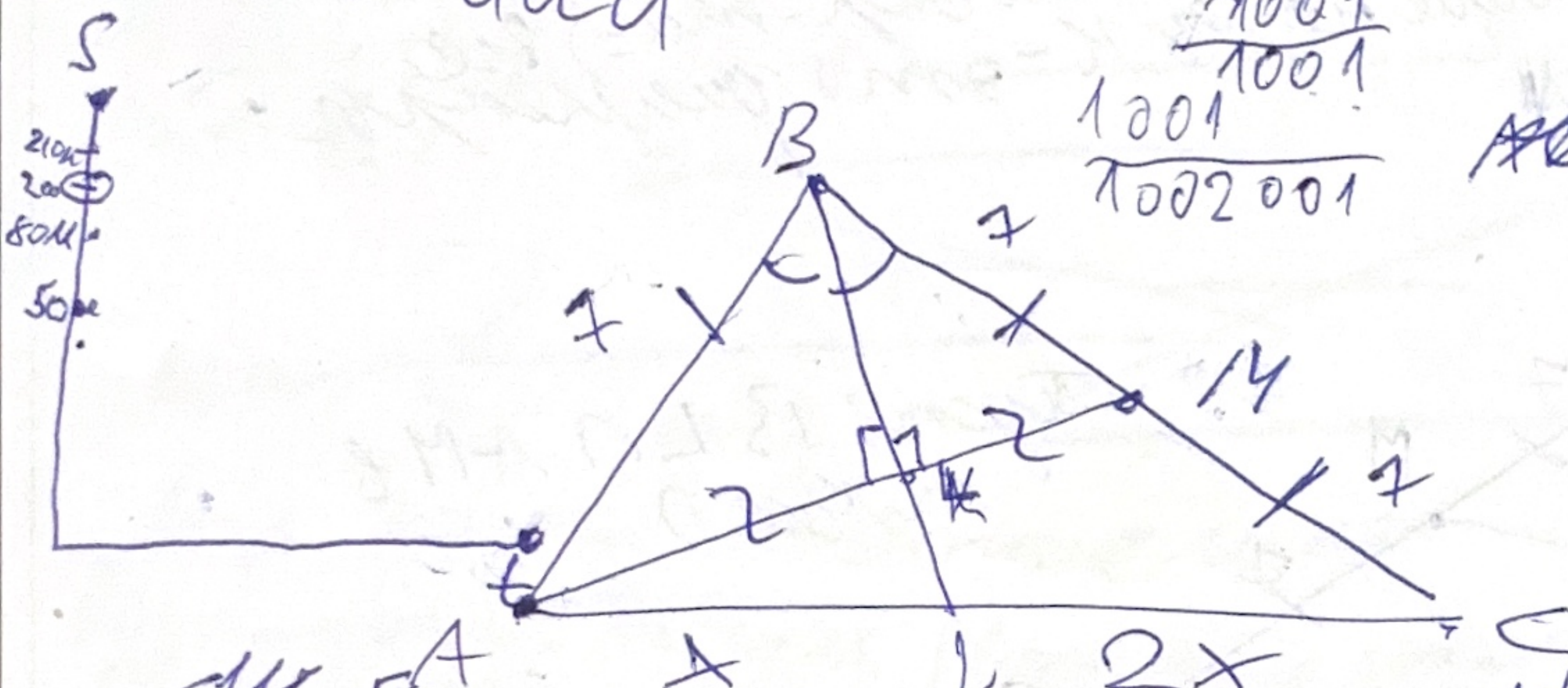
$n \cdot 10^4 + n \cdot k = n^2$

$k = 0$, $n = 10000$

$k = 1$

$1001 \cdot 1001 = 1002001$

$\overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$



$AC > 8$; ≤ 20

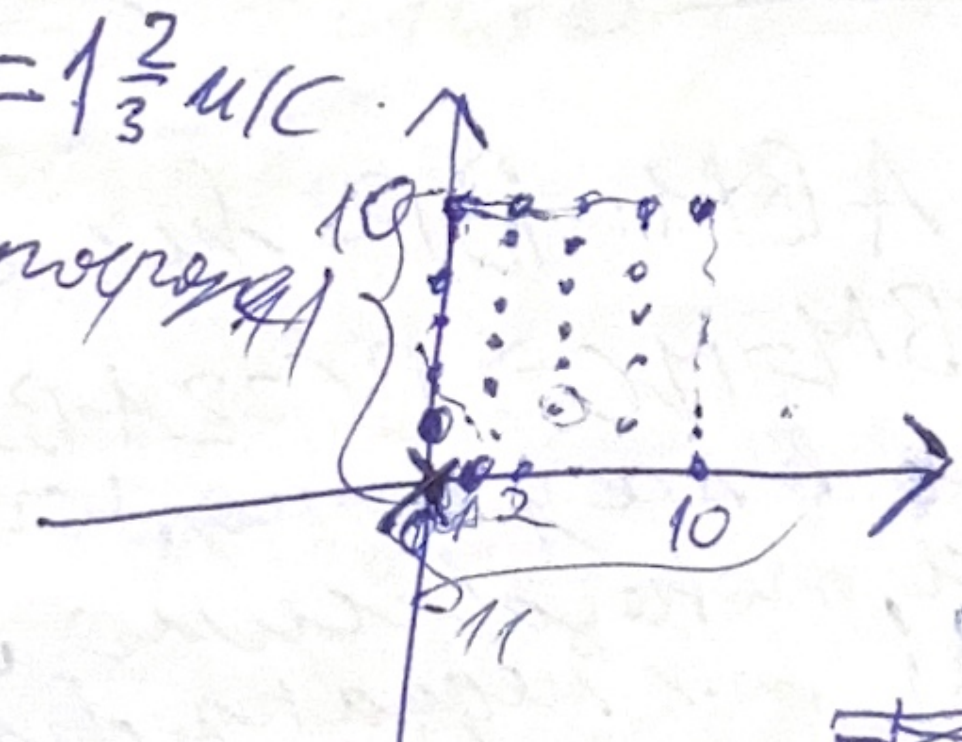
$\frac{50}{30}$ м/с $= 1\frac{2}{3}$ м/с.

на втором светофоре
т состояние может быть

[60–110]

[160–210] с

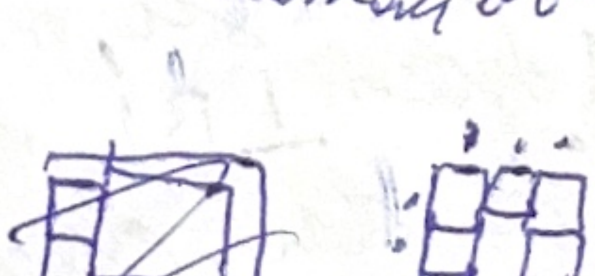
$\frac{200м}{160} = 1\frac{1}{4}\ \frac{м}{с}$



прямоугольник.

в котором 4 треугольника

выбрать 4 потом вычесть 4 с (0;0).

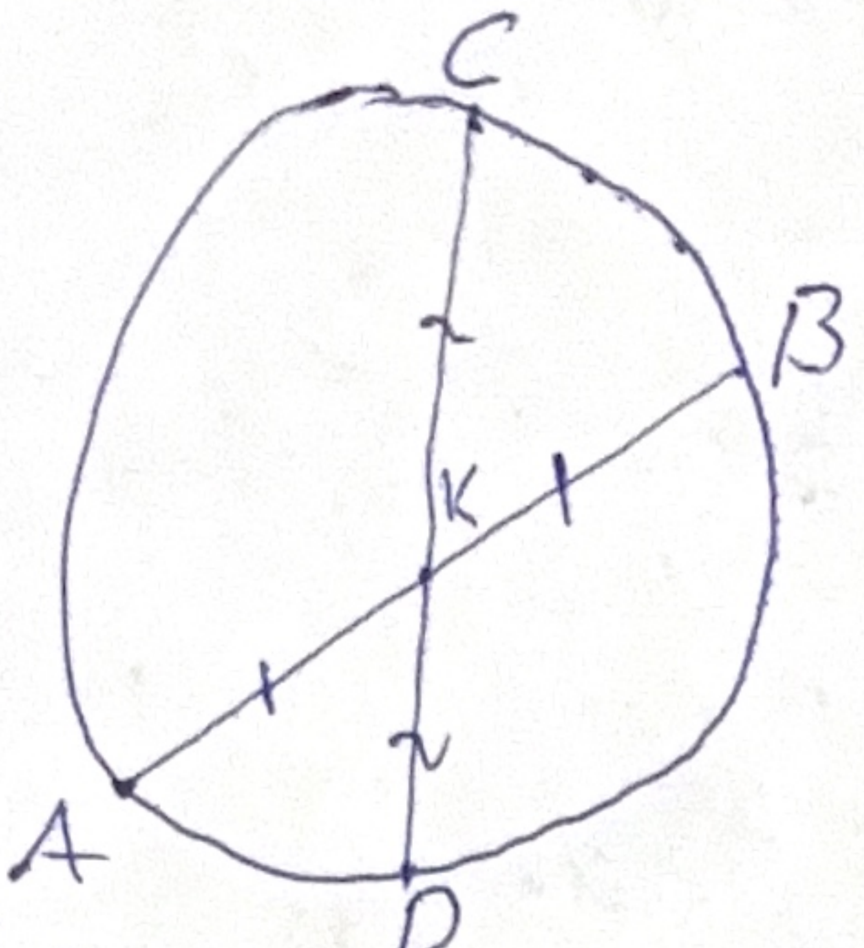


$\frac{1}{13}$

$\left(\frac{121 \cdot 100}{2} - \frac{100}{2}\right) \cdot 4$

Чистовик

1 Ответ: 10; Пусть эти хорды пересекаются в точке K, а ~~равные~~ делящиеся пополам хорды - это AB и CD



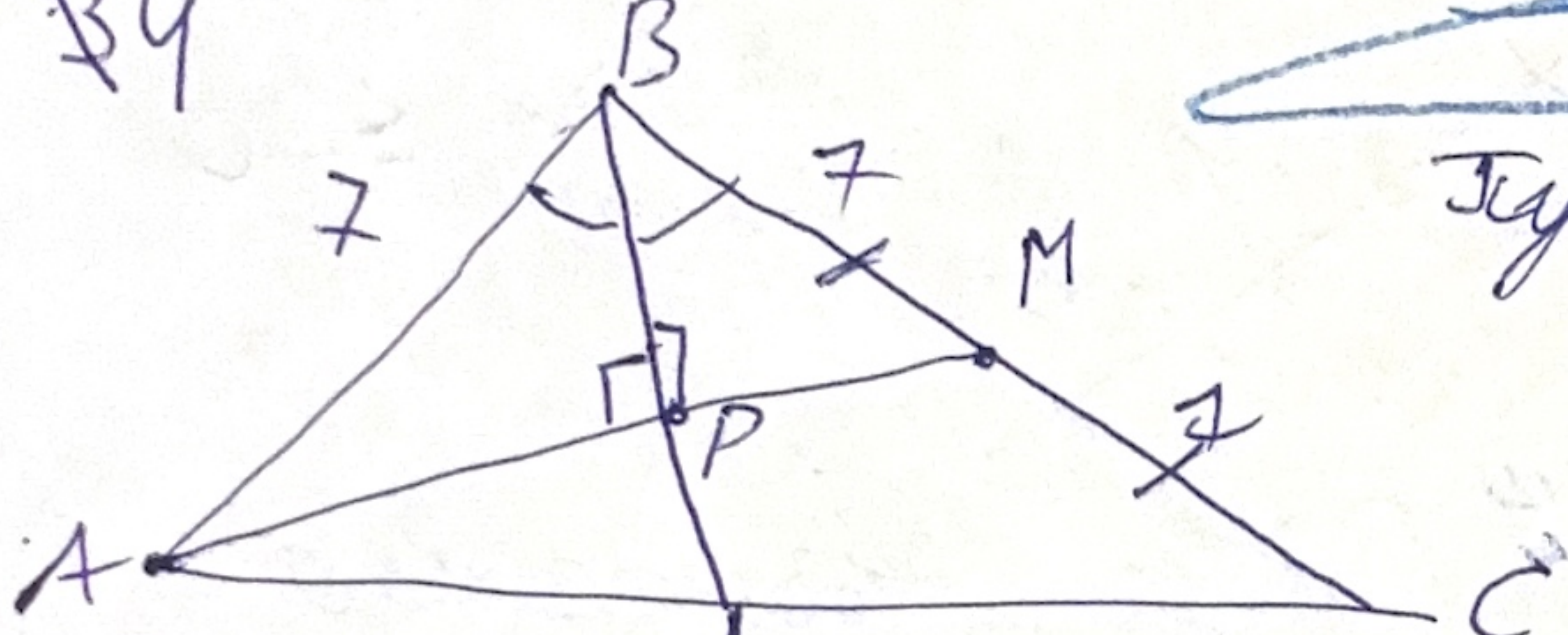
Заметим что из степени точки K:

$-AK\cdot KB=-KC\cdot KD \Rightarrow KC^2=AK^2 \Rightarrow AK=KC \Rightarrow CK=KD=KB=KD \Rightarrow AB=CD$

так как в четырехугольнике ACBD диагонали точкой пересечения делятся пополам и равны => это прямоугольник => $\angle ACB=90°$ => AB - диаметр (т.к на нее опирается угол 90°) => т.к K - середина диаметра => K - центр данной окр-ти => все хорды проходящие через K - это диаметры => они равны $2R=10$

Ответ: 10

B4



Пусть $BL \cap AM$ в точке D

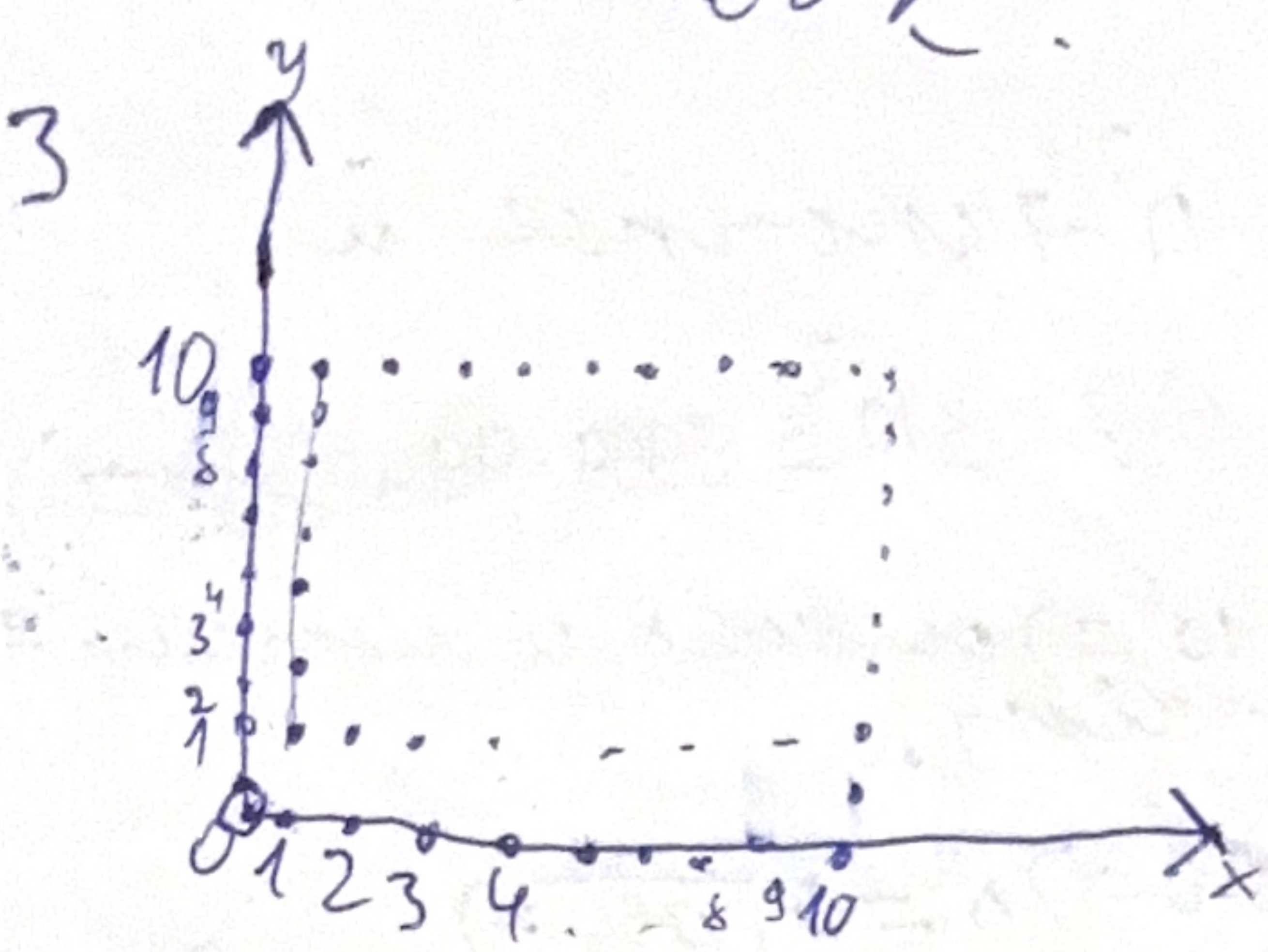
Заметим, что в $\triangle ABM$: BP - бис-са и высота => ABM - р/б => $7=AB=BM=MC \Rightarrow BC=2AB=14$. Тогда заметим, что в $\triangle$ке у которого 2 стороны отличаются в 2 раза, то независимо от 3ей стороны AM будет $\perp BL$ т.к медиана будет отсекать р/б $\triangle$ник => условия будут выполняться, нужно только, чтобы $\triangle ABC$ не был р/б и выполнялось нер-во $\triangle$ка ABC: то есть $AC+AB>BC \Rightarrow AC\geq 8$; и $BC+AB>AC \Rightarrow AC\leq 20$ при $AC\neq 7, \neq 14$ (т.к AC - целое) (т.к $\triangle$ник не р/б =>)

AC=8 => P=29
AC=9 P=30
AC=10 P=31
AC=11 P=32
AC=12 P=33
AC=13 P=34
AC=15 P=36

AC=16 P=37
AC=17 P=38
AC=18 P=39
AC=19 P=40
AC=20 P=41

чистовик

3



Заметим, что в каждом прямоугольнике, у которого координаты вершин — ~~целые~~ натуральные числа, можно выбрать 4 таких прямоугольных Δков 1 2, 3 4, и каждый прямоугольный Δник содержится в ровно одном таком прямоугольнике => надо посчитать кол-во способов выбрать прямоугольный Δник с натуральными координатами.

Всего точек с натуральными координатами (вершин прямоугольников) 100. (координаты:

(1;1), (1;3), (1;4 ... (1;10)

(2;1) (2;2 ... (2;10)

⋮

10;1) – (10;10)

Для этого посчитаем кол-во способов выбрать 2 точки (в разных столбцах и строках), по ним однозначно строится прямоугольник, первую выбрать 100 вариантов, для второй нельзя выбирать, находящиеся в одной строке/столбце с выбранной => 81 вариант и делим на 2 т.к. пара (a;b) и (b;a), и (b;a) и (a;b) — одна и та же пара точек.

$\frac{100\cdot81}{2\cdot2}$ т.к. посчитаем оба ... => прямоугольников

=> прямоугольных треугольников $\frac{100\cdot81}{2\cdot2}\cdot4 =$

$= \frac{200\cdot81}{2} = \frac{16200}{2} = 8100$

Ответ: ~~16200~~ 8100

Чистовик.

2. Разберем 2 случая n^2 — 7значное и n^2 — 8значное, очевидно, что $10^3 \cdot 10^3 \le n^2 \le 9999 \cdot 9999 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^6 \le n^2 < 10^4 \cdot 10^4 \Rightarrow 10^6 \le n^2 < 10^8 \Rightarrow$ больше 8 и меньше 7 знаков в n быть не может.

Если в n^2 7 разрядов $\Rightarrow n^2 = \overline{n\,abc} \Rightarrow$
$n^2 = n10^3 + abc$ т.к. $n \cdot 10^3 \vdots n$, $n^2 \vdots n \Rightarrow abc \vdots n$ но тогда или $abc = 0$, тогда $n^2 = n \cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{n = 10^3}$ и оно подходит или $abc \vdots n$, но тогда $abc \ge n$ $\Rightarrow$ 3хзначное $\ge$ 4х значному, противоречие.

Если n^2 — 8значное $\Rightarrow n^2 = \overline{n\,abcd} \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 = n \cdot 10^4 + abcd$, но $abcd \ge 0$; $n10^4 > n^2$ (т.к. $n < 10^4$ четырех значное меньше 5ти значного) $\Rightarrow$ правая часть должно быть больше левой противоречие

Ответ: $n = 10^3$

5. Ответ: $1{,}25 \frac{м}{с}$

Заметим, что первые 30 секунд сначала ее выезда будет гореть красный на 1ом светофоре $\Rightarrow$ за 30 секунд она должна проехать ≤ 50 метров $\Rightarrow$ ее скорость $\le \frac{50}{30} = 1\frac{2}{3}$ (м/с)

Рассмотрим в какие промежутки времени будет гореть зеленый для пешеходов на втором светофоре. $[60-110$ секунды$]$ с $[160$ по $210]$ секунды с $[260-310]$ секунды...

Если она пойдет туда в период 60–110, то она проехала 200м за $\le$ чем $\frac{200}{110}$ 110 секунд $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ехала со скоростью $\ge \frac{200}{110} > 1\frac{2}{3}$ (м/с), противоречит полученной выше оценке.

Значит она приехала или в инервал с 160 по 210 или в более поздний, причем если подойдет какое-то t из времени 160 по 210 секунд, то скорость девочки в этом варианте будет больше чем при более позднем времени. max скорость девочки в этом варианте $\frac{200м}{160с} = 1{,}25 \frac{м}{с}$, объясним почему этот пример подходит на следующем листе

Чистовик.

Продолжение задачи 5

Если девочка едет со скоростью 1,25 м/с, то на 1ом светофоре она окажется через 40 секунд (значит там уже будет гореть зелёный), а финиширует этот светофор на $\frac{80\cdot 4}{5}=64<80$ секунде => она успеет проехать его на зелёный.

На второй светофор она приедет на $\frac{200\cdot 4}{5}=160$ секунде, так как там загорится зелёный и очевидно за 50 секунд 10 метров проехать она успеет.

6. $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$ ОГР $a\neq 0$.

Домножим на $a\neq 0$.

Если $a<0$, то $a^2+2ax-3x^2\ge 0$.

Это квадратное относительно x, если 2 корня $k_1<k_2$, то

$+\ k_1\ -\ k_2\ +$ $x\in(-\infty;k_1]\cup[k_2;+\infty)$ — больше 2026 решений

Если нет корней, то т.к. это парабола с ветвями вниз, то нет корней

Если один корень k, то $x\in[k,+\infty)$.

Если $a>0$, то $a^2+2ax-3x^2\le 0$

Это квадратное уравнение относительно x, если у него один корень (k), то по методу интервалов: $+\ -\ k\ +$ то $x\in(-\infty;k]$ — больше 2026 решений нер-ва

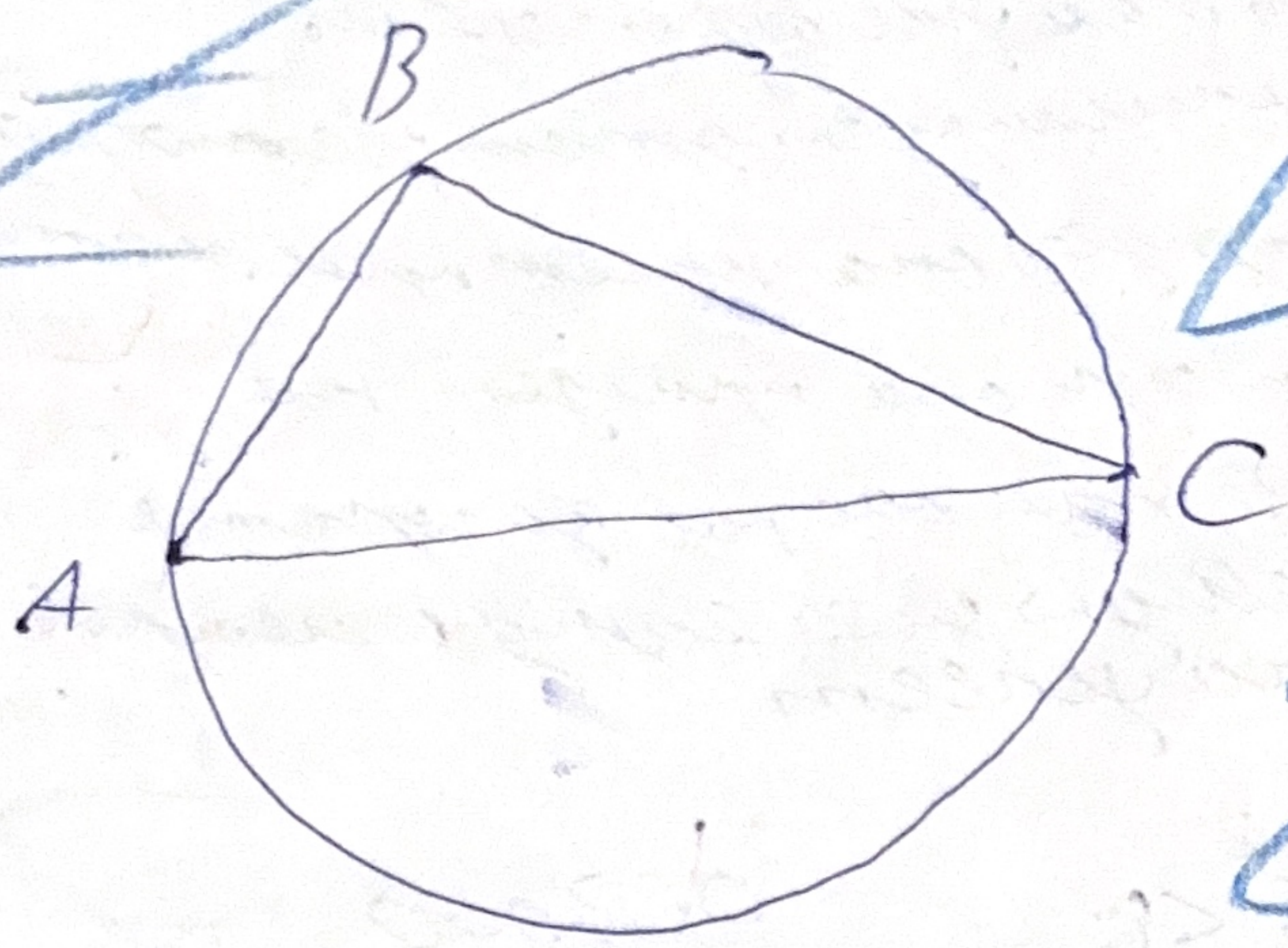
Если 0 корней, то аналогично решений не 2026, а т.к. это парабола с ветвями вниз то 0

Если же решений уравнения 2: k_1 и k_2 где $k_1\le k_2$

$+\ k_2\ -\ k_1\ +$ $x\in[k_2;k_1]$ => разница между корнями должна быть 2026 т.к.

На другом листе

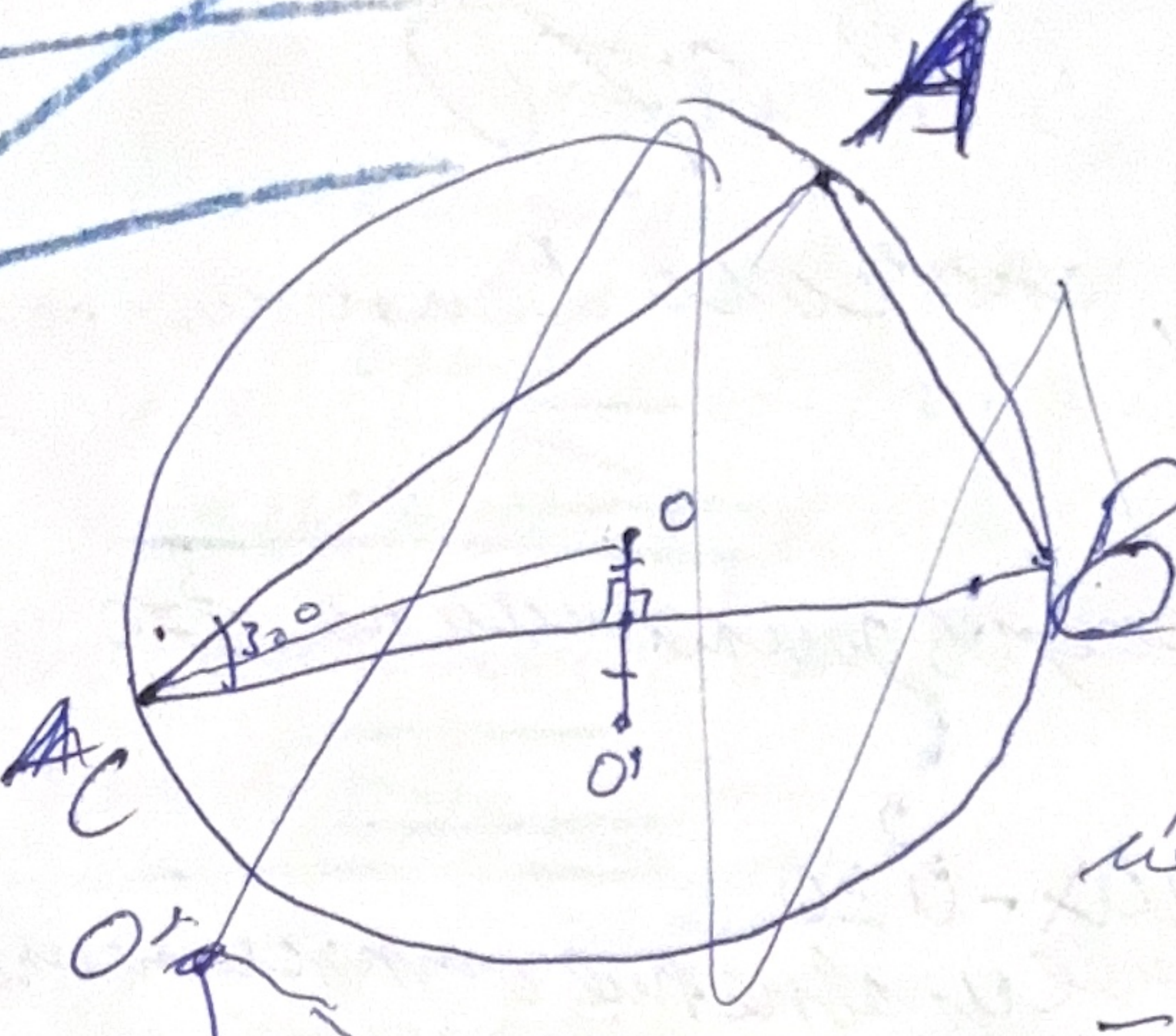
Черновик

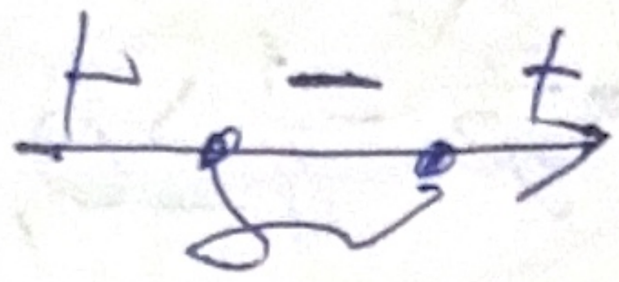


черновик

$a^2 + 2ax + 3x^2 \le 0$,

Если $a > 0$





разница между корнями $= 2026 \Rightarrow$

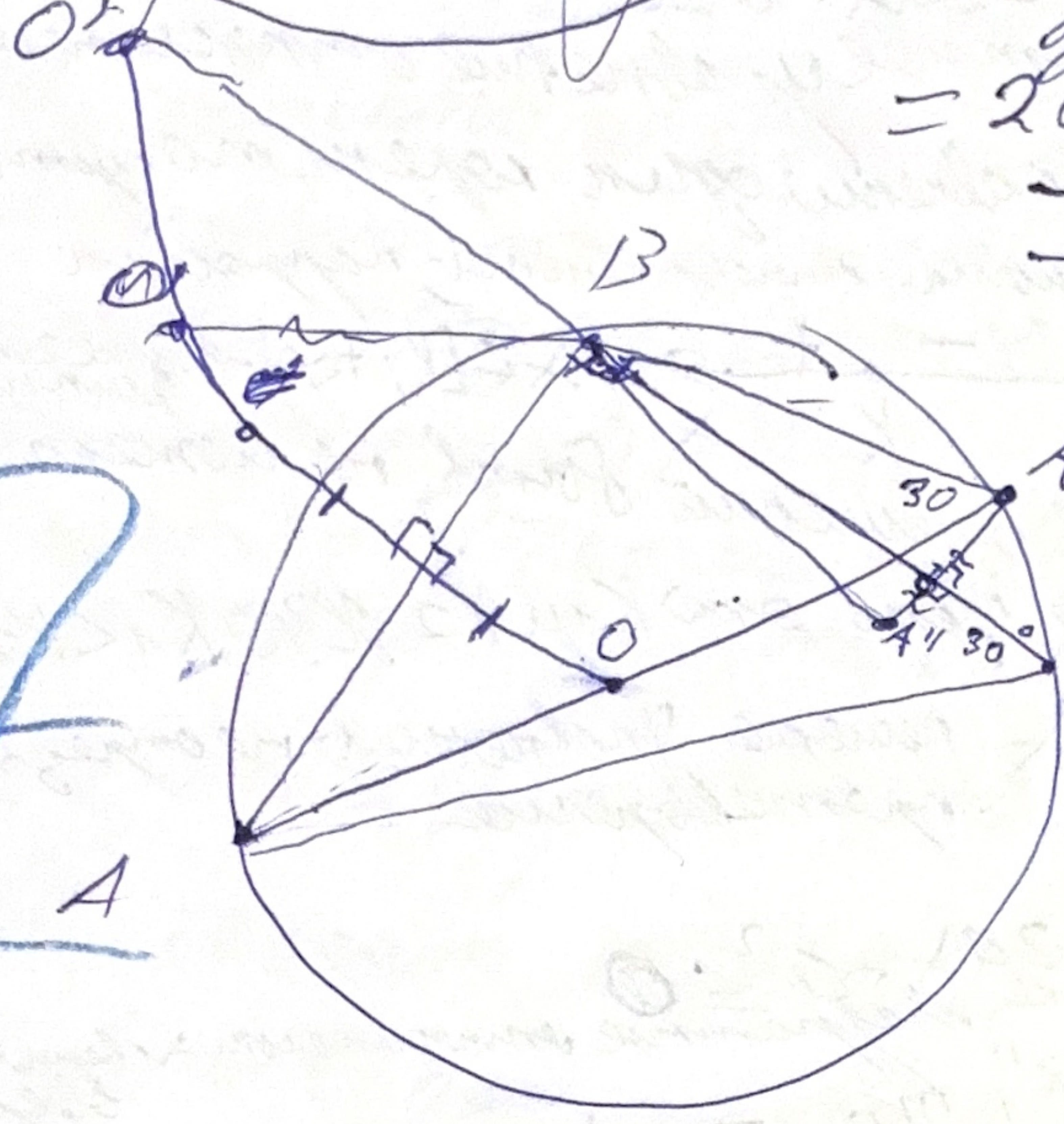
$\frac{-b+\sqrt{D}}{6} - \frac{-b-\sqrt{D}}{6} =$

$= \frac{2\sqrt{D}}{6} = 2026$

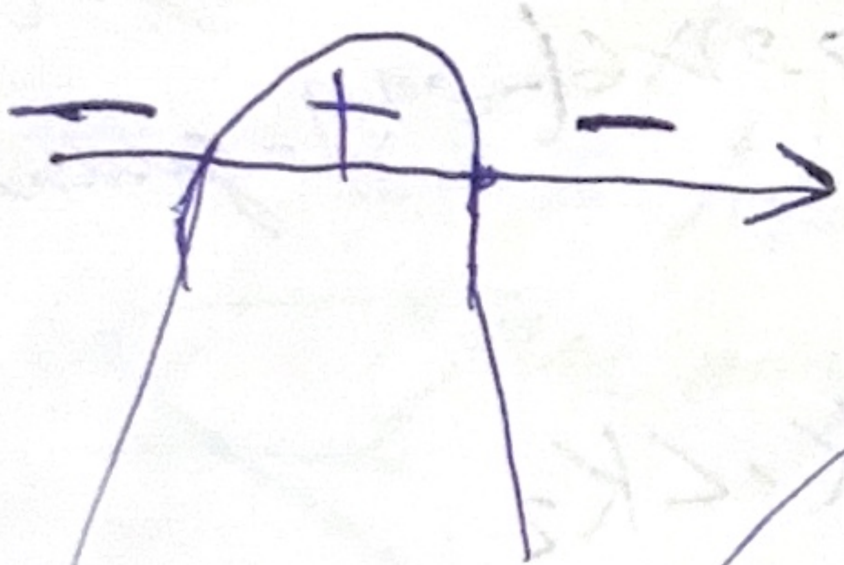
$\Rightarrow \sqrt{D} = 2026 \cdot 3.$

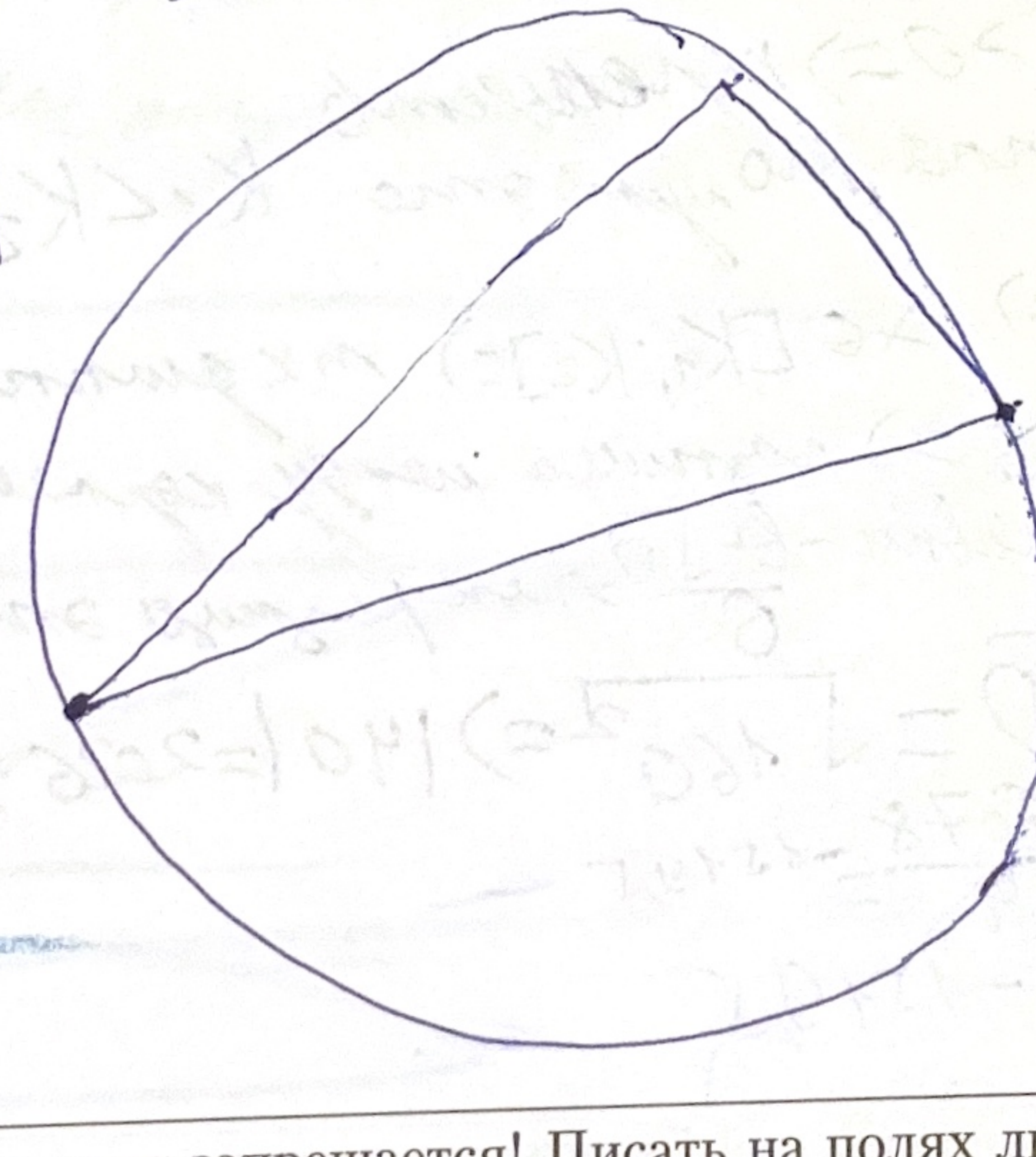
$4a^2 + 12a^2 = (2026 \cdot 3)^2$

$16a^2 =$



$2 - 1 = 1$





Чистовик

Задача 6.

ОДЗ $a \neq 0$

$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3} \leq 0$, сначала домножим на -1

$\frac{3x^2}{a^3}-\frac{2x}{a^2}-\frac{1}{a} \geq 0$, теперь домножим на $a^3 \neq 0$

Если $a^3>0$, то $3x^2-2ax-a^2 \geq 0$

~~Если~~ Это квадратное уравнение относительно a:

Если у этого уравнения один корень, то пусть это K, тогда т.к. график этого уравнения - парабола с ветвями вверх, то $\xrightarrow[K]{-\quad+} x$ $\Rightarrow x \in [K; +\infty)$ - больше 2026 длинна

т.к. $D=4a^2+12a^2>0 \Rightarrow$ о решений быть не может.

Если решения 2, то пусть это K_1 и K_2 НУО $K_1<K_2$, тогда $\xrightarrow[K_1 \quad K_2]{+\quad-\quad+} x$ решение уравнения - не отрезок противоречие

Если $a^3<0$, то $3x^2-2ax-a^2 \leq 0$

Это опять же квадратное относительно x с ветвями вверх

Если один корень „K", то $\xrightarrow[K]{-\quad+}$ $\Rightarrow x \in (-\infty; K)$ - длинна больше 2026

$D=16a^2>0 \Rightarrow$ ~~корней~~ не существует

Если же 2 корня, то пусть это $K_1<K_2$

$\xrightarrow[K_1 \quad K_2]{+\quad-\quad+} x \Rightarrow x \in [K_1; K_2] \Rightarrow$ т.к. длинна отрезка 2026 $\Rightarrow K_2-K_1=2026 \Rightarrow$ разница между корнями равна 2026, а т.к. корни равны $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{6} \Rightarrow$ их разница это $\frac{2\sqrt{D}}{6}=\frac{\sqrt{D}}{3}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{D}}{3}=2026$, $\sqrt{D}=\sqrt{16a^2} \Rightarrow |4a|=2026 \cdot 3$, т.к. $a<0 \Rightarrow a=-\frac{6078}{4}=-1519{,}5$

Ответ: $a=-1519{,}5$

Черновик

Задание 8

У робота 13 вариантов: какую клетку закрасить (по 3 с каждой стороны квадрата и одна в центре)

Удачный исход: когда он красит центральный => итого $\frac{1}{13}$

Ответ: $\frac{1}{13}$

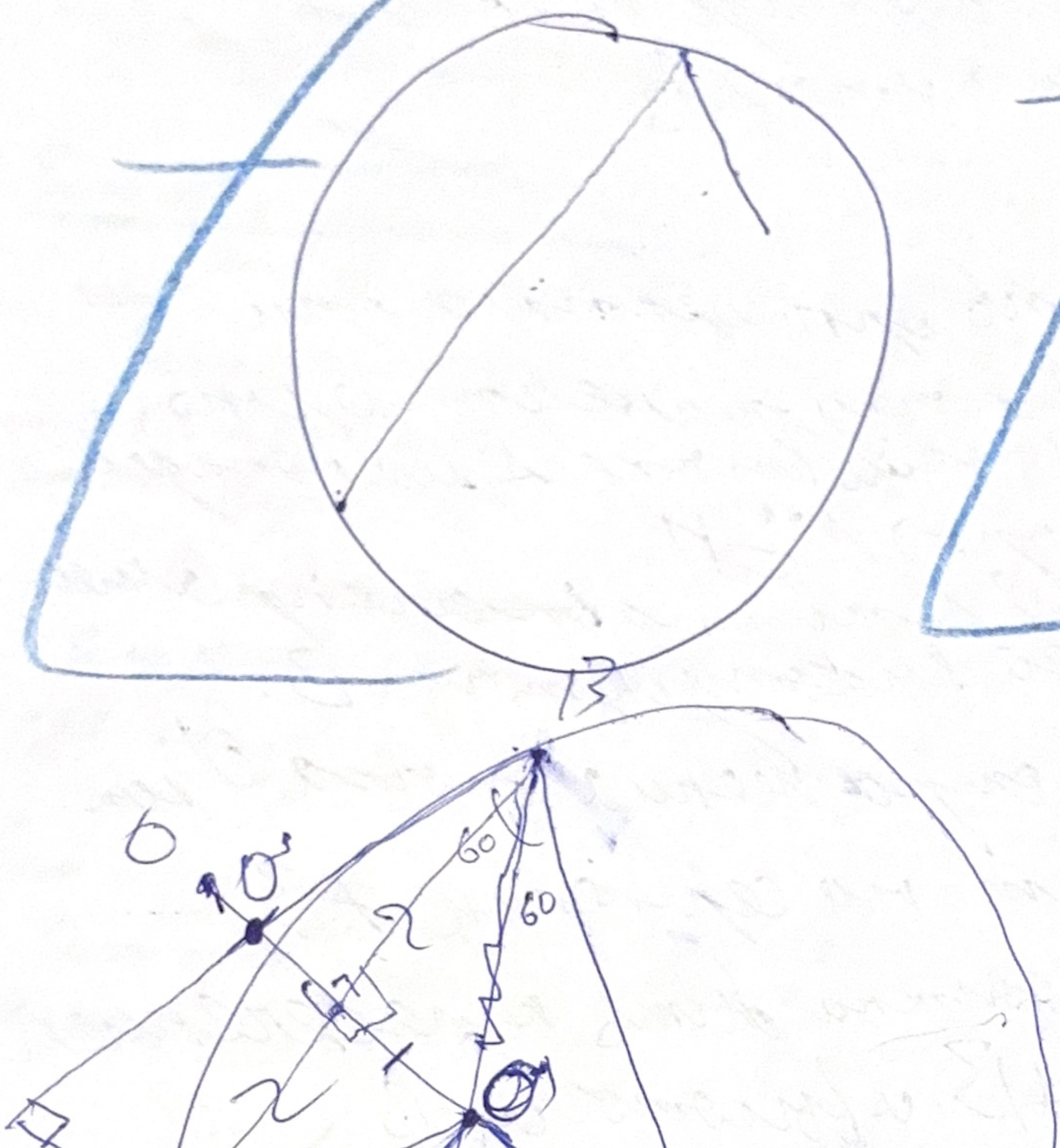
7 Из свойств ортоцентра при отражении точки диаметрально противоположной точке A, мы попадем в ортоцентр => $A'' = H$.

получается точка O' лежит на ~~высоте~~ прямой, содержащей высоту из точки B.

а т.к. после отражения точка O' как и O - лежит на сер-перп к AB, то точка O' должна быть пересечением сер-перп к AB с высотой из B

и т.к. при отражении относительно AB

Черновик



Черновик

7