0 511232 ??0000

51-12-??-22

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11кл, 8 вариант

6МТ:74

Место проведения г. Ульяновск
город

выход: 14.09-14:13

Зайц

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Пирахмедова Тимура Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

70 (Швыдкая) физ

51-11-??-22

~~Чбк~~ Черновик

Задача №1

$\sqrt{3(1-tg^2x)}=2\sqrt{2}\sin x$ возведем в квадрат

$3(1-tg^2x)=8\sin^2x$ ОДЗ: $1-tg^2x\geq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2x\geq0$ при этом

$3-3tg^2x=8\sin^2x$ $\cos x\neq0$ и $2\sqrt{2}\sin x\geq0$

$-x\geq0$

$3-3\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=8\sin^2x \mid\cdot\cos^2x$

$3\cos^2x-3\sin^2x=8\sin^2x\cos^2x$

Пусть $t=\cos^2x \Rightarrow$ т.к. $\cos^2x+\sin^2x=1\Rightarrow\sin^2x=1-\cos^2x$

$\Rightarrow \sin^2x=1-t$

~~$3\cos^2x\ldots$~~

$3t-3(1-t)=8t(1-t)$

$3t-3+3t=8t-8t^2$ перенесем в право

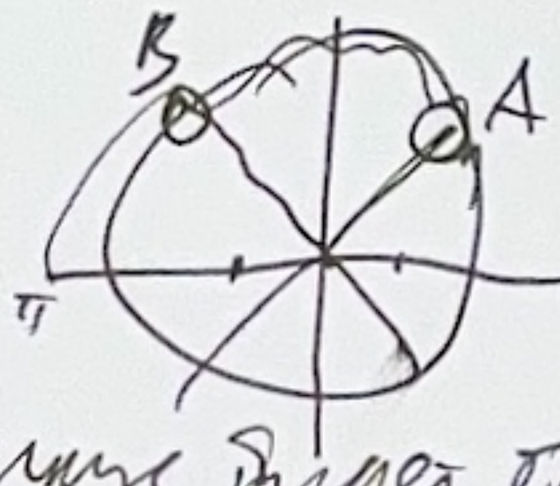
$0=-8t^2+2t+3$

$D=4-4\cdot(-8)\cdot3=100\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-2\pm10}{-16}\Rightarrow$ по ОДЗ

подходят только $t=\frac{-2-10}{-16}=\frac{3}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $t=\cos^2x$, то $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ либо $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Проверим по ОДЗ



$x_1=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi k$

нам подходят только

$x\in[0;\pi]$ иначе синус будет отрицательный $\Rightarrow$

нам подходят $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ и $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

A → B →

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

есть Чистовики в конце

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик задача №8

1. Нер-во имеет вид: $3x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$

Введём замену $d = \log_a x$ тогда $\log_x a = \frac{1}{d}$

неравенство перепишем:

$3x^2 \cdot d - \frac{1}{d} - 2x \geq 0 \Rightarrow \frac{3x^2 d - 2xd - 1}{d} \geq 0$

$3(x \quad -2xd) - 1 = (3xd+1)(xd-1)$ обозначим

$u = x\log_a x$, т.к. $x > 0$ знак знаменателя d

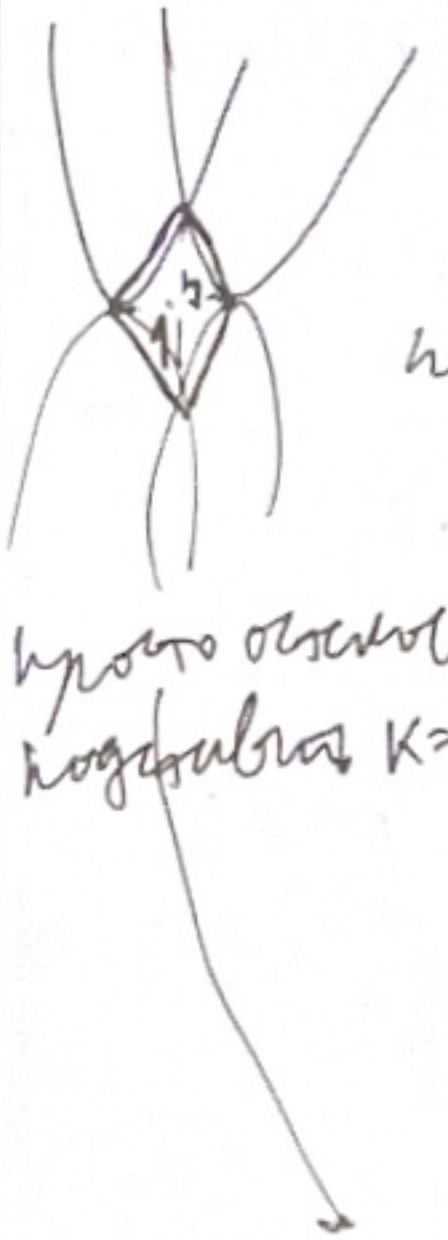
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

~~Черновик~~ Чистовик задача № 7

клеточка образуется пересечением двух смежных парабол по условию $y=2x^2+c$, $y=2x^2+c+1$ и двух смежных парабол $y=-2x^2+d$, $y=-2x^2+d+1$, где $c, d \in \mathbb{Z}$. Пусть $k=d-c$, для того чтобы пересечение сформировало ячейку требуется $k \geq 1$, абсциссы вершин пересечений $2x^2+c=-2x^2+d$ равны $x=\pm\frac{\sqrt{d-c}}{2}=\pm\frac{\sqrt{k}}{2}$ полученный четырёхугольник (дельтоид) имеет взаимоперпендикулярные диагонали, вертикальные диагонали соединяет точки с одинаковыми x и смежными y и её длина $\Delta y=1$, горизонтальная диагональ соединяет точки с одинаковыми $y=\frac{c+d+1}{2}$ и её длина $\Delta x=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}$, $S(k)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})}{2}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{4}$ и эта функция от k

площадь дельтоида

рисунок



строго убывает при $k \to \infty$ $\Rightarrow$ наибольшая площадь достигается при наименьшем $k=1$, ведь это можно легко проверить подставив смежные значения

$$\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{4} \vee \frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}{4}$$

просто очевидно подставляя $k=1$

$$\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1} \vee \sqrt{a+2}-\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{a} \vee \sqrt{a+2}+\sqrt{a-1}$$

$$a+1+a+2\sqrt{a}\sqrt{a+1} \vee a+2+a-1+2\sqrt{a+2}\sqrt{a-1}$$

$$\sqrt{a(a+1)} \vee \sqrt{(a-1)(a+2)}$$

$$a^2+a \vee a^2-a+2a-2$$

$$0 \vee -2 \quad \text{но } 0>-2 \Rightarrow \text{левая}$$

часть больше $\Rightarrow$ в период максимальный дельтоид это $S(1)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{0}}{4}$ $\Rightarrow S(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

~~Черновик~~ Чистовик

5)

симметрия

нулевые углы $\Rightarrow$ нам говорят о том получаем параболические дуги фигуру с симметрией $120°$ в центре, а в вершинах они имеют общую касательную, направленную строго вдоль радиуса описанной окр

Пусть $\overset{\frown}{BC}$ является частью параболы $y=ax^2+d$, симметрично относительно оси y обозначая вершину $B(0,d)$. Радиус опис. окр равен 1 тогда из 1. координат. координаты вершин $A(0,1)$ $B(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$, $C(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$

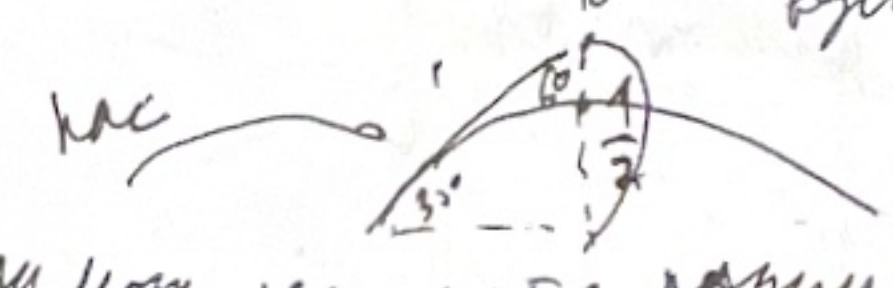
касательная к дуге BC в точке C направлена вдоль вектора OC, угловой коэфф прямой OC равен $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; производная параболы: $y'=2x$ | в точке C: $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}=a\cdot\sqrt{3}$

приравняем угловые коэфф. для нулевого угла: $a\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$ след., параметр исходной параболы $|a|=c=\frac{1}{3}$

находим сдвиг d подставив координату C: $-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+d=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{4}+d=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow d=-\frac{1}{4}$ уравнение $\overset{\frown}{BC}$: $y=-\frac{1}{3}\cdot x^2-\frac{1}{4}$

Впис. окр. в центре $O(0;0)$ касается в вершине дуги BC. и расстояние между ними - это и есть радиус вписанной

Наглядно покажем:



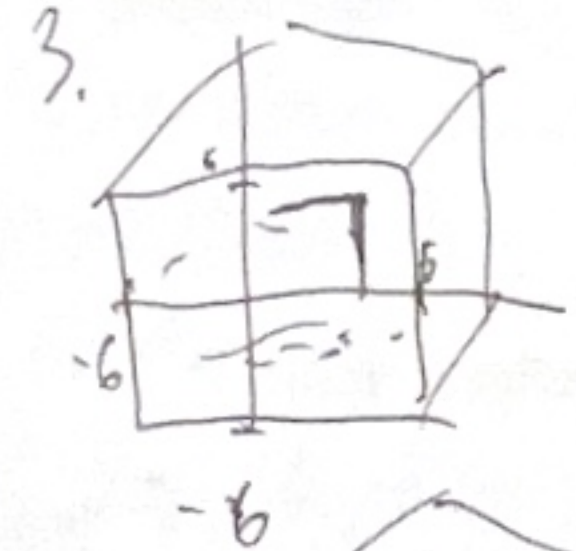
вершина параболы:

$$y_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

тогда можно легко найти радиус: $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$. Ответ: $\frac{1}{4}$

~~Державин~~ Ильович , 13·13·169

3.



$|F| = 13 \cdot 13 \cdot 13 = 169 \cdot 13$

зададим вершину при прямом угле (X, Y, Z) и вершинами A и B на прямых через C и ... осям

C можно выбрать $13^3 = 2197$

выбрать оси: $C_3^2 = 3$ $\frac{3\cdot 2}{2}$

как-то направленные

куски выберем эту точку, отсчитывая от B, на одной оси 12 точек, не включая B

12 для A и 12 для B

$144 \times 3 = 432$

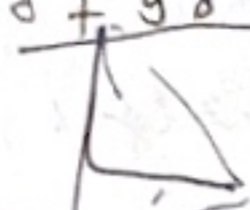
$2197 \times 432 = 4394$

Всего! $13^3 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 3 = 2197 \cdot 432 = 949014$

$13^3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 12$

6502

8788 | 14



~~4. ф. $0 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$ к 6 2 11, 13, 17~~

~~получается~~

~~при наложении кривых у прямоугольных ... на участки как ... , но каждая кривая добавляет отрезки~~

~~$y = \sin 11\pi x$~~
~~$y = \sin 13\pi x$~~
~~$y = \sin 17\pi x$~~

~~катуем ... : $x=0$ и $x=1$ очевидно все эти уравнения равны~~

~~$y = \sin 11\pi x$~~
~~$y = \sin 13\pi x$~~

~~sin ? ? ?~~

~~как ... это ? ? ?~~

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~Державин~~ Григорович Державин

2. $A \vdots S \vdots 9$

$486 + 81 = 567$

$567 + 81 = 648$

$648 + 81 = 729$ ... $+81$

$a_3 + a_5 +$ последние

A - трёхзначное

$S = \frac{A}{9}$ $\frac{A}{S} = k$ $k \vdots 9 \Rightarrow A \vdots 9$ и $S \vdots 9$

9, 18, 27 ...

9 - цифра 9 $9 \cdot 9 = 81$ $\frac{81}{9} = 9$

18 сумма 9

81 - подходит 90

подходит: $9 \cdot 9k$

81, 162 $\frac{162}{9}$

$81 \cdot \frac{486}{18} = \frac{81 \cdot 6}{9 \cdot 2} =$

другие не подходят

если $k \neq 9$ то и ...

$9 \cdot k$

81·5

S=18 81, 162, 243, 324, 405, 810 — цифры ... 9 просто в лоб считаем

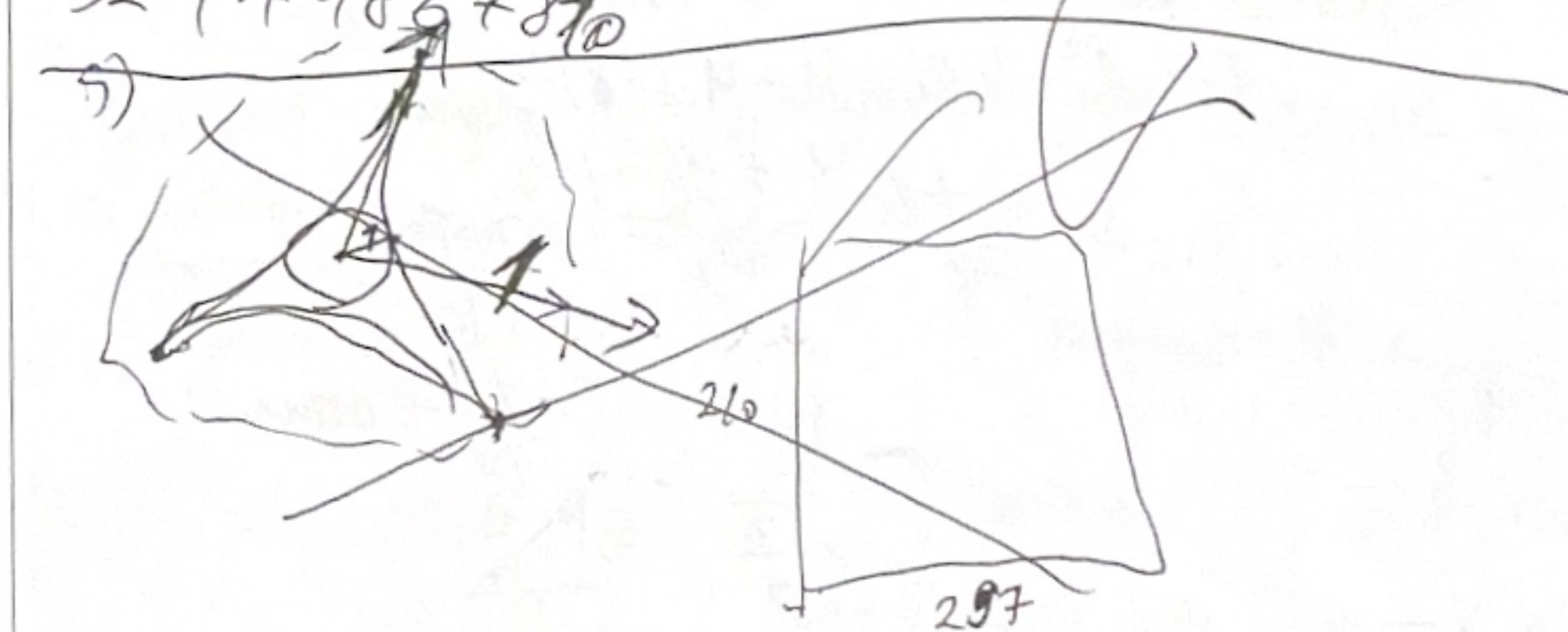
162, 486, 648, 972.

S=27

243 | трёхзначных нет от больше, ведь даже 999/243

$\Rightarrow$ получаем A: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972.

324 + 486 + 810



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$0 \le x \le 1$, $-1 \le y$, 1

$y = ak^{\wedge} + b$

1. $\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$D = 4 - 4 \cdot = 0$

$x^2 - 2x + 1$ $x_1^2 = 1$

$(x-1)$

$3(1-tg^2x) = 4 \cdot 2\sin^2 x$

$3-4$, 5, 6, 7

$3 - 3tg^2x = 8\sin^2 x$

$k=1$ возрастает

$3 - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 8\sin^2 x$ $A(-5,$

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 \ge 0$

корни $\cos 2x = \frac{1}{2}$ и $\cos 2x = -2$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$3 = 8\sin^2 x + \frac{3\sin^2 y}{\cos^2 x}$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

2) 3, 5 и т.д., 7, 9

$3 = 8(1-\cos^2 x) + \frac{3(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$

$t \ne 0$

$\cos^2 x = t$

6) 16

7)

$3 = 8 - 8\cos^2 x + \frac{3 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$t > 0$

8) $3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \ge 0$

$3 = 8 - 8t + \frac{3-3t}{t} \quad | \cdot t$ ← можно умн. если $t \ne 0$

$3t = 8t - 8t^2 + 3 - 3t$

$0 = 5t - 8t^2 + 3 - 3t$

$0 = 2t - 8t^2 + 3$

$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot (-8) \cdot 3$ (32)

$4 + 96 = 100$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{-16}$

$\frac{-2-10}{-16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$\frac{-2+10}{-16}$ = отриц. 0

но $\cos$ → - не подходит

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$ → $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

если $k:2$ то $x = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

Чистовик задача №2

Очевидно что если сумма цифр $S(A) = A$ то при делении удачи может получится число кратное 9 тогда и только тогда, когда $A : 81$ (потому что S забирает одно девятую потенцию) ⇒ ⇒ подходят все числа кратные 81, давайте с вами их проверим (чтобы они были целые и трехзначными:

$162, 243, 324, 405, 486, 81 \cdot 7, 81 \cdot 8, 729, 891$

(567, 648; $\cdot 2$, $\cdot 3$, $\cdot 4$, $\cdot 5$, $\cdot 6$)

из них подходит:

$162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972$

не подходят: ~~486~~, 567, 729, ведь: $\frac{486}{18} = \frac{81 \cdot 6}{18} = 9 \cdot 3$ ← подходит

$\frac{567}{18} = \frac{81 \cdot 7}{9 \cdot 2}$ ← не целое

$\frac{729}{18} = \frac{81 \cdot 9}{18}$ - не целое,

$\frac{891}{18} = \frac{81 \cdot 11}{18}$ - не целое, все остальные целые, ведь мы умножаем на чётное ⇒ ⇒ нам нужны все.

Получили

Олимпиада школьников «Ломоносов»

Заключительный этап 2025/26 учебного года по математике

11 классы

Вариант 8

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt{3(1-\operatorname{tg}^2 x)} = 2\sqrt{2}\sin x.$$

Задача 2. В множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9 (не обязательно одно и то же для всех этих чисел). Найдите все трехзначные числа, входящие в множество A и, расположив их в порядке возрастания, найдите сумму третьего из них, пятого и предпоследнего.

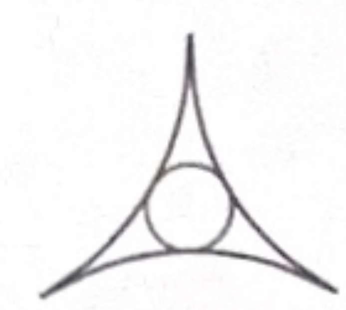
Задача 3. Пусть F — множество точек в пространстве, все координаты которых являются целыми числами, не превосходящими по модулю 6. Найдите количество прямоугольных треугольников, все вершины которых принадлежат F, а каждый из катетов параллелен одной из трех координатных осей.

Задача 4.

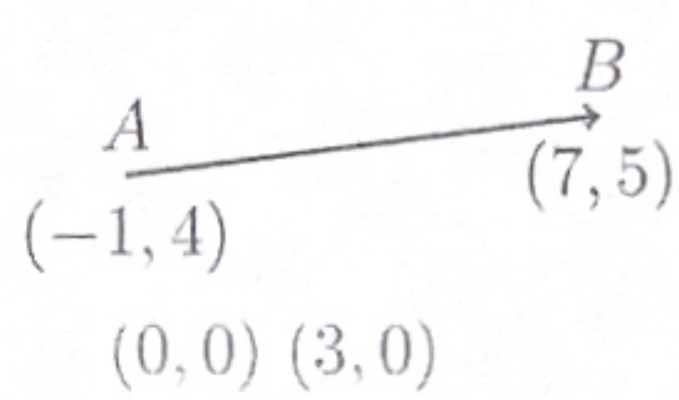
На прямоугольной полоске $0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1$ построили графики функций $y = \sin k\pi x$ для всех $k \in \{11, 13, 17\}$. На сколько непересекающихся областей окажется разделена эта полоска?

Задача 5.

Три графика параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «треугольник» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «треугольник» окружности, если радиус описанной окружности равен 1.



Задача 6. Рисунок (вид сверху) изображает такую ситуацию:



Ночь. На пустыре стоит секция сплошного забора высотой 2 метра (чёрная линия снизу). На постоянной высоте 6 метров из точки A в точку B (стрелка) летит очень яркий светлячок. Назовём точку на земле затенённой, если она хотя бы на мгновение оказалась в тени забора.

Какая площадь пустыря окажется затенённой?

Задача 7. Вовочке вместо обычной тетради в клетку досталась тетрадь, у которой линии сетки являются параболами вида $y = \pm 2x^2 + c$, где $c \in \mathbb{Z}$. Система координат, в которой написаны эти уравнения, имеет начало в центре листа, её оси параллельны его сторонам, а единичный отрезок равен 1 см. Размер тетрадной страницы (высота × ширина) равен 210×297 мм. *Клеточкой* называется часть листа, со всех сторон ограниченная параболами и не пересекаемая другими параболами. Вовочка последовательно соединяет по прямой соседние вершины каждой клеточки, в результате чего у него получаются четырехугольники. Найдите наибольшую из площадей получившихся у Вовочки четырёхугольников (внутри которых нет никаких проведённых Вовочкой линий).

Задача 8. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geqslant 0$$

(относительно неизвестной x) состоит из полуинтервала и точки (которая не принадлежит этому полуинтервалу и не является его концом)?