0 192769 750002

19-27-69-75
(123.20)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Покупяхова Олега Ивановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

65 (Шестьдесят пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

19-27-69-75 (123.20)

№2 | чистовик | стр. 1

Т.к. квадрат не распадётся на две части и у оставшейся фигуры нет дыром внутри, то хотя бы 3 вершины вырезанного прямоугольника лежат на краях квадрата (4 может быть только если в вырезанную часть полностью входит боковая сторона квадрата)

Посчитаем кол-во способов следующим образом:

Будем отмечать ~~внутренние~~ точки в квадрате - верхняя правая вершина прямоугольника ~~чет вертой~~ стороны и смотреть сколько прямоугольников она задаёт.

Пронумеруем горизонтальные линии сетки от 0 до 101 (слева направо) и вертикальные линии сетки, (снизу вверх) ~~от~~ также от 0 до 101.

Начнём считать, очевидно что т.к. выбранная точка ~~клетка~~ в прямоугольнике - вершина самая правая и верхняя из всех вершин, то проходиться будем с точки (1; 1) (горизонталь, вертикаль) ~~где 1-коорд. по горизонтали~~, а у неё есть 1 нужный нам прямоугольник,

~~101 · 2 - 2 = 400, т.к.~~ (задать прямоугольник можно в нашем случае ~~по~~ двум точкам не лежащим на ~~одной прямой линии~~ горизонтали ~~вер~~ и вертикали ⇒ т.к. задать мы можем прямоугольник по двум точкам, то есть по самой верхней левой и самой правой верхней, т.к. самая правая верхняя фиксирована, то можем смотреть просто на количество подходящих нам левых нижних, их координаты (m; n), если у самой правой верхней (x, y), то ~~это~~ ~~коорд~~ m<x и n<y, заметим, что когда мы ~~не~~ переходим к каждой более правой ~~верхней~~ точке на горизонтали, то количество возможных ~~горизо~~ прямоугольников увеличивается на 1, и также когда мы поднимаемся на 1 вверх по вертикали, то количество прямоугольников увеличивается на 1 (т.к. хим у увеличиваются на 1 (и только 1), тогда

чистовик

стр.2

Рассмотрим ~~числа~~ нашу сетку где числа – количества возможных прямоугольников:

101 –	0	101	102	103	104	…	198	199	200	201
100 –	0	100	101	102	103	…	197	198	199	200
99 –	0	99	100	101	102	…	196	197	198	199
98 –	0	98	99	100	101	…	195	196	197	198
⋮										
2 –	0	2	3	4	5		99	100	101	102
1 –	0	1	2	3	4		98	99	100	101
0 –	0	0	0	0	0		0	0	0	0
	0	1	2	3	4	…	98	99	100	101

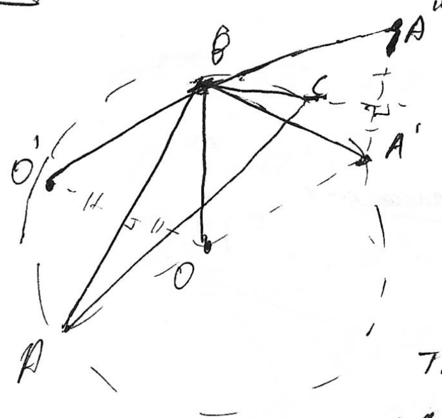
а теперь поймём, что в этом столбце во всех горизонталях, кроме нулевой стоит 101, т.к. иначе мы не учитываем случаи когда разбиваем доску на 2 части, аналогичнов в этом горизонтали, тогда количество способов:

$$(1+199)+(2+2+198+198)+(3+3+3+197\cdot 3)+(4\cdot 4+196\cdot 4)+$$
$$+(5\cdot 5+195\cdot 5)\ldots+(98^2+102\cdot 98)+(99^2+101\cdot 99)+100^2+$$
$$+101\cdot 101+101\cdot 100=200+2\cdot 200+3\cdot 200+4\cdot 200+5\cdot 200+$$
$$+\ldots+98\cdot 200+99\cdot 200+100^2+101\cdot 201=200(1+2+3+\ldots+99)+$$
$$+10000+20301=\overset{30301+}{200}\cdot\frac{99\cdot 100}{2}=100^2\cdot 99+30301=$$
$$=990000=1020301$$

Ответ: 1020301

чистовик

№3



O', B, A'' - лежат на одной прямой

Пусть A' - диаметрально противоположна A.

т.к. O' и O симметричны отн. AB, то $\angle O'BA = \angle ABO$

аналогично $\angle A'BC = \angle A''BC$

также $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle O'OB = 30° \Rightarrow$

$\angle ABO = 60° \Rightarrow \angle O'BA = 60° \Rightarrow$

т.к. AA' - диаметр $\Rightarrow \angle ABA' = 90° \Rightarrow$

т.к. O', B, A'' - лежат на одной прямой $\Rightarrow$

$\angle O'BA + \angle ABA' + \angle A'BA'' = 180° \Rightarrow$

$\angle A'BA'' = 180° - 60° - 90° = 30° \Rightarrow$

$\angle A'BC = \frac{1}{2}\angle A'BA'' = 15° \Rightarrow$

$\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90° + 15° = 105°$.

Ответ: $105°$.

№4

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

~~$a \neq 0$~~ $a > 0$ и $a \neq 1$ т.к. иначе $\log_2 1 = 0$.

Рассмотрим $a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2$:

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 = (a^x)^2 - 2a^x \cdot a + a^2 + a^2 - a^{x+1} =$

$= (a^x - a)^2 - a^2(a^{x-1} - 1) = a^2(a^{x-1} - 1)^2 - a^2(a^{x-1} - 1) =$

$= a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 1 - 1) = a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} = \frac{a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \Rightarrow$$

$$\frac{a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0 \quad | \cdot (\log_2 a)^2$$

$a^2(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)\log_2 a \geq 0$

чистовик стр. 4

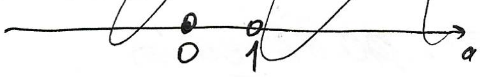
То есть получим неравенство:

$$a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\log_2 a \geq 0$$

~~Нули: $a=0$~~

~~$a^{x-1}=1$, $a^{x-2}=1$ $\Rightarrow a \neq 1$, $a>0$, поэтому только $a=1$~~

~~$\log_2 a = 0 \Rightarrow a=1$~~



a^2 всегда ≥ 0, поэтому про него можно забыть

~~1) если a~~ $a>0$ и $a\neq 1$

1) если $a\in(0;1)$, то $a^{x-1}-1\leq 0$ при $x\geq 1$ ~~при $x\geq 0$~~ ~~при любом x~~

$a^{x-1}-2<0$

$\log_2 a<0$, то есть

$$a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\log_2 a \leq 0 \text{ — ?!}$$

~~(2) если $a\in(1;2)$, то $\log_2 a<0$)~~

2) если $a>1$, то $\log_2 a>0 \Rightarrow$

наше неравенство $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0$

① или $a^{x-1}-1\geq 0$ и $a^{x-1}-2\geq 0$

② или $a^{x-1}-1\leq 0$ и $a^{x-1}-2\leq 0$

~~Нули: $a^{x-1}-1=0$, $a^{x-1}=1 \Rightarrow x=1$ или $a=1$?!~~

~~$a^{x-1}-2=0$, $a^{x-1}=2$~~

~~log ① $a^{x-1}-1\geq 0$, $a^{x-1}\geq 1 \Rightarrow$ т.к. $a>1$, то $x-1\geq 0$, $x\geq 1$~~

~~и $a^{x-1}-2\geq 0$, $a^{x-1}\geq 2$, $a^{x-1}\leq 2$~~

Тут получить отрезок длиной 2026 в качестве решения невозможно, т.к. если ~~взять~~ ~~устремить~~ $x\to-\infty$, то это решением будет и если $x\to+\infty$, то есть решения сильно больше, чем 2026. Значит единственный случай, когда $a\in(0;1)$ и ~~$x\leq 0$~~ $x\leq 1$

19-27-69-75
(123.20)

черновик

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2$

$a^{2x}=(a^x)^2$

$$\frac{(a^x)^2-2a^x\cdot a+a^2+a^2-a^{x+1}}{\log_2 a}=$$

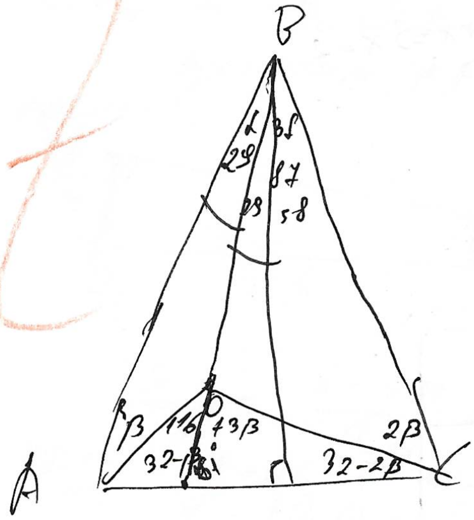
$$=\frac{(a^x-a)^2+a^2-a^{x+1}}{\log_2 a}=\frac{a^2(a^{x-1}-1)^2 \cdot a-a(a^{x-1}-1)}{\log_2 a}$$

$=$

$tg\,x \; tg\,y \; tg\,z$

$x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$2x+2y+2z=\pi \Rightarrow$



$\angle A=\angle C=32^\circ$

$4\alpha=180^\circ-64$

$4\alpha=116$

$\alpha=29$

$29\cdot 3=87$

~~$32-\beta+32-2\beta+2\beta+87=\angle AOB$~~

~~$64+87^\circ+\beta-\beta=\angle AOB$~~

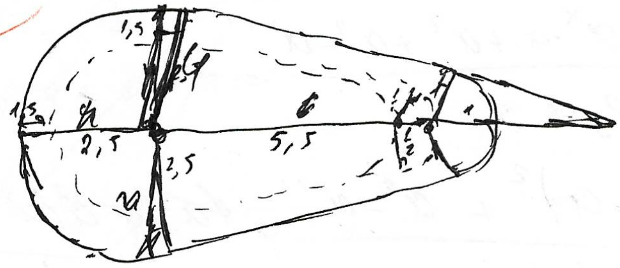
~~$151^\circ-\beta=\angle AOB$~~

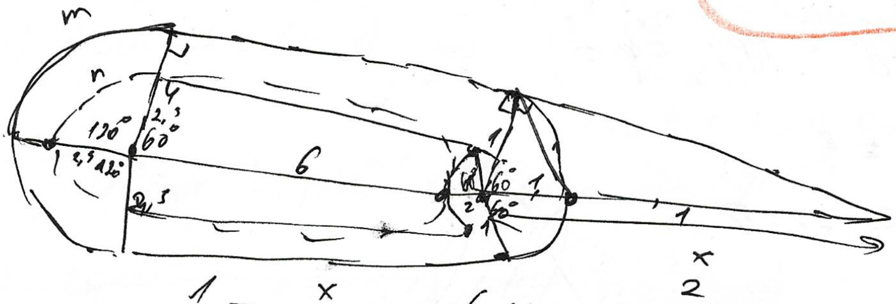
$\frac{2\cos\beta\cdot OC}{\sin 3\alpha}=\frac{OB}{\sin\beta}$

$\frac{AO}{\sin\alpha}=\frac{OB}{\sin\beta}$

$\frac{2\cos\beta\cdot OC}{\sin 3\alpha}=\frac{AO}{\sin\alpha}$

черновик



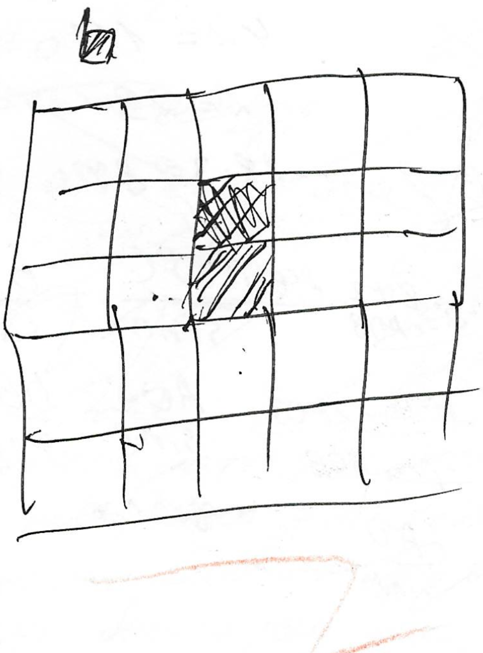


$$\frac{1}{4} = \frac{x}{6+x} \Rightarrow 6+x = 4x$$

$$6 = 3x \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1{,}5}{4}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{8} \Rightarrow 2n = \boxed{\frac{16m}{3}}$$

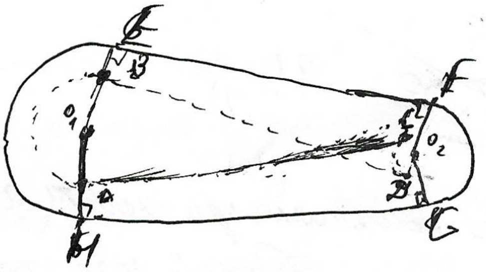


чистовик

стр. 6

№7

Для начала найдём как выглядит дорожка, т.к. радиус меньшей дорожки 1, то дорожка выглядит, как:



Отметим ~~м~~ точки A, B, C, D, это точки перпендикуляры из которых в точку касания равны 1,5

и также ~~разобьём~~ отметим участки H, E, F, G - точки касания окр. и прямой, O_1, O_2 - центры окружн.

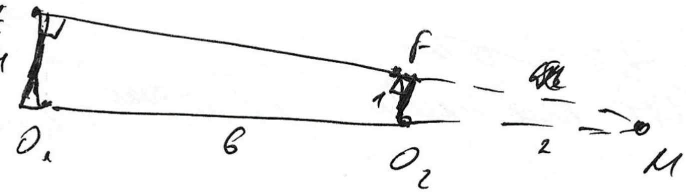
$\smile HE \to \smile AB$

$EF \to BD$ (дорожка пунктиром)

$GH \to CA$ $\Rightarrow EF = BD$ и $AC = GH$

$\smile FG \to \smile DC$

продлим EF и O_1O_2 до пересечения, пусть в M, тогда:



$\triangle FO_2M \sim \triangle EO_1M \Rightarrow \frac{EO_1}{FO_2} = \frac{O_1M}{O_2M} \Rightarrow$

$\frac{4}{1} = \frac{6+O_2M}{O_2M} \Rightarrow 3O_2M = 6 \Rightarrow O_2M = 2 \Rightarrow$

$BD = HC = EF = HG = EM - FM \Rightarrow FM = \sqrt{O_2M^2 - FO_2^2} = \sqrt{3}$, а $EM = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Rightarrow EF = HG = 3\sqrt{3}$

$\cos\angle FO_2M = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle FO_2M = 60^\circ \Rightarrow \angle EO_1M = 60^\circ \Rightarrow$

$\smile HO_1E_{\text{больш}} = 240^\circ$

$\smile FO_2G_{\text{меньш.}} = 120^\circ$, а также $O_1B = 2{,}5 = O_1A$

$\smile AO_1B_{\text{больш}} = \frac{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 240^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3}\pi$

$CO_2 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5 = DO_2$, $\angle CO_2D = \angle FO_2G = 120^\circ$

$\smile CD_{\text{меньш}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}5 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$

Тогда длина дорожки равна: $\frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

продолжение №4 | ~~черновик~~ | черновик | ~~стр.~~

имеем: $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\log_2 a \geq 0$,

при $a\in(0;1)$, $\log_2 a<0 \Rightarrow$

$a^{x-1}-1\leq 0$ или $a^{x-1}-2\leq 0$ ни в коем случае не вместе.

$a^{x-1}\leq 1$ $\quad a^{x-1}\leq 2$

если $x\geq 1$, то ~~оба~~ будут ≤ 0 –?!

~~если~~ $x\in[0;1]$ $\quad x\leq 1$

значит

Заметим, что $x=1$ будет решением при любом a.

а т.к. нам нужен отрезок длиной 2026, то он будет $x\in[-2025;1]$, то есть нужно, чтобы при $x<-2025$, $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\log_2 a<0$.

то есть $a^{-2026}\leq 1$ или $a^{-2026}\leq 2 \Rightarrow$

$1<a^{-2026}\leq 2$ и при этом

$a^{-2027}>2$

$\frac{1}{a}<a^{-2027}\leq\frac{2}{a}$ и ~~$a^{-2027}>2$~~

$\frac{2}{a}>2\Rightarrow a<1$

то есть, что мы имеем $1<a^{-2026}\leq 2$, а $a^{-2027}>2$

$$\begin{cases}1<a^{-2026}\\ a^{-2026}\leq 2\\ a^{-2027}>2\end{cases}\Rightarrow \text{т.к. } a>0, \text{ то } \begin{cases}a^{2026}>1\\ 1\leq 2a^{2026}\\ 1>2a^{2027}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^{2026}>1\Rightarrow a>1\\ a^{2026}\leq 2\Rightarrow a\leq\sqrt[2026]{2}\\ a^{2027}<\frac{1}{2}\Rightarrow a<\frac{1}{\sqrt[2027]{2}}\end{cases} \qquad \begin{cases}a^{2026}>1\end{cases}$$

имеем $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\log_2 a \geq 0$

$a\in(0;1)$, $\log_2 a<0 \Rightarrow$
$x\leq 1$

$a^{x-1}\leq 2$, а $a^{x-1}-1\geq 0$

$a^{x-1}\geq 1$

$1\leq a^{x-1}\leq 2$

теперь заметим, что $x=1$ - всегда решение $\Rightarrow$

чтобы в решении был отрезок длины 2026, нужно чтобы ~~он~~ начинался с $x=-2025$, заканчивался $x=1$ $\Rightarrow$

$1\leq a^{-2026}\leq 2$, но при этом, чтобы больше решений не было, $a^{-2026}=2$, тогда $a^{-2027}>2$

то есть $a^{-2026}=2$ $|\cdot a^{2026}$, $a>0$

$1=2a^{2026} \Rightarrow a^{2026}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$ ~~$=\frac{\sqrt[2026]{2}}{2}$~~

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$, это если подразумевается длина отрезка ровно 2026, то есть все

-2025 —— 1, если целая часть, то подойдёт $a^{-2027}>2$ и $a^{-2026}\leq 2$

$1>2a^{2027}$

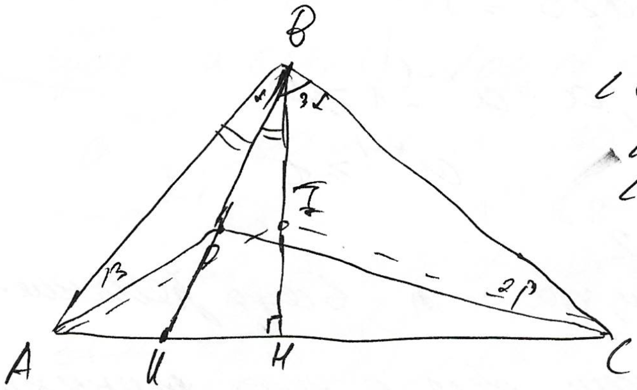
$1\leq 2a^{2026}$

$a<\frac{1}{\sqrt[2027]{2}}$

$a\geq\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$, то есть

$a\in\left[\frac{1}{\sqrt[2026]{2}};\frac{1}{\sqrt[2027]{2}}\right)$.

№6 чистовик стр. 4



$\angle A = \angle C = 32^\circ$

$\angle BAO = \beta$

$\angle BCO = 2\beta$

$\angle ABO = \alpha$

$\angle OBC = 3\alpha$

тогда $\angle ABC = 4\alpha = 116^\circ \Rightarrow$

$\alpha = 29$

Пусть BH – высота $\Rightarrow$ т.к. $\triangle ABC$ – р/б, то это и высота и медиана и биссектриса $\Rightarrow \angle ABH = 58^\circ = \angle \frac{ABC}{2} \Rightarrow$

BO – биссектриса $\angle ABH$.

AI, CI – биссектрисы $\Rightarrow \angle CAI = 16^\circ \Rightarrow \angle OAI =$

$= 32 - \beta - 16 = 16 - \beta$

$\angle OCI = \cancel{2\beta}\ 16 - (32 - 2\beta) = 2\beta - 16 =$

$\left.\begin{array}{l}\angle OAC = 32 - \beta \\ \angle OCA = 32 - 2\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \angle AOC = 3\beta + 116$

$BH = \sin 32^\circ \cdot AB$

$\frac{AU}{UH} = \frac{AB}{BH} = \frac{1}{\sin 32^\circ}$

~~чистовик~~ черновик ~~стр 8~~

Прямая прямоугольная призма [redacted]

Тогда пусть n - ~~ширина~~ длина, m - ширина, h - высота

$V = n\cdot m\cdot h$

$S_п = 2n\cdot m + 2m\cdot h + 2n\cdot h = 2(nm + mh + nh)$

$4(n+m+h) = S_р$