0 926693 680001

92-66-93-68
(123.22)

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 10 класс

Место проведения Москва — город  дешифр

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Пахомова Михаила Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «28» марта 2026 года

Подпись участника

задача 1:

запишем сумму: $abc + 2ab+2bc+2ac + 4a+4b+4c = (a+2)(b+2)(c+2)-8$
объема, площади поверхности, суммы длин ребр; $= 2026$

$\Rightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2\cdot 3^2\cdot 113$; перебор случаев:

$a+2=3)$ $(b+2)(c+2) = 2\cdot 3\cdot 113$;

$(b+2=3)$ $c+2 = 2\cdot 113 = 226 \Rightarrow c = 224 \Rightarrow abc = 224$ $(a=1),(b=1)$

$b+2=6)$ $c+2 = 113 \Rightarrow c = 111,\ b=4,\ a=1$ $abc = 444$

$b+2 = 3\cdot 113)$ $c+2=2 \Rightarrow c=0$ X

$b+2=1$ X б.о.о. это все случаи развалить $2\cdot 3\cdot 113$ на 2 множ.

$a+2=6)$ $(b+2)(c+2) = 3\cdot 113 \Rightarrow$ без огр. общ. $b=1,\ c=111$
$abc = 444$

$a+2 = 3\cdot 113)$ $(b+2)(c+2) = 2\cdot 3$ X

$a+2=1)$ X

$a+2 = 2\cdot 3^2\cdot 113)$ X $(b+2)(c+2)\neq 1$

$a+2 = 18 = 2\cdot 3^2)$ $(b+2)(c+2) = 113$ X

$a+2=113)$ $(b+2)(c+2) = 2\cdot 3^2$.

$b+2=3)$ $c=4$ $abc = 444$

$b+2=1$ X)

$b+2 = 2\cdot 3^2)$ $c+2=1$ X

$a+2=2)$ X

$a+2=9)$ $(b+2)(c+2) = 2\cdot 113$ X

$a+2 = 2\cdot 113)$ $(b+2)(c+2) = 9 \Rightarrow b=1, c=1 \Rightarrow abc = 224$

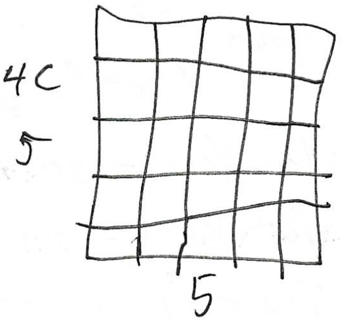
$a+2 = 2\cdot 3\cdot 113)$ $(b+2)(c+2) = 3$ X

$a+2 = 3^2\cdot 113)$ $(b+2)(c+2) = 2$ X

все случаи разобраны минимальный объем: 224
при $a=1,\ b=1,\ c=224$

Черновик

$a \cdot b \cdot c + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c$



$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + \dots + 8$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2026 + 8 = \underline{2034}$

$abc \geq ?$

$\sqrt[3]{(a+2)(b+2)(c+2)} = \sqrt[3]{2034}$

$12^3 = (104+40) \cdot 12$

$144 \cdot 12$

$1440 + 288$

$2 \cdot 3^2 \cdot 113$

$\dfrac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)} = \dfrac{1}{2034}$

$14^3$

$18 \cdot 113$

| 2034 | |
|---|---|
| 1017 | 2 |
| 339 | 3 |
| 113 | 3 |

$\dfrac{a}{a+2} \cdot \dfrac{b}{b+2} \cdot \dfrac{c}{c+2} = \dfrac{abc}{2034}$

$116 + 80$

$196 \cdot 14 =$

$\sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{3abc}{ab+bc+ac}$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

$11 + 15$

$26$

$2 + 30$

$32$

$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}$

$\dfrac{2}{2+a}$

$2a$

$\dfrac{a}{2+a}$

$2abc$

$10x + r : 7$

$x + 5r$

$226, 1, 1$

$226$

Задача 2:

посчитаем кол-во способов вырезать собственный прямоугольник из квадрата 101×101 будем однозначно задавать прямоугольник двумя его противоположными ~~уголками~~ ~~угл~~ углами будем учитывать в дальнейшем что правый-верхний и левый нижний; правый-нижний и левый верхний углы могут задавать один и ~~тот~~ тот-же прямоуг.

выберем произвольную (как угол) точку на сетке, вторую (не лежащую на одной вертикали или гориз.)

$(102\cdot102)\cdot(102\cdot102-102\cdot102+1)$

$\dfrac{102\cdot102\cdot(100\cdot102+1)}{4}-1=:S$

посчитаем кол-во способов вырезать фигуры (чтобы образовать „дырку")

$\dfrac{100\cdot100\cdot(98\cdot100+1)}{4}=:I$

чтобы разбить квадрат на 2 фигуры прямоуг. должен начаться 2 противоположных его сторон:

будем выбирать прямые по которым резать квадрат (по горизонтали)

$\dfrac{102\cdot101}{2}-1$, и по ~~второй~~ вертикали: $\dfrac{102\cdot101}{2}-1$

$\Downarrow$

$V$ (при этом квадраты „внутри" и квадраты „разбивающие" не пересекаются как множества)

Осталось посчитать: $S-2V-I=\dfrac{102^2(100\cdot102+1)}{4}-2\cdot\left(\dfrac{102\cdot101}{2}-1\right)-\dfrac{100\cdot100(98\cdot100+1)}{4}=51^2(100\cdot102+1)-$

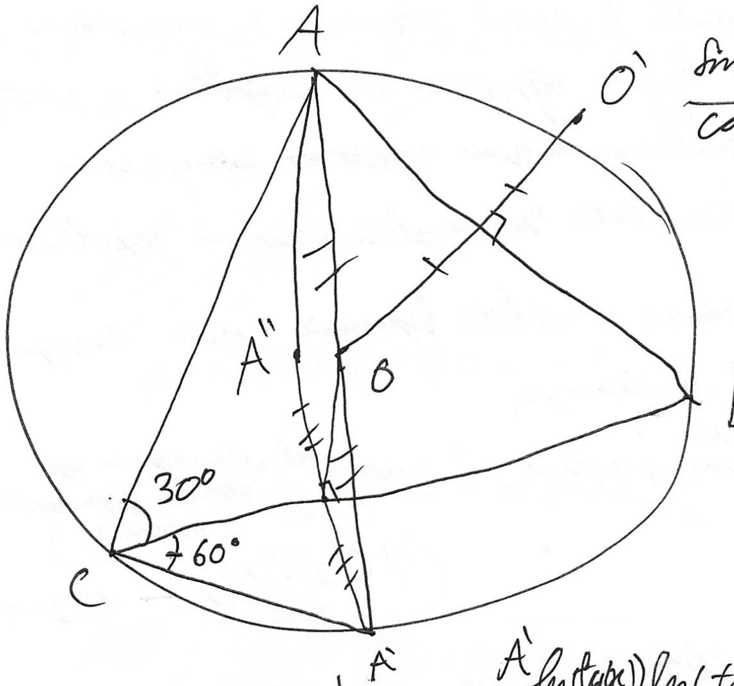
$102\cdot101+2-50^2(98\cdot100+1)=50^2(100\cdot102+1)+100\cdot102+1$

$+100(102\cdot100+1)-102\cdot101+2-50^2(98\cdot100+1)=$

$50^2(100\cdot4)+100\cdot102+1+100(102\cdot100+1)-102\cdot101+2=$

$1000000+1+100(102\cdot100)=2020001$ ← ответ дешифр

Черновик:




$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}\right)$$

$+$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

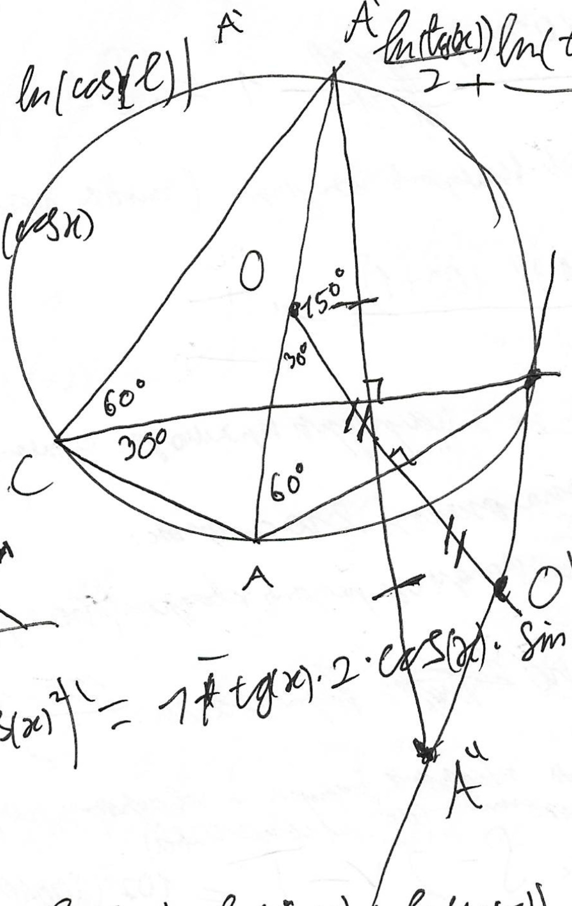
$$\frac{\ln\left(\frac{tg(x)}{2}\right)}{+2} \leq \ln\left(\frac{1}{2}tg(x\ldots\right)$$

$$\frac{\ln(tg(x))}{2} + \frac{\ln(tg(y)) + \ln(tg(z))}{2} \leq \ln\left(tg\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\right) \leq$$

$\ln(\sin(l)) - \ln(\cos(l))$

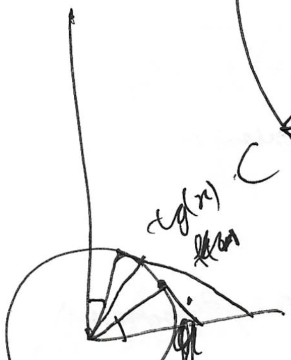
$+$

$\ln(\sin(x)) - \ln(\cos x)$




$$\ln(tg(x)) \leq 2\ln\left(tg\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\right)$$

$$tg(x) \leq tg\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)^2$$

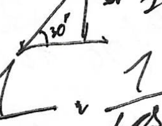



$$\cos(2x) \cdot \sin(x) = 1 - 2\sin(x)^2$$

$$\cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

$$(tg(x)\cdot\cos(x)^2)' = 1 \cdot tg(x) \cdot 2 \cdot \cos(x) \cdot$$

$$\frac{\ln(tg\,x) + \ln(tg(y)) + \ln(tg(z))}{3} \leq \ln\left(tg\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right)$$




$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{1}{\cos(x)^2}\right)'$$

$$\ln(tg(x))' = \frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{tg(x)^2\cos(x)^4}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x}{\cos x} + \sin x \cdot \frac{1}{\cos(x)^2} \cdot + \sin x = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$(1 - \ldots) = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{tg^2 \cos^2 x}$$

92-66-93-68 (123.22)

Черновик:

$\pi$

$\ln\left(\frac{tg x + 2tg\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{3}\right) \le$

$= $

$x \ge 1$

$tg(x)\cdot tg(y)\cdot \cancel{tg(x)} \le \cancel{\frac{tg(x)+tg(y)+tg(z)}{3}}$

$\cancel{\left(\frac{tg x + tg(y)+tg(z)}{3}\right)^3}$

$3a^2 \le 3a^{x+1}$

$a^{2x} + 2a^2 \quad a \le a^x$

$a^{2x} \le a^2$

$tg x + 2tg\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right) \le$

$\frac{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{(\cos(x))^2} \cdot \frac{(\sin x)^2}{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}$

$x = \frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$

$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -2\cdot\frac{1}{\cos^3(x)}\cdot -\sin(x) = 2\cdot\frac{tg(x)}{\cos^2 x}$

$t = a^x$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \ge 0 \\ a \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \le 0 \\ a \le 1 \end{cases}\end{array}\right.$

$t^2 - 3a\cdot t + 2a^2 \ge 0$

$t^2 - 3at + 2a^2 \le 0 \quad a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \le 0$

$a \le t \le 2a$

$x \ge 1$

$1 \le x \le 2$

$t = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2}$

$3a^{2x} \le a^{2x} + 2a^2 \le 3a^{x+1}$

$3a^2 \le 3a^{x+1}$

$a^{2x} \le a^{x+1}$

$a^2 \le a^{x+1}$

$a \quad \frac{3a+a}{2} = 2a$

$a^x \le a$

$x \ge 1$

$a \le a^x$

Задача 4:

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0 \\ a \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0 \\ a \geq 1 \end{cases} \quad t = a^x$$

$\Leftrightarrow$ $t^2-3t\cdot a+2a^2 \geq 0$ – парабола с ветвями вверх имеет ~~…~~ наибольший корень (иначе любое $t>0$ – реш. что нам не подходит) ~~…~~ все $t$ больше ~~…~~ яв. реш. $\Rightarrow$ не наш случай

$$\begin{cases} a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}$$

$t = a^x \Rightarrow t^2-3at+2a^2 \leq 0$

$$t_1 = \frac{3a + \sqrt{9a^2-8a^2}}{2} = 2a$$

$$t_2 = \frac{3a - \sqrt{9a^2-8a^2}}{2} = a$$

$\Rightarrow a \leq t \leq 2a$

$1+\log_a(2) = \log_a(2a) \leq x \leq 1$

~~$1 \leq x \leq \log_a(2a) = \log_a(2)+1$~~

$\Rightarrow$ длина $l = \log_a(2) = 2026$ ~~$\Rightarrow a^{2026} = 2$~~

$\Rightarrow \frac{1}{2} = a^{2026} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

$\frac{1}{2}$

Задача 5:

$\cancel{\quad} tg(x)\cdot tg(y)\cdot tg(z) \le M \Longleftrightarrow \cancel{\quad} \dfrac{\ln(tg(x)+\ln(tg(y))+\ln(tg(z))}{3} \le \frac{1}{3}(\ln(M))$

$\left(\ln(tg(x))\right)'' = -\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{tg^2 x\cdot \cos^4 x} \le 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\left(\dfrac{1}{tg(x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)'$

$\Downarrow$

$\ln(tg(x))$ - выпукла вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\ln(tg(x)+\ln(tg(y))+\ln(tg(z))}{3} \le \ln\left(tg\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)\right) = \ln\left(tg\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)$

(Неравенство Йенсена при $m_i = 1$)

$\Rightarrow tg(x)\cdot tg(y)\cdot tg(z) \le \left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)^3 = \dfrac{1}{3\sqrt3}$; при $x=y=z=\frac{\pi}{6}$

$tg(x)\cdot tg(y)\cdot tg(z) = \frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{\sqrt3} = \frac{1}{3\sqrt3} \Rightarrow$ Ответ: $\dfrac{1}{3\sqrt3}$