0 460382 960000

46-03-82-96
(122.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Полякова Андрея Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

вышел в 12:52
вернулся в 12:55
работа сдана досрочно в 13:24

Дата
«29».03. 2026 года

Подпись участника

Чистовик 1

№1

Если точка пересечения хорд не центр круга, то две хорды совпадают. Так как отрезок соединяющий центр круга и середины хорды перпендикулярен хорде, значит т. пересечения хорд — центр круга, тогда все три хорды — диаметры, их длина: 10

Ответ: 10

№2

Если первые цифры n^2 образуют n, то n^2 представимо как $n^2 = n\cdot 10^t + x$, где $0 \le x < 10^t$.

$n^2 \vdots n$, $n\cdot 10^t \vdots n \Rightarrow x \vdots n$, т.е. $x = k\cdot n$.

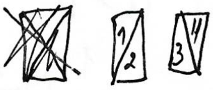
$n^2 = n\cdot 10^t + kn \Leftrightarrow n = 10^t + k$, $kn < 10^t$

$10^t \cdot k + k^2 < 10^t \Rightarrow k = 0$

$n = 10^t$, т.к. n — четырёхзначное, то $n = 1000$

Ответ: 1000

№3

~~Пусть (a;b) — координаты л~~ Заметим, что кол-во треугольников удовлетворяющих условию в 4 раза больше, чем кол-во прямоуг. с вершинами в точках с натуральными коорд. не превосх. 10 и сторонами паралл. осям, т.к. любой прямоуг. разбивается на 4 треуг. 
и любому треуг. соответствует ед. прямоуг.

Посчитаем кол-во прямоуг.: Пусть $(a;b)$ — коорд. левого нижнего угла, тогда способов выбрать правый верхний угол: $(a-1)(b-1)$

Значит всего способов: $\sum\limits_{a=1}^{10}\sum\limits_{b=1}^{10}(a-1)(b-1) = \sum\limits_{a=1}^{10}(a-1)\cdot\sum\limits_{b=1}^{10} b-1 =$

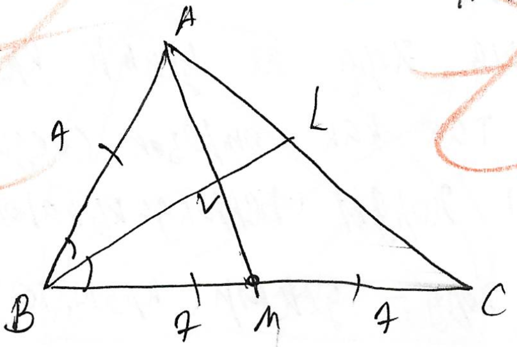
$= \sum\limits_{a=1}^{10}(a-1)\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2} - 10\right) = \sum\limits_{a=1}^{10} 45\cdot(a-1) = 45\cdot\sum\limits_{a=1}^{10} a-1 = 45\cdot 45$

~~Спос~~ Всего треуг.: $4\cdot 45\cdot 45 = 90\cdot 90 = 8100$

Ответ: 8100

Черновик 2

№4



1) $BL \perp AM \Rightarrow \triangle ABM$ - р/б с осн. AM, т.е.
$BM = AB = 7$, $BC = 14$

2) Заметим, что $BM = 7 = AB \Leftrightarrow BL \perp AM$,
значит если в $\triangle ABC: AB = 7$, $BC = 14$, то он подходит под условие.

3) по нерав. тр.: $AB + AC > BC \Rightarrow AC > 7$
$AB + BC > AC \Rightarrow AC < 21$

$7 < AC < 21$, т.к. ~~AC~~ $AC \in \mathbb{N}$, то $8 \leq AC \leq 20$

4) из п. 2 и 3, в $\triangle ABC: AB = 7; BC = 14; AC \in [8; 20]$
Значит $P = 7 + 14 + AC = 21 + AC$, $P \in [29; 41]$
Ответ: 29; 30; ...; 41

№6

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$$

1) $a > 0$.
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \quad | \cdot a^3 > 0 \quad \Leftrightarrow -3x^2 + 2ax + a^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 2ax - a^2 \geq 0$, кв. неравенство, т.к. $3 > 0$, то решением не явл. отрезок.

2) $a < 0$
$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \quad | \cdot a^3 < 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2ax - a^2 \leq 0$$

Чистовик 3

Решим ур-е $3x^2-2ax-a^2=0$

$\frac{D}{4}=a^2+3\cdot a^2=4a^2>0$, 2 р.к

$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{4a^2}}{3}=\frac{a\pm|2a|}{3}=\frac{a\pm 2a}{3}$

$x_1=a$, $x_2=-\frac{1}{3}a$. Т.к. $a<0$, то $a<-\frac{1}{3}a$

$3x^2-2ax-a^2\leq 0 \Leftrightarrow a\leq x\leq -\frac{1}{3a}$ – отрезок длины

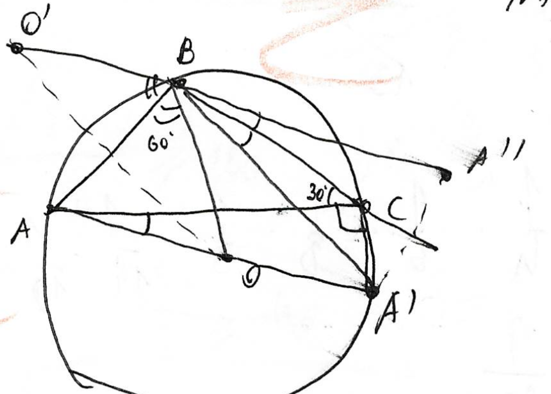
$-\frac{1}{3}a-a=-\frac{4}{3}a$

$-\frac{4}{3}a=2026 \Leftrightarrow a=-\frac{3\cdot 2026}{4}=-\frac{3\cdot 1013}{2}=-\frac{3039}{2}=$

$=-1519,5$

Ответ: при $a=-1519,5$

№7



Решение:

1) $\angle A'BC=\angle CBA''$, где A' – т. диаметрально противоположная A

$\angle A'BC=\angle A'AC$, $\angle ACA'=90°$

$\angle A'AC=90°-\angle AA'C$.

$AA'CB$ – впис $\Rightarrow \angle AA'C=180°-\angle B$

$\angle A'AC=90°-(180°-\angle B)=\angle B-90°$

2) $\angle O'BA=\angle OBA$

$\triangle OBA$: $\angle AOB=2\angle C=60°$, $OB=OA \Rightarrow \triangle AOB$ – р/с

$\angle ABO=60°=\angle ABO'$

3) $\angle O'BA+\angle B+\angle CBA''=180°$, т.к. O', B, A'' на прямой

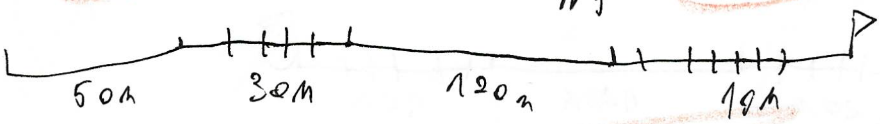
$\angle B+60°+\angle B-90°=180° \Leftrightarrow 2\angle B=210° \Leftrightarrow \angle B=105°$

4) В случае другого расположения точек можно рассмотреть ориентированные углы!

Ответ: 105°

Чистовик 4

№5



Пусть v — скорость ($\frac{м}{с}$)

Рассмотрим значения промежутка ~~пока~~ зелёный на светофорах

I: $(30;80)$, $(110;160)$ ...

II: $(0;10)$, $(60;110)$; $(160;210)$

Очевидно, что успеть в первый промежуток ~~I~~ светофора нельзя, поэтому про него забудем

I: $(30;80)$, $(110;160)$ ...

II: $(60;110)$; $(160;210)$ ...

Предположим, что мы смогли попасть в 1ый промежуток 2-го, тогда $\frac{50+30+120+10}{v} \le 110 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v \ge \frac{210}{110} = \frac{21}{11}$, но тогда $\frac{50}{v} \le \frac{50 \cdot 11}{21} =$

$= \frac{550}{21} = 26\frac{4}{21}$, т.е. к 1ому светофору приедем раньше, чем он загорится зелёным, противор.

Значит в 1ый промежуток II светофора не успеем. ~~Пусть дс~~ Тогда до 2-го светофора доедем не раньше, чем через 160 с. Покажем что это возможно:

$\frac{50+30+120}{v} \ge 160 \Leftrightarrow v \le \frac{200}{160} = \frac{5}{4}$, при равенстве:

$v = \frac{5}{4}\,\frac{м}{с}$: $\frac{50}{v} = 40с$; $\frac{80}{v} = \frac{80 \cdot 4}{5} = 16 \cdot 4 = 64$,

попадает в I светофор

Листовик 5

$\frac{209}{8} = 160$

$\frac{210}{8} = \frac{210 \cdot 4}{5} = 42 \cdot 4 = 168$

Порядсем во II (фотогон

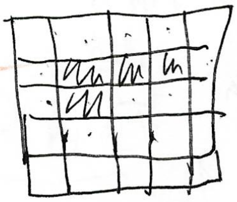
Ответ: $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{C}$

№8

Первые три закр клетки – либо $\boxed{4\,4\,4}$ либо $\boxed{4\,4}$

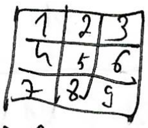
1) $\boxed{4\,4\,4}$

не нарушая общности пусть покраски горизонтальна



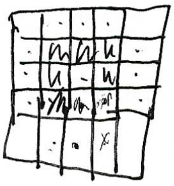
Тогда в 4-ый ход подходят 4 из 8 клеток. $P_4 = \frac{1}{2}$. Не нарушая общности, ~~зак~~ пусть закрасим левую ~~низ~~ нижнюю.

Для удобства пронумеруем клетки



так что после 4ёх действий закрашены 1, 2, 3, 4

а) на 5ый ход закрасим 6: $P_5 = \frac{1}{9}$

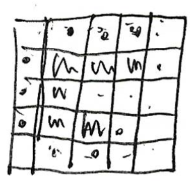


Далее надо закрасить 7 или 9. $P_6 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, не нарушая общности закрасим 7, далее красим либо 9 – 8, либо 8 – 9

9 – 8: $P_{78} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13}$; 8 – 9: $P_{78} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13}$

$P_{5678} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot 2\right) = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 13}$

б) на 5ый ход красим 7. $P_5 = \frac{1}{5}$



Далее не нарушая общности красим 8 (6 или 8)

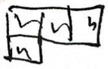
$P_6 = \frac{2}{11}$, далее аналогично случаю а): ~~P_{78}~~

$P_{78} = \frac{2}{12 \cdot 13} = \frac{1}{6 \cdot 13}$; $P_{5678} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{6 \cdot 13} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}$

В сумме в случаях а и б:

$$P_{аб} = \frac{1}{5\cdot 6\cdot 5\cdot 13}^{\backslash 11} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 11\cdot 13}^{\backslash 10} = \frac{21}{5\cdot 6\cdot 5\cdot 11\cdot 13} = \frac{7}{2\cdot 5\cdot 5\cdot 11\cdot 13}$$

2) Получаем (уголка 

Тогда после ~~де~~ той клетки опять получим , Вероятность кольца: $\cancel{P_{аб}} \cdot P_{аб}$

Вероятность ~~получ~~ правильного 4-го хода: $\frac{2}{7}$

3) Вероятность получить кольцо: $\frac{1}{2}\cdot P_{аб} + \frac{2}{7}\cdot P_{аб} =$

$$= P_{аб}\cdot\frac{9}{14} = \frac{7}{2\cdot 5\cdot 5\cdot 11\cdot 13}\cdot\frac{9}{14} = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 11\cdot 13}$$

4) Чтобы из кольца получить квадрат: $\frac{1}{13}$

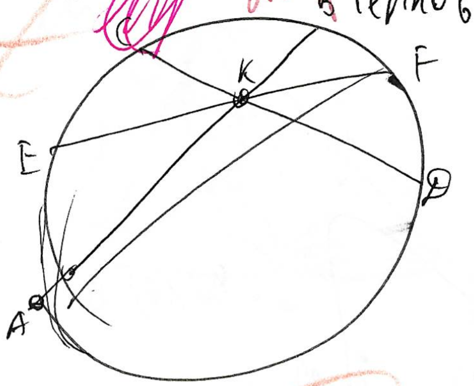
5) ~~Ит~~ итоговая вероятность $P = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4\cdot 5\cdot 11\cdot 13} =$

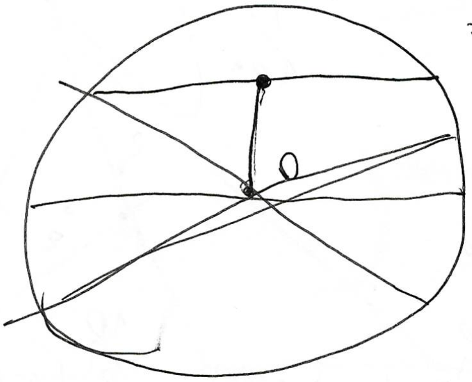
$$= \frac{1}{4\cdot 5\cdot 11\cdot 13^2}$$

46-03-82-96
(122.5)

90 (Делимость)

в Черновик





$\frac{(abcd)}{abcd}$

N1: $d = R$

N2 $\overline{abcd}$ $\quad n^2 = n\cdot 10^t + x \quad x \vdots n$

$\boxed{n}$ $\boxed{x \vdots n}$ $\quad n^2 = n\cdot 10^t + kn = n(k+10^t)$

$n = k + 10^t \quad kn < 10^{t+1} \quad n < \frac{10^{t+1}}{k}$

$k + 10^t < \frac{10^{t+1}}{k} \Leftrightarrow k^2 + 10^t\cdot k < 10^{t+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 + 10^t k - 10^{t+1} < 0 \Leftrightarrow k^2 + 10^t k < 10^{t+1} \Rightarrow k < 10$

$\cancel{D = 10^{2t} + 4\cdot 10^{t+1} = 10^t(10^t + 40)}$

$n \geq 1000$ и $t \geq 3 \Rightarrow t = 3$

$n = 1000 + k, \quad k < 10$

$n = 1000; 1001; 1002; 1003; 1004; 1005; \ldots; 1009$

$$\begin{array}{r} \times 1001 \\ 1001 \\ \hline 1001 \\ 1001\ldots \\ \hline 1002001 \end{array}$$

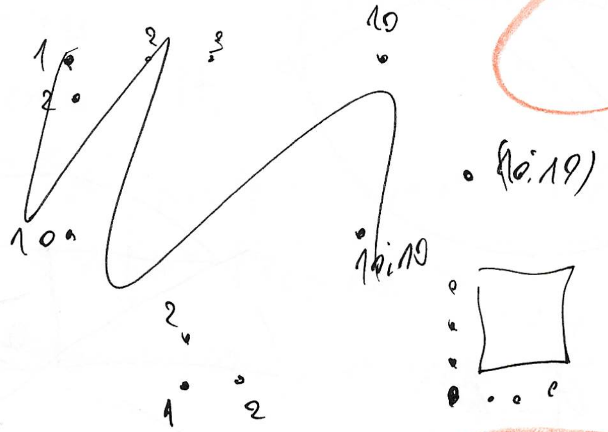
$nk < 10^t \Leftrightarrow k^2 + 10^t\cdot k < 10^t$

$n = 10^t \quad k = 0$

Черновик

№3

\# пр. = 2 · # прямоуг?



$\cancel{\sum_{a=10} \sum_{b=10}^{1}}$

$$\sum_{a=1}^{10}\sum_{b=1}^{10}(a-1)(b-1) = \sum_{a=1}^{10}\cancel{(a-1)}+(a-1)\cdot$$

$$= \sum_{a=1}^{10}(a-1)\cdot\sum_{b=1}^{10} b-1 = \sum_{a=1}^{10}(a-1)\cdot\left(\sum_{b=1}^{10} b - 10\right) =$$

$$= \sum_{a=1}^{10} a-1\cdot \cancel{b=b}\left(\frac{10\cdot 11}{2}-10\right) = \sum_{a=1}^{10}(a-1)\cdot 45 =$$

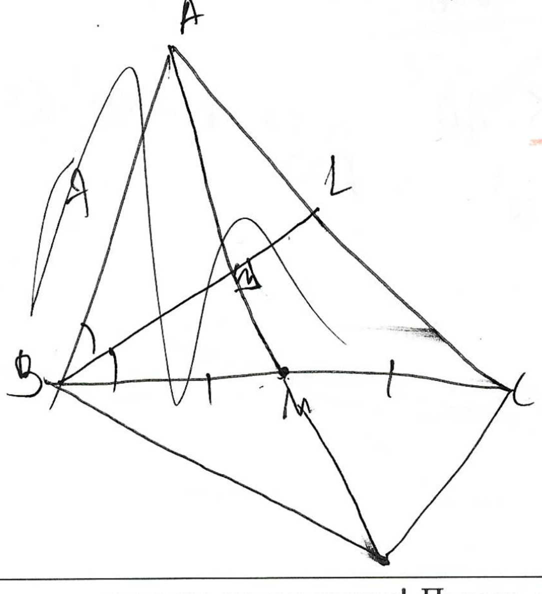
$$= 45\sum_{a=1}^{10} a-1 = 45\cdot\left(\sum_{a=1}^{10} a - 10\right) = 45\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2}-10\right) =$$

$$= 45^2 = 2025$$

№4

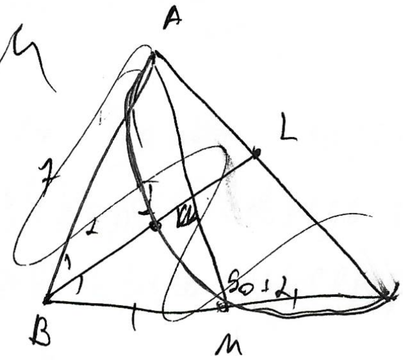
$A, C, K \in Q/N$

P - ?

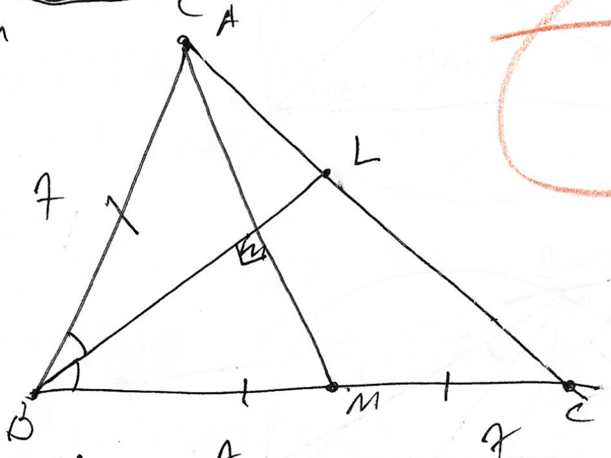


Черновик

№4



AC, BC ∈ N, P - ?



$AC + 7 > 14 \quad AC > 7$

$AC < 21 \qquad 21 - 7 < AC < 21$

$8 \leq AC \leq 20 \qquad P = 21 + AC = 29 \ldots 41$

№5

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0$

1) $a > 0 \quad | \cdot a^3$

$-3x^2 + 2ax + a^2 \leq 0$

$3x^2 - 2ax - a^2 \geq 0$

$\frac{D}{4} = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

$x_{1,2} = \frac{-a \pm 2a}{3} = \left[\begin{array}{l} -a \\ \frac{a}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \geq \frac{a}{3} \\ x \leq -a \end{array}\right.$ - не отр.

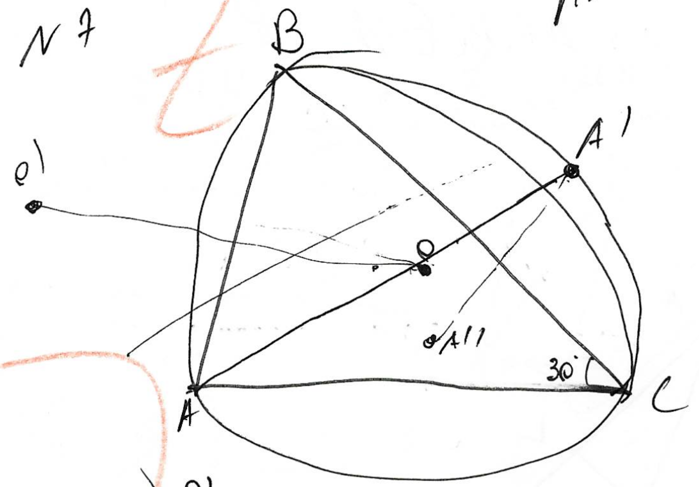
2) $a < 0$

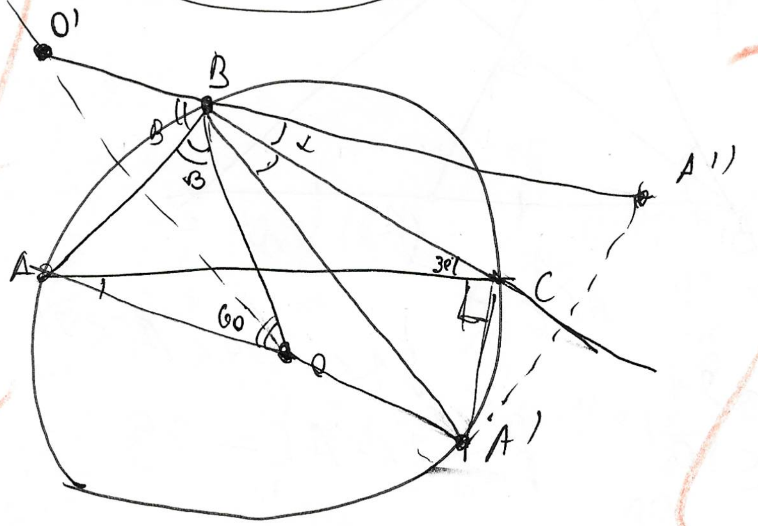
$-3x^2 + 2ax + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2ax - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a}{3} \leq x \leq -a \qquad \frac{4}{3}a = 2026$

Черновик

№7





$\alpha + \beta + \angle B = 180°$

$\alpha =$

$\alpha = 90° - (180 - \angle B) = \angle B - 90°$

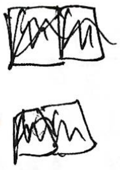
$\beta = 60°$

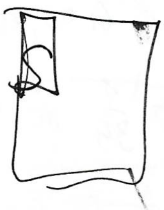
$\angle B + 60° + \angle B - 90° = 180° \Leftrightarrow 2\angle B = 210$

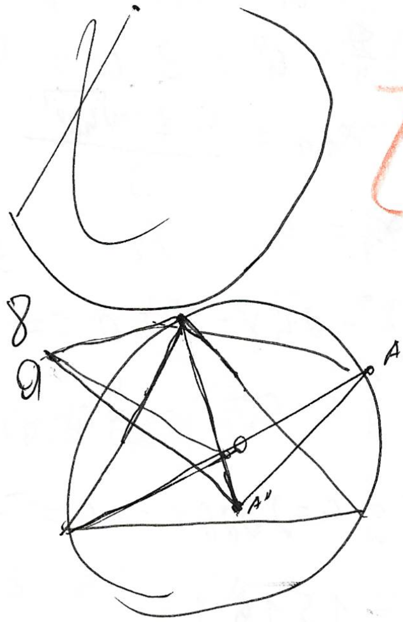
$\angle B = 105°$

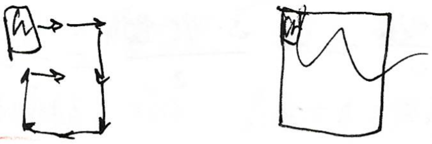
Черновик

№8



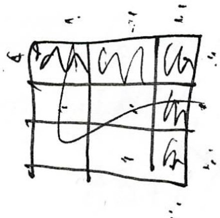


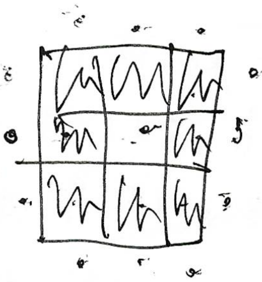




$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot$

$\frac{1}{13}$





$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot$

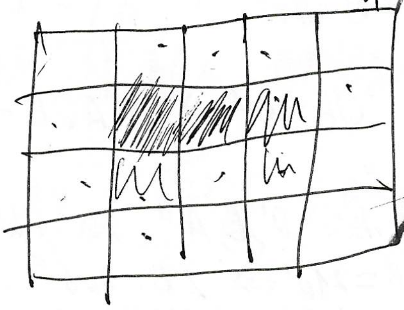
$\frac{1}{13}$

$4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right.$

$8p = 8 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} =$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\ }$

$\frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13^2}$



$\frac{2}{8} \cdot \left(\frac{3}{9} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots + \right.$

Черновик

50м 30м 120м 70м

I : (30; 80), (110; 150)

II : (60; 110) (160; 210)

~~$\frac{50}{v} \geq 30 \Rightarrow v \leq \frac{5}{3}$~~

~~$\frac{200}{v} \geq \frac{200 \cdot 3}{5} = 120$~~

$\frac{200}{v} \geq 160 \quad v \leq \frac{5}{4}$

$\frac{50}{v} \geq 40 \quad v = \frac{5}{4}: \quad 50v = \frac{50}{v} = 40$

$\frac{80}{v} = 16 \cdot 4 < 80$

$\frac{200}{v} = 40 \cdot 4 = 160 \qquad \frac{210}{v} = \frac{210 \cdot 4}{5} = 42 \cdot 4 = 168 < 210$

$550 : 21 = 26$, 42, 130, 126, 4