0 932950 700009

93-29-50-70
(129.??)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Олимпиада Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Поляковой Софьи Кирилловной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

44-27-44-11
(129.10)

чистовик

Задача 1.

$$\sqrt{3(1-\operatorname{ctg}^2x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

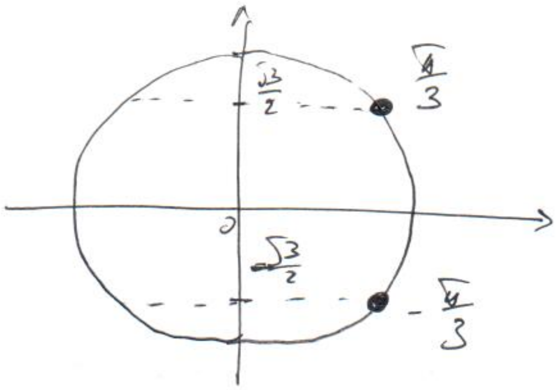
$$\begin{cases} 3(1-\operatorname{ctg}^2x) = 8\cos^2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3\operatorname{ctg}^2x = 8 - 8\sin^2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3\left(-1 + \dfrac{1}{\sin^2x}\right) = 8 - 8\sin^2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin^2x - 2 - \dfrac{3}{\sin^2x} = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\sin x \neq 0$
(2)

$$\begin{cases} 8\sin^4x - 2\sin^2x - 3 = 0 \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin^2x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$



Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

ВБж

Чистовик

№1

$$\Big(\underbrace{\sqrt{3(1-ctg^2x)}}_{>0}\Big)^2=\Big(2\sqrt{2}\underbrace{\cos x}_{>0}\Big)^2$$

1) $\begin{cases} 3(1-ctg^2x)=8\cos^2x \\ 1-ctg^2x>0 \Rightarrow ctg^2x<1 \Rightarrow \end{cases}$

$\begin{cases} ctg\,x<1 \\ ctg\,x>-1 \end{cases}$

$3\left(1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=8\cos^2x$

$3\left(\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}\right)=8\cos^2x \Big| \cdot \sin^2x$

$-3\cos 2x=2\sin^2 2x$

$-3\cos 2x=2-2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x-3\cos 2x-2=0$

Пусть $t=\cos 2x$

$2t^2-3t-2=0$

$t_{1,2}=\frac{3\pm 5}{4}=2$ — невозможно, так как

$\cos 2x\in[-1;1]$

$t_{1,2}=\frac{3\pm 5}{4}=-\frac{1}{2}$

$\cos 2x=-\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

$k=2n \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}>0$ - подходит

$ctg^2\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}<1$ — подходит

$k=2n+1 \Rightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n \Rightarrow$

$ctg\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}<0$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

№3

F состоит из целочисленных точек (x, y, z)

$x, y, z \in \{-5; -4; \dots; 4; 5\}$

Всего точек $|F| = 11^3 = 1331$

У прямоуг-ого треугольника, у которого оба катета параллельны координатным осям:

- вершина прямого угла однозначно определяется
- катеты лежат на разных осях

1) выберем вершину прямого угла, это можно сделать 1331-м способом

2) выберем вдоль каких осей идут катеты $C_3^2 = 3$

3) выбрать две другие вершины можно из оставшихся 10-ти точек, например на оси Ox: $10 \cdot 10 = 100$

Общее число: $1331 \cdot 3 \cdot 100 = 399300$

Ответ: 399300

№2

Пусть число это $\underline{\underline{a}}$, сумма цифр ~~(a)~~ $S(a) \Rightarrow a \vdots S(a)$

$\frac{a}{S(a)} \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 9 \Rightarrow S(a) \vdots 9 \Rightarrow$

$a \vdots 81 \Rightarrow \in \{162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972\} \cup (0; 100) \cup (1000; +\infty)$

Если $S(a) = 9$, то $\frac{a}{Sa}$ делится на 9, но если $S(a) = 18$, то $a \vdots 2 \Rightarrow a \neq 567, a \neq 729, \xrightarrow[\text{далее}]{}$

$a \neq$ ~~891~~ 891.
Из 3-х значных под условия подходят лишь 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972.

1) $243 + 648 + 972 = 1863$.

Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972 и сумма 1863

№4

$0 \leq x \leq 1$. $-1 \leq y \leq 1$ $y = \sin k\pi x$

$k \in \{11; 15; 17\}$

Пустая полоска — 1 область, 1 кривая ~~$y = \sin k\pi x$~~ $y = \sin k_1 \pi x$ имеет k_1 касается с горизонтальными границами полоски ($y = \pm 1$) и делит её на $(k_1 + 2)$ области, каждая следующая кривая k_i добавляет $(k_i + 1)$ области и дополнительно $+1$ область за каждое строго внутреннее пересечение с уже нарисованными кривыми

$R = (11+2)+(15+1)+(17+1) + I$ внутр. $=$ $47 + I$ внутр., строго внутренних пересечений I — кол-во 3 кривых, R — общее число областей.

Уравнение:

$\sin a\pi x = \sin b\pi x$ на $(0; 1)$ за $a > b$ имеет ровно $(a - 1)$ корней

Если пересекается на $y = 1$ или $y = -1$

$\Longrightarrow$ это точка касания $\Longrightarrow$ далее

$\Longrightarrow$ ~~...~~ $I_{ab} = (a-1) - 2\cdot i$, i – число общих точек касания на границе.
макс. и мин. достигается в точках
(max) (min)
$x = \frac{1+4m}{2k}$ и $x = \frac{3+4m}{2k}$
Проверив попарно $k \in \{11, 15, 17\} \Longrightarrow$
Единственные совпадения:
$\sin 11\Pi x$ и $\sin 15\Pi x$ в точке $x = \frac{1}{2}$,
тройных касаний и других пересечений нет.

$I_{15;11} = (15-1) - 2\cdot 1 = 12$
$I_{17;11} = (17-1) - 2\cdot 0 = 16$
$I_{17;15} = (17-1) - 2\cdot 0 = 16$
$I_{внутр} = 12 + 16 + 16 = 44$
$R = 47 + 44 = 91$
Ответ: 91 область
N5
Расположим фигуру так, чтобы две соседние вершины были $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, центр $O(0;0)$. так как расстояние между вершинами равно 1, то этот правильный 6-ник имеет стороны 1, и радиус описанной окружности 1.

Рассмотрим параболическую дугу между A и B, по симметрии ее ось прямая $x=0 \Longrightarrow$ она имеет вид ~~$y=r+\Pi x^2$~~ $y = r + cx^2$, r – радиус вписанной окружности
$\Longrightarrow$ далее

В лежит на дуге $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = r + \frac{c}{4}$

Две дуги, находящиеся в В, симметричны относительно луча OB, чтобы угол был 0, их общая касательная должна совпадать с OB $\Rightarrow$ наклон касательной в точке В равен наклону OB $\Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) = 2cx \quad y'(\frac{1}{2}) = c$

$K_{OB} = \frac{y(B)-0}{x(B)-0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, K – угловой коэфициент прямой OB $\Rightarrow c = \sqrt{3}$.

$r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

№7

Рассмотрим мн-во парабол для клетки. Заметим, что если есть хотя бы 3 с ветвями вверх, то задать ориентацию нельзя.

Если меньше 1 $\Rightarrow$ площадь неограничена. Пусть одна парабола с ветвями вверх x^2+c. Тогда парабола $-x^2+c+1$ ограничивает клетку ибо все другие параболы ее не пересекают. Пусть $-x^2+c+1$ не взяли $\Rightarrow x^2+c+1$ должна ее ограничивать $\Rightarrow$ либо x^2+c и $-x^2+c+1$, либо x^2+c_1, x^2+c_1+1, $-x^2+c_2$, $-x^2+c_2+1$, $c_2 > c_1+1$

В случае с x^2+c, $-x^2+c+1$, оси четыр-ника будут $(0;c)$, $(0;c+1)$.

$\Rightarrow$ далее

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2c+1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2c+1}{2}\right)$

Диагонали параллельны осям $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ площадь равна $\frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Пусть x^2+a, x^2+a+1, $-x^2+b$, $-x^2+b+1$

тогда точки пересечения будут

$\left(\sqrt{\frac{b-a}{2}}; \frac{a+b}{2}\right); \left(\sqrt{\frac{b+1-a}{2}}; \Rightarrow\right.$

$\Rightarrow \left.\frac{a+b+1}{2}\right); \left(\sqrt{\frac{b-a-1}{2}}; \frac{a+b+1}{2}\right);$

$\left(\sqrt{\frac{b-a}{2}}; \frac{a+b+2}{2}\right)$ диагонали

снова параллельны осям $\Rightarrow$

площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{\frac{b-a-1}{2}} - \sqrt{\frac{b+1-a}{2}}\right) = X$

Нужно найти max:

$X = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k}\right)$, где

$k = b-1-a \geq 1$

$\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k}\right)$

$k' = \frac{1}{\sqrt{k+2}} - \frac{1}{\sqrt{k}} < 0 \Rightarrow$

$\sqrt{k+2} - \sqrt{k} \downarrow \Rightarrow max =$

$\sqrt{}$

ЧЕРНОВИК

№ 1

$$\left(\sqrt{3(1-ctg^2x)}=\right)^2\left(2\sqrt{2}\cos x\right)^2$$

$$\cancel{3(1-ctg^2x)=8\cos^2x}$$

$$\cancel{3-3ctg^2x=8\cos^2x}$$

$$\cancel{3-\frac{3\cos^2x}{\sin^2x}=8\cos^2x \;\Big|\cdot\sin^2x}$$

$$\cancel{3\sin^2x-3\cos^2x=8\cos^2x\cdot\sin^2x}$$

$$\cancel{3(\sin^2x-\cos^2x)=}$$

$2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=$

$\sqrt{4\cdot2\cdot4\cdot2\cdot4\cdot2}$

8 32 64 256 312

$\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=ctg^2x$

$8\cdot\sqrt{2}$

$(8\sqrt{3})^2$

$64\cdot3=192$

$192 \div 9 = 21{,}3$

$3\sin^2x-3\cos^2x$

$$3(1-ctg^2x)=8\cos^2x$$

$$1-ctg^2x=\frac{8\cos^2x}{3}$$

№ 5