0 327152 910002

32-71-52-91
(128.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Уфа
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Пономарева Никиты Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

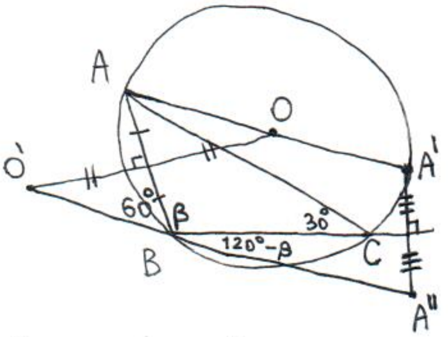
«29» марта 2026 года

Подпись участника

ПНЕ

32-71-52-91 (128.1)

Чистовик. №3



Пусть A' диам. противоположна A, а $\angle B = \beta$.

Т.к. $\angle ACB = 30°$, $\overset{\frown}{AB} = 60° \Rightarrow \angle AOB = 60°$.

$AO = OB \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = \frac{180° - \angle AOB}{2} = 60°$.

$\angle ABO = 60° \Rightarrow \angle ABO' = 60°$, так как O' – отражение.

Отсюда $\angle A''BC = 120° - \beta$, а так как A' и A'' симметричны, то $\angle A'BC = 120° - \beta$.

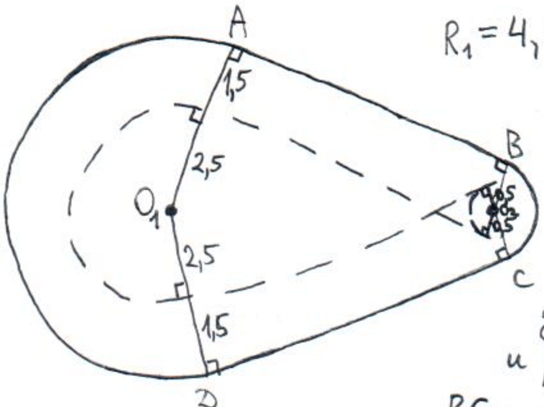
Поскольку AA' – диаметр, $\angle ABA' = 90°$.

$\angle ABC = \beta = \angle ABA' + \angle A'BC = 90° + 120° - \beta \Rightarrow 2\beta = 210° \Rightarrow \beta = 105°$.

$\boxed{\text{Ответ: } 105°.}$

№7

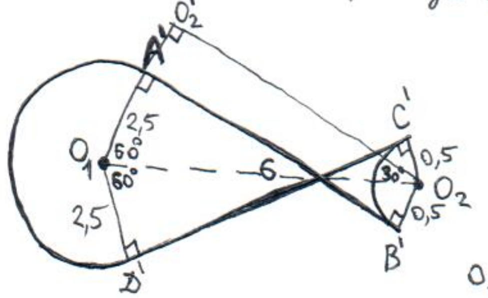
$R_1 = 4,\ R_2 = 1,\ O_1O_2 = 6.$



Проезжая на участках AB и CD, газонокосилка создала дорожки таких же длин.

На участке DA она создала дугу окружности с центром в O_1 и радиусом $|4 - 1{,}5| = 2{,}5$. На участке BC – дугу окружности с центром в O_2 и радиусом $|1 - 1{,}5| = 0{,}5$ как на рисунке.

Отдельно изобразим полученную кривую:



Спроектируем O_2 на прямую O_1A', тогда $O_1O_2' = 3$. Так как $O_1O_2 = 6$, то $\angle O_2'O_2O_1 = 30°$, $O_2'O_2 = 3\sqrt{3} = A'B'$, $\angle A'O_1O_2 = 60°$.

Аналогично $C'D' = 3\sqrt{3}$ и $\angle D'O_1O_2 = 60°$.

$O_1A' \parallel O_2B'$, из накрест лежащих углов $\angle O_1O_2B' = 60°$, аналогично $\angle O_1O_2C' = 60°$.

$\overset{\frown}{D'A'} = 240° \Rightarrow$ длина участка $D'A'$ равна $2\pi \cdot 2{,}5 \cdot \frac{240°}{360°} = \frac{10}{3}\pi$.

$\overset{\frown}{B'C'} = 120° \Rightarrow$ длина участка $B'C'$ равна $2\pi \cdot 0{,}5 \cdot \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}\pi$.

Складывая все длины, получим $3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \frac{10}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = 6\sqrt{3} + \frac{11}{3}\pi$.

$\boxed{\text{Ответ: } 6\sqrt{3} + \frac{11}{3}\pi.}$

Чистовик. №2

Сначала рассмотрим прямоугольники, содержащие полностью одну из сторон квадрата. Относительно каждой стороны их 100, поэтому всего 400 (общих среди них нет).

Теперь рассмотрим все остальные. Чтобы не было „дырки", каждый должен содержать граничную клетку, а чтобы квадрат не распался, не должен содержать одновременно граничные клетки противоположных сторон.

Среди них рассмотрим те, которые не содержат угла. Для каждой стороны способов выбрать высоту 100, теперь рассмотрим способы выбрать основание. Каждый из концов основания может быть любой клеткой из 99-ти (если клетки совпали, то прямоугольник ширины 1), способов выбрать концы так ровно 99^2. Каждый вариант основания, кроме 99-ти длины 1, был учтен дважды, поэтому в итоге имеем $\frac{99^2-99}{2}+99=4950$ вариантов для основания, а значит $4950\cdot100=495000$ для прямоугольника. Такие рассуждения применяем для 4-х сторон и получаем $4\cdot495000=1980000$ прямоугольников, среди которых все различны.

Осталось рассмотреть прямоугольники, содержащие углы, их всего $4\cdot100\cdot100=40000$.

Суммируем: 2020400.

$\boxed{\text{Ответ: } 2020400}$

№4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geqslant 0. \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$0<a<1$

$\log_2 a<0 \Rightarrow a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\leqslant 0.$

$$(a^x-a)(a^x-2a)\leqslant 0$$

$$a^x\in[a;2a]$$

$\begin{cases} a^x\geqslant a \\ a^x\leqslant 2a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant 1 \\ x\geqslant \log_2 a+1\end{cases}$ (знаки поменялись, так как $a<1$)

Отрезок длины 2026, когда $\log_2 a=-2026$, следовательно $a=2^{-2026}$, что удовлетворяет условию $0<a<1$.

$a>1$

$\log_2 a>0 \Rightarrow a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2\geqslant 0.$

$$(a^x-a)(a^x-2a)\geqslant 0$$

$$a^x\in(-\infty;a]\cup[2a;+\infty)$$

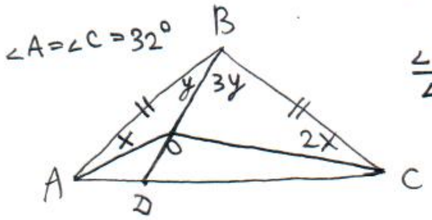
$\left[\begin{array}{l} a^x\leqslant a \\ a^x\geqslant 2a\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1 \\ x\geqslant \log_a 2+1\end{array}\right.$ (знаки прежние, так как $a>1$)

Все $x\leqslant 1$ подходят, это уже гораздо больше, чем отрезок длины 2026.

$\boxed{\text{Ответ: при } a=2^{-2026}}$

32-71-52-91 (128.1)

Чистовик. №6



$\frac{\angle BOA}{\angle BAO}=?$ Пусть прямые BO и AC пересекаются в D.

$\frac{AD}{DC}=\frac{\sin y}{\sin 3y}$, (из т. синусов для $\triangle ABO$ и $\triangle CBO$)

С другой стороны (из т. синусов для $\triangle AOD$ и $\triangle COD$) $\frac{AD}{DC}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(2x+3y)}$. $\frac{\sin(32°-2x)}{\sin(32°-x)}=\frac{\sin y}{\sin 3y}$.

Так как $4y=180°-2\cdot 32°=116°$, $y=29° \Rightarrow 3y=87° \Rightarrow \frac{\sin y}{\sin 3y}=\frac{\sin 29°}{\cos 3°}$.

Распишем синусы сумм и разностей:

$$\frac{(\sin x\cdot\cos 29°+\cos x\cdot\sin 29°)(\sin 32°\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)-2\cos 32°\sin x\cos x)}{(2\sin x\cos x\cdot\sin 3°+(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot\cos 3°)\cdot(\sin 32°\cos x-\cos 32°\sin x)}=\frac{\sin 29°}{\cos 3°}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos^3 x$:

$$\frac{(\operatorname{tg}x\cos 29°+\sin 29°)(\sin 32°-\sin 32°\operatorname{tg}^2 x-2\cos 32°\operatorname{tg}x)}{(2\sin 3°\operatorname{tg}x+\cos 3°-\cos 3°\operatorname{tg}^2 x)(\sin 32°-\cos 32°\operatorname{tg}x)}=$$

$$=\frac{\sin 29°}{\cos 3°}=\frac{\sin 32°\cos 3°-\cos 32°\sin 3°}{\cos 3°}$$

№5

$\max(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z)=?$ $z=\frac{\pi}{2}-x-y \Rightarrow \operatorname{tg}z=\frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)}=\frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\right)}$

$$\max\left(\frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}{\left(\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\right)}\right)=?=\max\left(\frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}^2y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}\right)$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y\geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}^2y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}\leqslant\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}{2}-\frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\right)^3}{2}.$$

Пусть $t=\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}{2}$. $f(t)=t-t^3$. Экстремумы при $f'(t)=$ $=1-3t^2=0$. Одна из точек экстремума: $t=\frac{\sqrt3}{3}$, несложно видеть, что это точка максимума. $\frac{\sqrt3}{3}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{4}{3}$.

Это значение произведения, при котором максимум достигается.

Чтобы оценка совпала с выражением, берем $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y=\frac{2}{\sqrt3}$.

Тогда $\operatorname{tg}z=\frac{1-4/3}{4/\sqrt3}=\frac{\sqrt3-4\sqrt3/3}{4}=\frac{\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt3}{3}$, к сожалению, <0.

Поэтому максимум достигается точно при различных тангенсах.

Черновик

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0$$

$0<a<1$

$(a^x)^2-3a\cdot(a^x)+2a^2 \leqslant 0$

$(a^x-a)(a^x-2a) \leqslant 0$

$a^x \in [a;2a]$

$a^x \geqslant a \Rightarrow x \leqslant 1$

$a^x \leqslant 2a \Rightarrow x \geqslant \log_a 2+1$

$a>1$

$(a^x-a)(a^x-2a) \geqslant 0$

$a^x \in (-\infty;a] \cup [2a;+\infty)$

$a^x \leqslant a \Rightarrow x \leqslant 1$

$a^x \geqslant 2a \Rightarrow x \geqslant 1+\log_a 2$

$\log_a 2 = -2026$

~~$\exists\, a=b=c \Rightarrow a^3+6a^2+12a=2026$~~

$abc+2(ab+ac+bc)+4(a+b+c)=2026$

$\min(abc)=?$

$4(a+b+c) \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\cdot 12$

$abc \geqslant 2026-2(a^2+b^2+c^2)+$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 4\sqrt{3} \geqslant$

$2(ab+ac+bc) \leqslant 2(a^2+b^2+c^2)$

$abc \geqslant$ $\quad \frac{ab+ac+bc}{3} \geqslant \frac{a+b+c}{6} \quad \geqslant 5\frac{1}{6}(a+b+c)$

~~$\frac{2026\cdot 6}{31} \geqslant a+b+c$~~

$$\frac{AD}{\sin(x+y)}=\frac{OD}{\sin(32^\circ-x)} \qquad \frac{DC}{\sin(2x+3y)}=\frac{OD}{\sin(32^\circ-2x)}$$

$$\frac{AD}{DC}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(2x+3y)}\cdot\ldots$$

$$\frac{(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}^2y)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y} \leqslant \frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}^2y}{2\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}=\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}{2}-\frac{(\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y})^3}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}{2}\cdot(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)$$

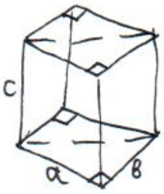
$\sqrt{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=t$

$\max\left(\frac{t-t^3}{2}\right)$

Черновик

5-6	7-8	9	10	11
8	6	4	3	17

№1 $V = abc$.



$S = 2(bc+ab+ac)$

$P = 4(a+b+c)$

$V+S+P=2026$

$V_{min} = ?$

$(S+P)_{max} = ?$

$$abc \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)^3 = \frac{27}{\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}\right)^3} =$$

$$= \frac{27(abc)^3}{\left(\frac{S}{2}\right)^3}$$

$$V \geq \frac{8 \cdot 27 V^3}{S^3}$$

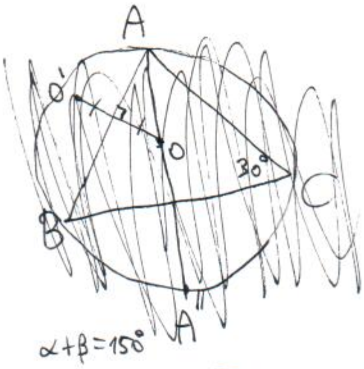
$$S^3 \geq 8 \cdot 27 V^2$$

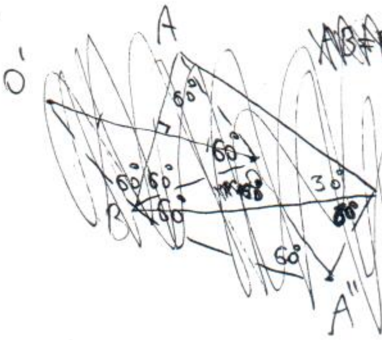
$99^2+99 = 99 \cdot 100 = 9900$

$990 \cdot 2 = 1980$

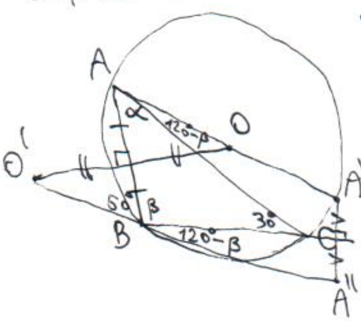
$\frac{9900}{2} = 4950$

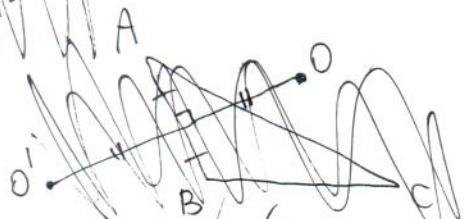
№3





$\alpha+\beta=150°$





$\overset{\frown}{AC} = 2\beta$

$\overset{\frown}{A'C} = 240° - 2\beta$

$\overset{\frown}{AA'} = 180° = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{A'C} = 4\beta - 240°$.

$\beta = 105°$

$4\beta = 420°$

№5

$\max(tg x \, tg y \, tg z)$

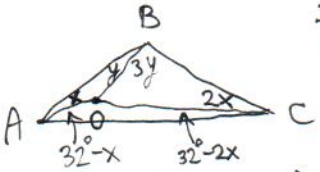
$x+y+z=90°$

$tg(90°-x) = \frac{1}{tg x}$

$\max\left(\frac{tg x \cdot tg y}{tg(x+y)}\right) = ?$

$\max\left(\frac{(tg x \cdot tg y)(1 - tg x \cdot tg y)}{tg x + tg y}\right) = ?$

№6 $\angle A = \angle C = 32°$



$\frac{\angle BOA = 180° - x - y}{\angle BAO = x} = ?$

$\frac{151-x}{x} = ?$

$4y = 180° - 64 = 116°$

$y = 29°$ $3 \cdot 29° = 87°$

$x + y + 64° - 3x + 3y + 2x = 180°$

$$\frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{\sin 3y}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin(32°-2x)}{\sin(32°-x)} = 1$$

$$\frac{\sin 32° \cdot \cos 2x - \cos 32° \sin 2x}{2\cos x \cdot (\sin 32° \cos x - \cos 32° \sin x)} = \frac{\sin 29°}{\sin 87°}$$

$$\frac{\sin 32° \cdot (2\cos^2 x - 1) - 2\cos 32° \sin x \cos x}{2\sin 32° \cos^2 x - 2\cos 32° \sin x \cos x} = \frac{\sin 29°}{\sin 87°}$$

№2