выдан 1 лист
Мосу
выдан 1 лист
Анеш

0 637113 520004

63-71-13-52
(124.34)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике, г. Москва
профиль олимпиады

Пригоровского Петра Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта (03) 2026 года

Подпись участника

90 (Девяносто) [illegible] ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

63-71-13-52
(124.34)

№ 1

$\sin x \geq 0$

$\cos x \neq 0$

$6(1-tg^2 x) = 16\sin^2 x$

$3 - 3tg^2 x = 8\sin^2 x$

$3 - 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 8(1-\cos^2 x)$

$6 - 3/\cos^2 x = 8 - 8\cos^2 x$

$8\cos^2 x - \frac{3}{\cos^2 x} - 2 = 0$

$\cos^2 x \neq 0$

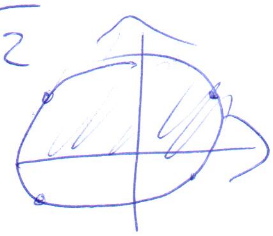
$\cos^2 x = 0$?

$8\cos^4 x - 2\cos^2 x - 3 = 0$

$\cos^2 x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 3\cdot 8}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16}$

$\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

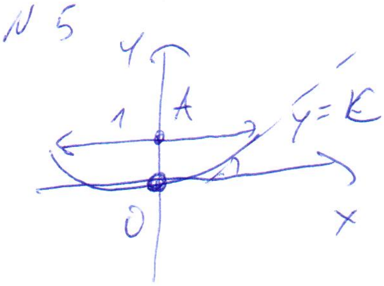
$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ и

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

№ 5

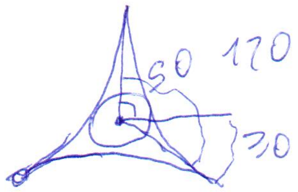


это дает что отрезок из вершины в центр касат-я

так как углы нулевые, то в своих "концах" кусни параболы имеют угол 30° (см рис. т.е. тангенс наклона касательной 30°, т.е. производная в ~~0,5~~ это $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = 0,5$

(конец параболы)



$\cancel{2CxA} = 2C \cdot 0,5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

т.е. $OA = C^2 \cdot 0,5 = \frac{1}{6}$

$r = r_{впис} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}}$

№ 3

поищем сколько таких в плоскости;

имеем:

вариантов выбрать вершину прямого угла 81

8 для катета "право-лево" 8 для "вверх-вниз";

т.е. это $81 \cdot 64$

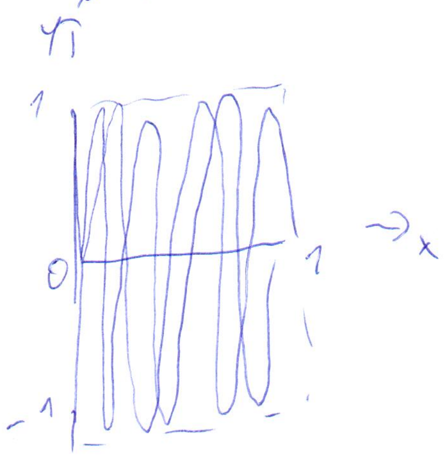
треугольник обязан лежать либо в пл-ти, пар-й

$\underbrace{xy}_{9}$; либо $\underbrace{xz}_{9}$; либо $\underbrace{yz}_{9}$

т.е. 27 плоскостей; тогда ответ

$\boxed{81 \cdot 27 \cdot 64}$

№ 4



№ 2

если число не делится на девять, то оно не станет делиться после деления на что-либо;
если число $\vdots\, 9$ но $\not\vdots\, 81$, то сумма цифр этого делится на 9 и после деления частное делиться на 9 не будет; т.е. надо найти числа (от 100 до 999 вкл) вида $k \cdot 81$ $k \in \mathbb{Z}$

проверим все такие

	Σ цифр		
162	9	✓	1
243	9	✓	2
324	9	✓	3
405	9	✓	4
486	18	✓	5
567	18	✗	
648	18	✓	6
729	18	✗	
810	9	✓	7
891	18	✗	
972	18	✓	8

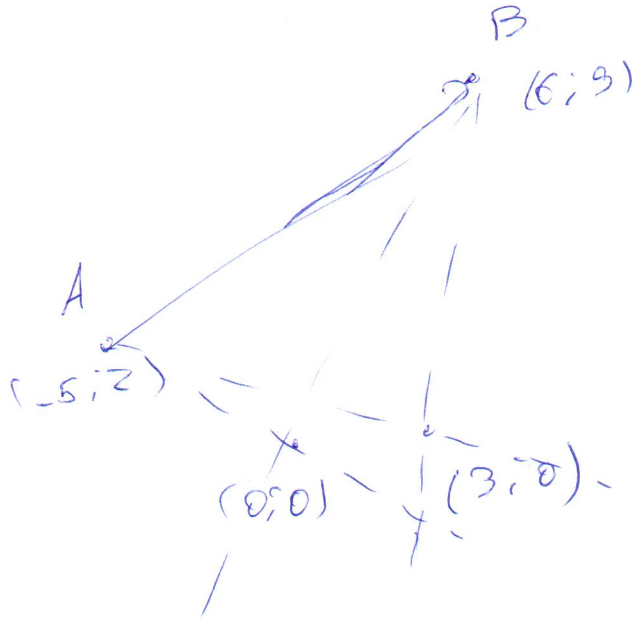
достаточно проверить что нацело делится, т.к. новых троек в разложении суммы цифр на множители не оказалось

т.е. надо найти 243 + 648 + 972

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ +\,972 \\ 648 \\ \hline 1620 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\,1620 \\ 243 \\ \hline 1863 \end{array}$$

Ответ: 1863

№ 6



№ 7

найдем координаты точек пересечения парабол $y=\frac{x^2}{2}+c_1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+c_2$; $c_2>c_1$

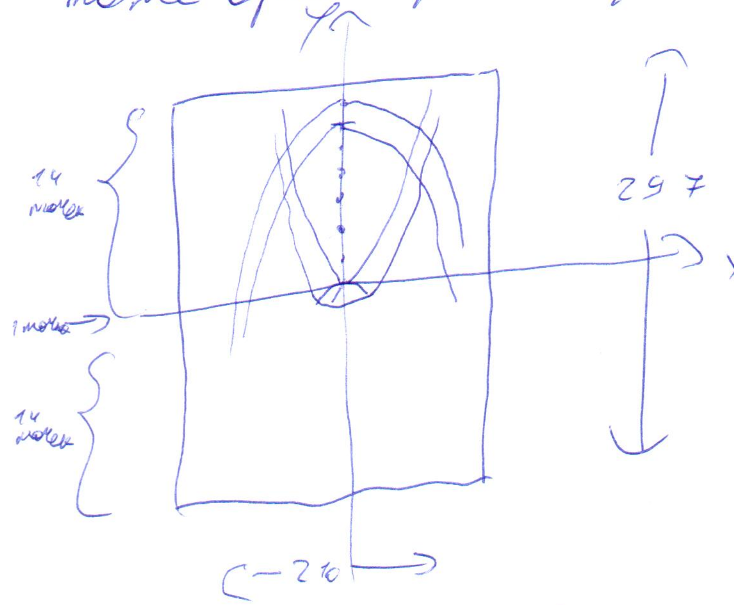
$$\frac{x^2}{2}+c_1=-\frac{x^2}{2}+c_2$$

$$x^2=c_2-c_1$$

$$x=\pm\sqrt{c_2-c_1}$$

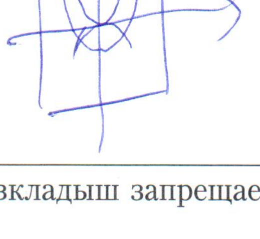
$$y=\frac{c_2-c_1}{2}+c_1=\frac{c_2+c_1}{2}$$

Предположу что задача предполагает, что ось y направлена вертикально, и что лист тоже ориентирован вертикально



предположу также, что „единичный отрезок" означает, что ~~с~~ если смотреть в сантиметрах

клетки будут образовываться между ~~парабол~~ соседни 2 парами соседних парабол или двумя параболами, если их вершины на расстоянии 1 см



найдем площадь клеточки в общем виде;
пусть есть 2 пары парабол

$$y = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{и} \quad y = -\frac{x^2}{2} + c_2$$

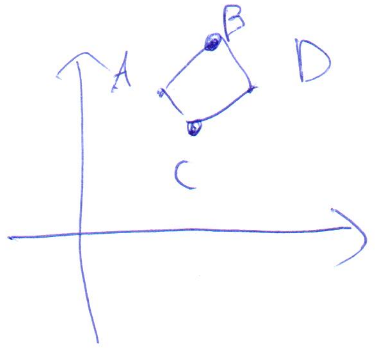
$$y = \frac{x^2}{2} + c_1 - 1 \qquad y = -\frac{x^2}{2} + 1 + c_2$$

рассмотрим „правую" клеточку; т.е. будут точки

$$A\left(\sqrt{c_2 - c_1};\ \frac{c_1 + c_2}{2}\right);\ B\left(\sqrt{c_2 + 1 - c_1};\ \frac{c_1 + c_2 + 1}{2}\right);$$

$$C\left(\sqrt{c_2 - c_1 + 1};\ \frac{c_1 + c_2 - 1}{2}\right);$$

$$D\left(\sqrt{c_2 - c_1 + 2};\ \frac{c_1 + c_2}{2}\right)$$



$$\vec{CA} = \{\underbrace{\sqrt{c_2 - c_1} - \sqrt{c_2 - c_1 + 1}}_{a};\ \tfrac{1}{2}\}$$

$$\vec{CD} = \{\underbrace{-\sqrt{c_2 - c_1 + 1} + \sqrt{c_2 - c_1 + 2}}_{b};\ \tfrac{1}{2}\}$$

$$S = \frac{|\vec{CA} \times \vec{CD}|}{2} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ a & \frac{1}{2} & 0 \\ b & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}\right\|}{2} =$$

$$= \frac{\left|\vec{z}\left(a\frac{1}{2} - b\frac{1}{2}\right)\right|}{2} = \frac{a - b}{4} = \frac{\sqrt{c_2 - c_1 + 2} - \sqrt{c_2 - c_1}}{4}$$

№7 (прод.)

но сверху такой же о-к. по площади

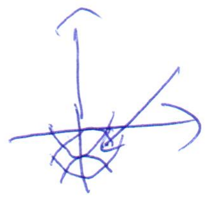
т.е. $S = \frac{\sqrt{c_2-c_1+2} - \sqrt{c_2-c_1}}{2} =$

$$= \frac{2}{2\left(\sqrt{c_2-c_1+2}+\sqrt{c_2-c_1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c_2-c_1+2}+\sqrt{c_2-c_1}} =$$

$\exists\ c_2-c_1=n$

$= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ $\downarrow$; т.е. нужно ~~[illegible]~~

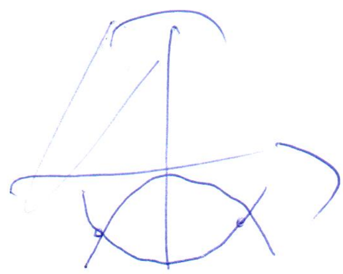


минимизировать n

при n=0 получаем клетку

под стрелочкой ~~[illegible]~~ с $S=\frac{1}{\sqrt{2}}$

рассм 2 пар-лы



$y=\frac{x^2}{2}+c_1$

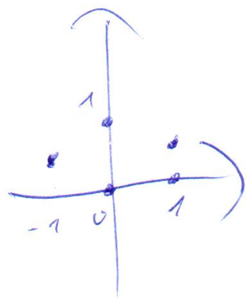
$y=-\frac{x^2}{2}+c_1+1$

точки ± 1; $\frac{2c+1}{2}$

$\exists\ c=0$ т.к. это неважно просто сдвиг ; вершины $(0;0)$; $(0;1)$

$(1;0{,}5)$ $(-1;0{,}5)$

№7 (прод)



это ромб площадью

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$

Это максимум

Ответ: 1

№8

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

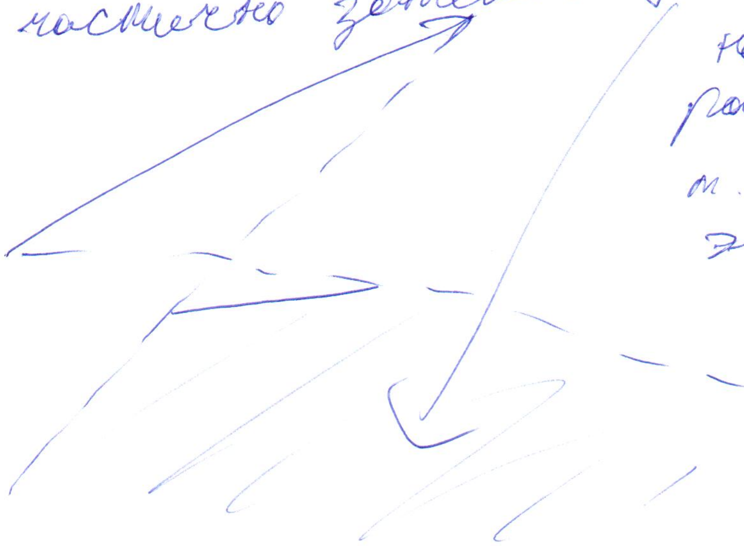
ОДЗ $x > 0;\ x \neq 1 \quad a > 0;\ a \neq 1$
(логарифмы)

~~$\exists\ x = a^{w}$ (всегда такое и одно $\exists$ w)~~

~~$8a^{2w} \cdot w - \frac{1}{w} - 2a^{w} \geq 0$~~

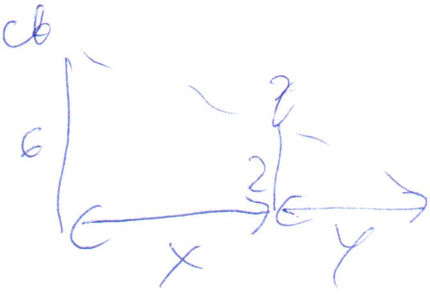
№6

если бы дело шло об оптике на плоскости то нужно бы было взять крайние точки и ~~[illegible]~~ провести лучи и получили частично затемненную область;



но у нас имеется разница высоты, т.е. когда-нибудь эти лучи упадут на землю и эта область прекратится, очевидно

эта области границы тоже будет прямой линией и мы можем её найти



$$\frac{y}{2} = \frac{x+y}{6}$$

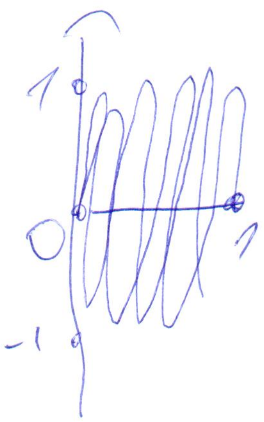
$$3y = x+y$$

$$2y = x$$

$y = \frac{x}{2}$; т.е. расстояние на котором свет прекратится – половина расст-я от ф-на до забора

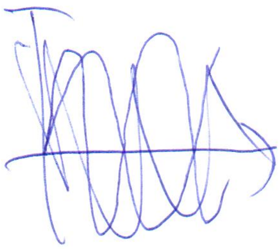
~~R [illegible]~~

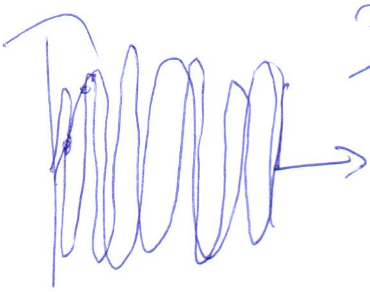
№ 4



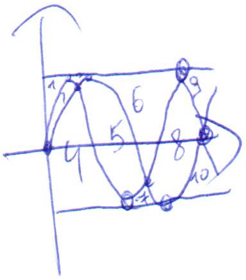
каждая новая области создается пересечением синусоид либо ~~перес~~ касанием синусоидой прямых $y = \pm 1$ и $x = 0; 1$

т. е. всего их число пересеч + число касаний ± 1 + еще





3 т. к. точки касания $x = 0; 1$ общие



т. к. можем присоединить к решению

у

~~$y = \sin k\pi x$~~ $y = \sin 11\pi x$ корни

$0; \frac{1}{11}; \frac{2}{11}; \frac{3}{11} \ldots; \frac{10}{11}; 1$

1 2 3 4 11 12 ; т. е. касаний с верхом и низом на 1 меньше, т. е. 11

$\sin 11\pi x = \sin 15\pi x$

~~$\sin 11\pi$~~

$$\left[\begin{array}{l} 11\pi x = 15\pi x + 2\pi k_1 \\ 11\pi x + 15\pi x = \pi + 2\pi k_2 \end{array}\right. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} -4x = 2k_1 \\ 26x = 1 + 2k_2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 2x = k_3 \\ 26x = 1 + 2k_2 \end{array}\right.$$

63-71-13-52 (124.34)

№ 4 (прод-е)

все k_i – целые числа

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2};\ 0;\ 1 \\ x = \frac{1}{26};\ \frac{3}{26};\ \frac{5}{26} \ldots;\ \frac{25}{26};\ 1 \end{array}\right.$$

1 2 3 ... 13 14 нуж. 2 раза $\frac{1}{2}$

$\sin 11\pi x = \sin 17\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 11\pi x + 2\pi k_4 = 17\pi x \\ 11\pi x + 17\pi x = \pi + 2\pi k_5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k_4 = 3x \\ 28x = 1 + 2k_5 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1 \\ x = \frac{1}{28}\ \frac{3}{28} \ldots \frac{27}{28} \end{array}\right.$$

1 2 14

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi k_6 + 15\pi x = 17\pi x \\ 15\pi x + 17\pi x = \pi + 2\pi k_7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k_6 = x \\ 32x = 1 + 2k_7 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0;\ 1 \\ x = \frac{1}{32}\ \frac{3}{32} \ldots \frac{31}{32} \end{array}\right.$$

1 2 16

они нигде не перес-ся в трoем кроме как при $x = 0;\ 1$

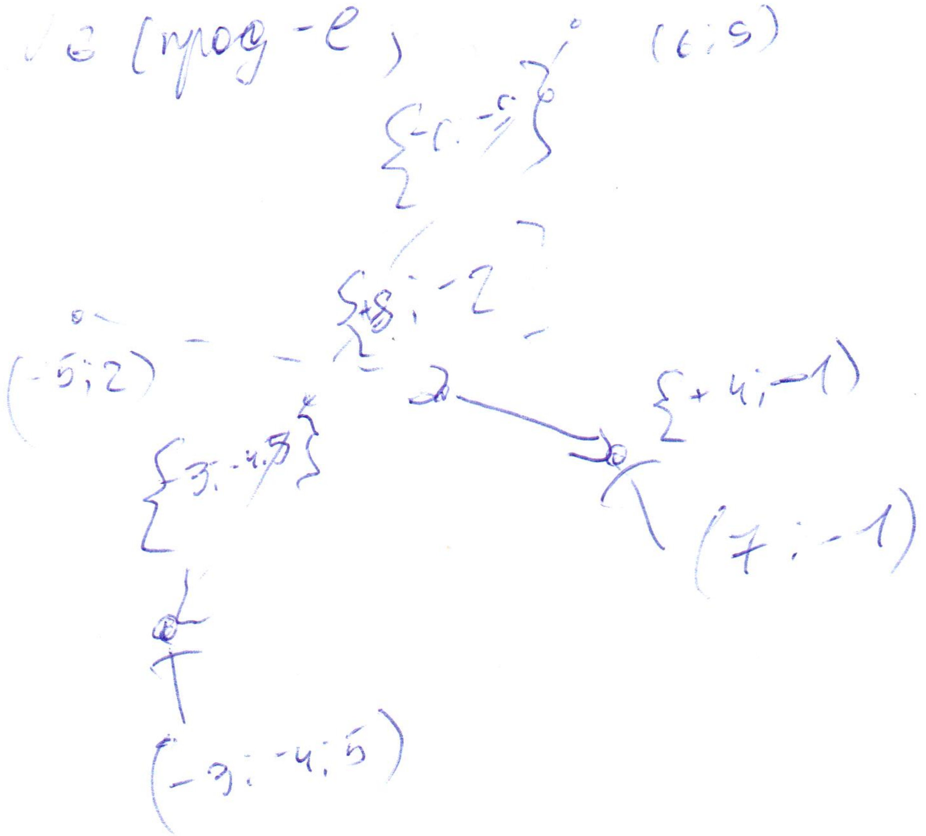
т. е. еще $13 + 14 + 16 +$

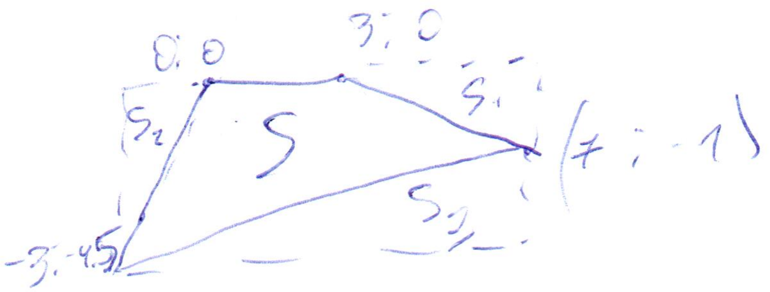
$$+ \underbrace{11 + 15 + 17}_{\text{касаний вершин низа}} + 2 + 1 = $$

$= 30 + 25 + 15 + 19 =$ 40

$=$ 89 ⇐ Ответ.

№ 3 (прод-е)





$S_1 = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

$S_2 = \frac{4,5 \cdot 3}{2} = 4,5 \cdot 1,5 = 6,75$

$S_3 = \frac{10 \cdot 3,5}{2} = 5 \cdot 3,5 = 17,5$

$S_{общ} = 4,5 \cdot 10 = 45$

$S = 45 - 6,75 - 17,5 - 2 = 27,5 - 2 - 6,75 =$

$= 25,5 - 6,75 = 18,75$ ← Ответ

Задача №9 (прод-е)

$8x^2\log_a x-\log_x a-2x\geq 0$

$8x^2\log_a x-\frac{1}{\log_a x}-2x\geq 0$

$$\frac{8x^2\log_a^2 x-2x\log_a x-1}{\log_a x}\geq 0$$

$x\log_a x=t$

$\log_a x>0$ при $x>1$

$\log_a x<0$ при $x<1$

$$\frac{8t^2-2t-1}{\log_a x}\geq 0$$

$8t^2-2t-1=0$

$t=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 8}}{16}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{16}$

$$\frac{(16t-2-\sqrt{36})(16t-2+\sqrt{36})}{\log_a x}\geq 0$$

т.е. t либо вне пром-ка $\left[\frac{2-\sqrt{36}}{16}\right.$, $=t_1$

$\left.\frac{2+\sqrt{36}}{16}\right]$ и $x>1$, либо t в отрезке $=t_2$

и $ax<1$

проанализируем функцию $x\log_a x$

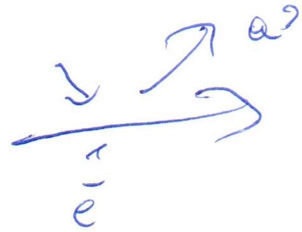
на всякий запишем в таком виде что нам подходит

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \in [t_1; t_2] \\ x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \in (-\infty; t_1] \cup [t_2; +\infty) \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

если $a > 1$ и наоборот когда $0 < a < 1$

$$f'(x) = (x \log_a x)' = \log_a x + x \cdot \frac{1}{x \ln a} =$$

$$= \log_a x + \log_a e$$

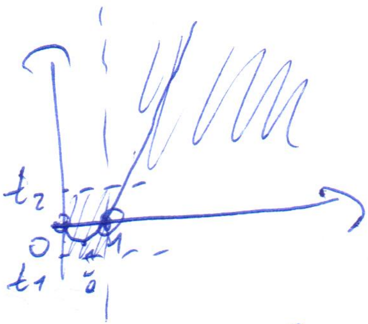


$$= \log_a xe$$

$f'(x) = 0$ при $\log_a xe = 0$ т.е. $x = \frac{1}{e}$

наим. знач.

$$\frac{\log_a \frac{1}{e}}{e} = -\frac{\log_a e}{e}$$

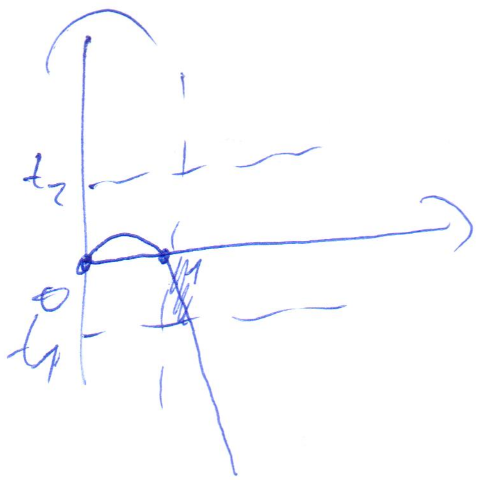


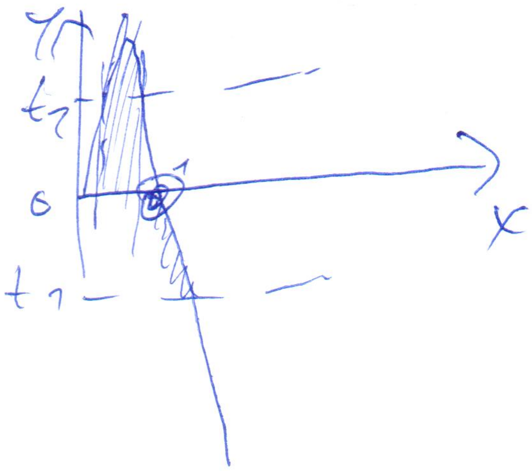
при этом изменение основания логарифма с a на b меняет функцию $x \log_a x$ в $\log_b a$, т.е. в константу раз; т.е. всё что мы можем, это растягивать или сжимать график (переворачивать его) или при переходе a через 1 изменять требуемое от икс расположение отн-но единицы на пром-е; как видно из эскиза рисунка у нас всегда будет луч на $+\infty$, чего мы не хотим

№ 8 (прод-е.)

тогда рассмот $a < 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \in [t_1; t_2] \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \in (-\infty; t_1] \cup [t_2; +\infty) \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$





то есть теперь мы можем отловить случай вырождения; когда мы можем отследить случай вырождения в точку, когда максимум (т.е. $-\frac{\log_a e}{e}$) равен t_2, чтобы появилась как раз эта точка; отсюда находим наше a оно единственное так как в ходе такого движения графика все a были рассмотрены

$-\frac{\log_a e}{e} =$ $t_2 = \frac{2 \pm 6}{16} = \frac{1}{2}$

$\log_a e$ $\frac{1}{\ln a} = -\frac{e}{2}$

$\ln a = -\frac{2}{e}$

$a = e^{-\frac{2}{e}}$ и это ответ у нас получился

один промежуток $\left\{\frac{1}{e}\right\} \cup (1;$ число при котором $f(x) = t_1]$

оно одно; т.е. это окончательный и полный ответ

Ответ: $e^{-\frac{2}{e}}$ (отмечу что оно меньше 1, но это напрямую следовало из решаемого ур-ия)