0 242070 640001

24-20-70-64
(123.19)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 КЛАСС

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ЛОМОНОСОВ
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

ПРОСКУРИНА ЯРОСЛАВА СЕРГЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника

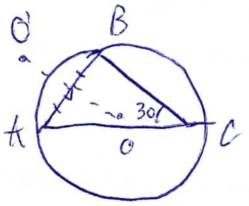
80(Восемьдесят)

24-20-70-64
(123.19)

ЧЕРНОВИК

$tg\,x \cdot tg\,y \cdot tg\,z = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} \cdot tg\,z = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} \cdot tg\,z$

$\frac{\cos(x-y) - \cos(\frac{\pi}{2} - z)}{\cos(x-y) + \cos(\frac{\pi}{2} - z)} \cdot tg\,z = \frac{\cos(x-y) - \sin(z)}{\cos(x-y) + \sin(z)} \cdot tg\,z$



$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

$a+b+c = tg\,x + tg\,z + tg\,y = \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y} + tg\,z =$

$= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} + tg\,z = \frac{\cos z}{\cos x \cdot \cos y} + tg\,z = \frac{\cos^2 z + \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$

$\frac{a^{2x} - 3 \cdot a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \ge 0$

$\frac{(a^x)^2 - 3a \cdot a^x + 2a^2}{\log_2 a} = \frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \ge 0$

$a^x = 2a$

$a^{x-1} = 2$

$x = 1; \quad x_2$

$\log_a 2 = x - 1$

$x = \log_a 2 + 1$

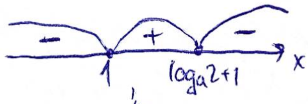
$x = 1$

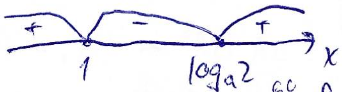
$a = 1: \ \frac{(1^x - 1)(1^x - 2 \cdot 1)}{\log_2 1} = \frac{0}{0} \ge 0$ — неверно

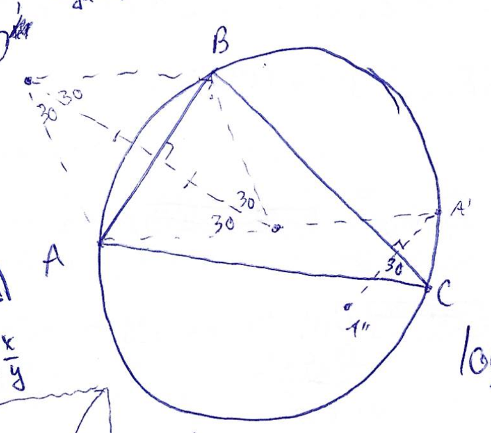
$a < 1: \ \frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \ge 0$

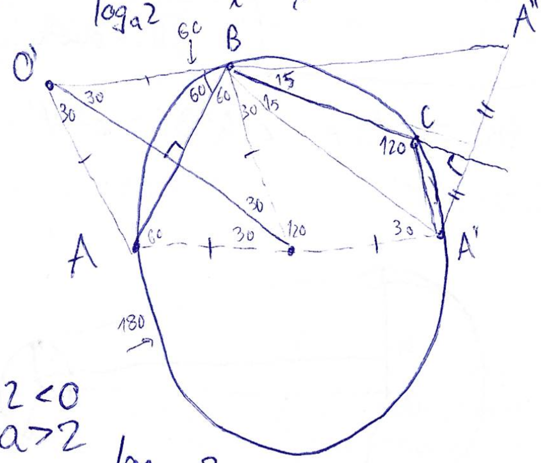
$a > 1: \ \frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \ge 0$

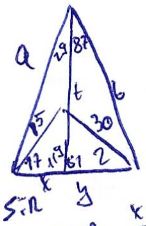
$\angle B = 105°$











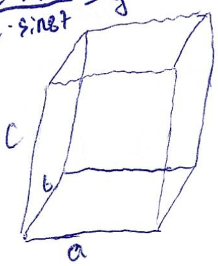
$\frac{a \cdot t \cdot \sin 29}{b \cdot t \cdot \sin 87} = \frac{x}{y}$

$\log_a 2 < 0$

$a > 2$

$\log_{1,5} 2$

$\log_3 2$



$abc + 2(ab + bc + ac) + a + b + c = 2026$

$(2a+1)(2b+1)(2c+1) =$

$8abc + 4(ab + bc + ca) + 2(a+b+c) + 1$

$x^2 \cdot y = 2$

$\frac{x}{y} = 2$

$V + 2\frac{V}{a} + 2\frac{V}{b} + 2\frac{V}{c} + a + b + c = x \cdot y^2 = 1$

$= 2026$

$2y^3 = 1; \ y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$y = 1$

$x = 2$

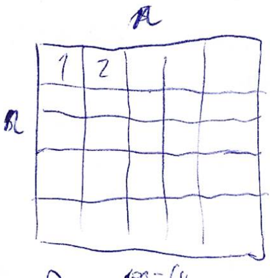
151

$V = \frac{2026}{a+b+c}$

$\frac{2026 - a - b - c}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 1} = 2$

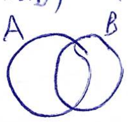
$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$



$n(n-1)$

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A \cup B) + n(C \cup D) - n((A \cup B) \cap (C \cup D))$



$A + B + C + D - (A \cap B) - (A \cap C) -$

$\frac{180 - \beta - \alpha}{\alpha}$

$\frac{180 - 29 - \alpha}{\alpha} = \frac{151}{\alpha} - 1$

$180 - 64$

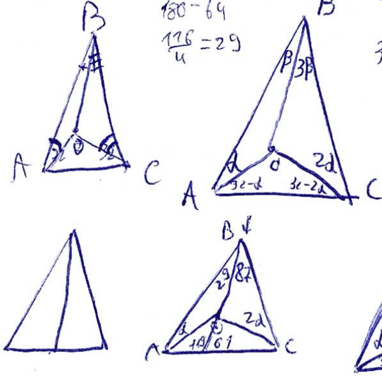
$\frac{116}{4} = 29$

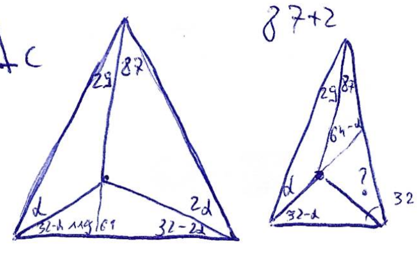
$32 + 87 = 119$

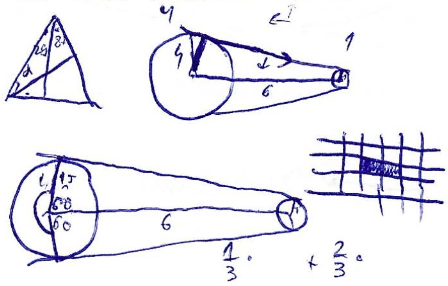
$180 - 119 - 32 + 2\alpha + 180 - 29 + \alpha = 180$

$3\alpha = -180 + 119 + 32 + 29 = -180 + 148 + 32 = -180 + 180$

$87 + 2$

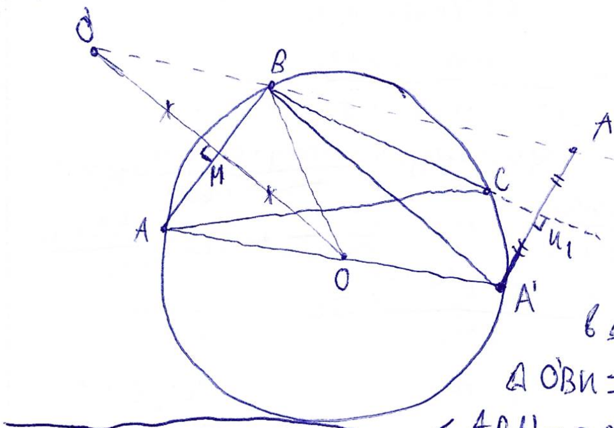






$\frac{1}{3}$ $+ \frac{2}{3}$

№3



Пусть A' – диаметрально противоп. точка точке A $\Rightarrow O \in AA'$

$\angle C = 30^\circ$ – вписанный и опирается на AB в окр.

Тогда $\angle AOB$ как центральный и опир. на AB: $\angle AOB = 2 \cdot 30 = 60^\circ$

$OB = OA$ как радиусы $\Rightarrow \triangle AOB$ – равноб.

Тогда OH – и высота и биссектр., т.е. $\angle BOH = \frac{1}{2}\angle BOA = 30^\circ$

в $\triangle BOH$: $\angle B = 90^\circ - \angle HOB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\triangle O'BH = \triangle OBH$ по двум катетам $\Rightarrow \angle O'BH = \angle HBO = 60^\circ$

$\angle ABA' = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AA'

Т.к. O – симм. O' относ. AB, то $O'O \perp AB$; $OO' \cap AB = H$; $O'H = OH$

Аналогично $A'A'' \perp BC$; $A'A'' \cap BC = H_1$; $A'H_1 = A''H_1$

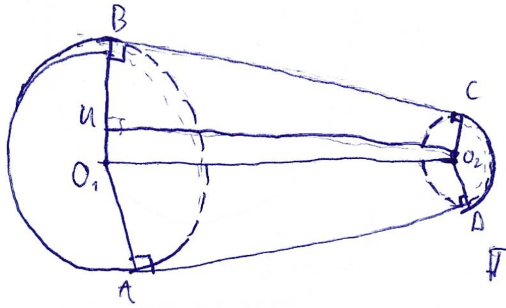
Т.к. $A'' \in O'B$, то $\angle A'BA'' = 180^\circ - \angle O'BH - \angle ABA' = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

в $\triangle A'BA''$ BH_1 – высота и медиана, значит $\triangle$ – равноб. и BH_1 – биссектрисса $\Rightarrow \angle H_1BA' = \frac{1}{2}\angle A''BA' = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15^\circ$

$\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = \angle ABA' + \angle A'BH_1 = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Ответ: 105°

№7



Проведем радиусы к концам касательных: O_1A; O_1B; O_2C; O_2D

$O_1B \perp BC$, $O_2C \perp BC$ т.к. рад. проведены в т. кас. $\Rightarrow O_1B \parallel O_2C$ т.е. O_1BCO_2 – трап.

Проведем O_2H – высоту к BO_1

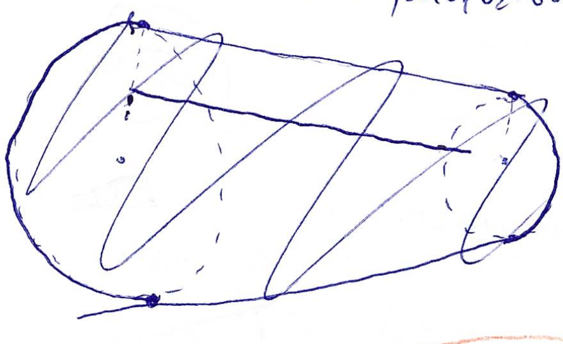
Т.к. $O_2H \perp HB$, $CB \perp HB$ $\Rightarrow HBCO_2$ – парал-м с углом 90° $\Rightarrow HBCO_2$ – прямоуг. $\Rightarrow HB = CO_2 = 1$, $BC = HO_2$

$HO_1 = BO_1 - BH = 4 - 1 = 3$

По т. Пифагора $HO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - HO_1^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} = BC$

$\sin\angle BO_1O_2 = \frac{HO_2}{O_1O_2} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BO_1O_2 = 60^\circ$ и $\angle CO_2O_1 = 180 - 60^\circ = 120^\circ$, т.к. $CO_2 \parallel BO_1$

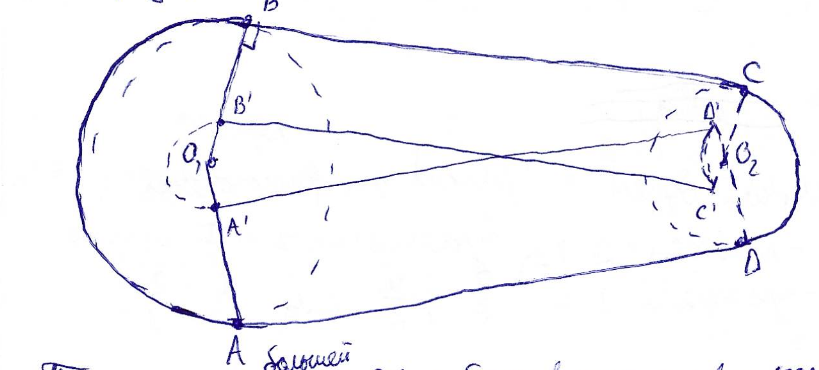
Аналогично $AD = 3\sqrt{3}$; $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$; $\angle O_1O_2D = 120^\circ$



→ см. далее

24-20-70-64
(123.19)

№ 7 Продолжение



Пусть при отбрас. прав. она идет из A в A'
B в B' и т.д.
$AA' = BB' = CC' = DD' = 1,5$
Проезжая по BC и AA газон. отбрасывая $B'C' = BC = 3\sqrt{3}$
$A'D' = AD = 3\sqrt{3}$

Проезжая по дуге BA отбрасывается правой большей дуга B'A' с радиусом меньшим на 1,5.
Градусная мера B'A' равна BA, т.е. равна $360 - 120 = 240°$ $(4 - 1,5 = 2,5)$
(меньшая дуга $BA = 120$, т.к. $\angle BO_1A = 120°$)

т.е. большая дуга $B'A' = \frac{240}{360} \cdot 2\pi \cdot 2,5 = \frac{5\pi}{} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10\pi}{3}$

Для дуги CD ситуация чуть меняется ведь $CC' > CO_2$, так что отбрасывается меньшая дуга окружности с радиусом $|1 - 1,5| = 0,5$ с градусной мерой $360 - 240 = 120°$
(т.к. большая дуга $CD = 240°$
т.к. $\angle CO_2D = 240°$)

Меньшая дуга $C'D' = \frac{120}{360} \cdot 2\pi \cdot 0,5 = \frac{\pi}{3}$.

Итак за весь "круг" отбрасывается дорожка длиной: $2 \cdot 3\sqrt{3} + \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$

Ответ: $6\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3}$

№ 4

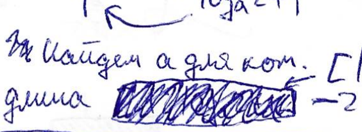
$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

ОДЗ: $\log_2 a \neq 0$
$a > 0$
$\Updownarrow$
$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$\frac{(a^x - 2a)(a^x - a)}{\log_2 a} \geq 0$$

I $a < 1$:
Тогда $\log_2 a < 0$, т.е.

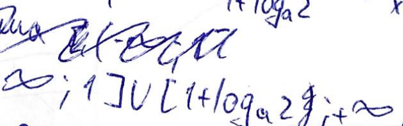
$$\frac{(a^x - 2a)(a^x - a)}{\log_2 a} \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a^x - 2a)(a^x - a) \leq 0$$



Найдем a для кот. $[\log_a 2 + 1; 1]$
длина — 2026

$1 - (\log_a 2 + 1) = 2026$
$\log_a 2 = -2026$
$a^{-2026} = 2$
$a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}} < 1$

II $a > 1$:
$\log_2 a > 0 \Leftrightarrow \frac{(a^x - 2a)(a^x - a)}{\log_2 a} \geq 0$
$\Updownarrow$
$(a^x - 2a)(a^x - a) \geq 0$



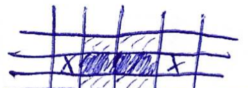
$(-\infty; 1] \cup [1 + \log_a 2; +\infty)$ — не отрезок

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

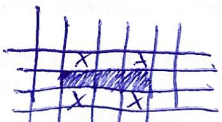
№8 До 2 хода включительно при любом ходе он рисует кольцо

2 ход: I  или II

~~Вероятность~~ I или II случай будем ли зависит от ~~второго~~ первого хода

1 ход 

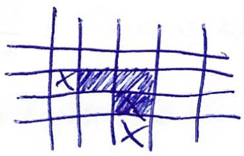
// – приведет к II
X – приведет к I ⇒ вероятности I и II соот-но: $\frac{2}{6}$; $\frac{4}{6}$ или $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$

[illegible] случае  отмеченные клетки ведут к кольцу и их в-сть: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

На 3 ходу

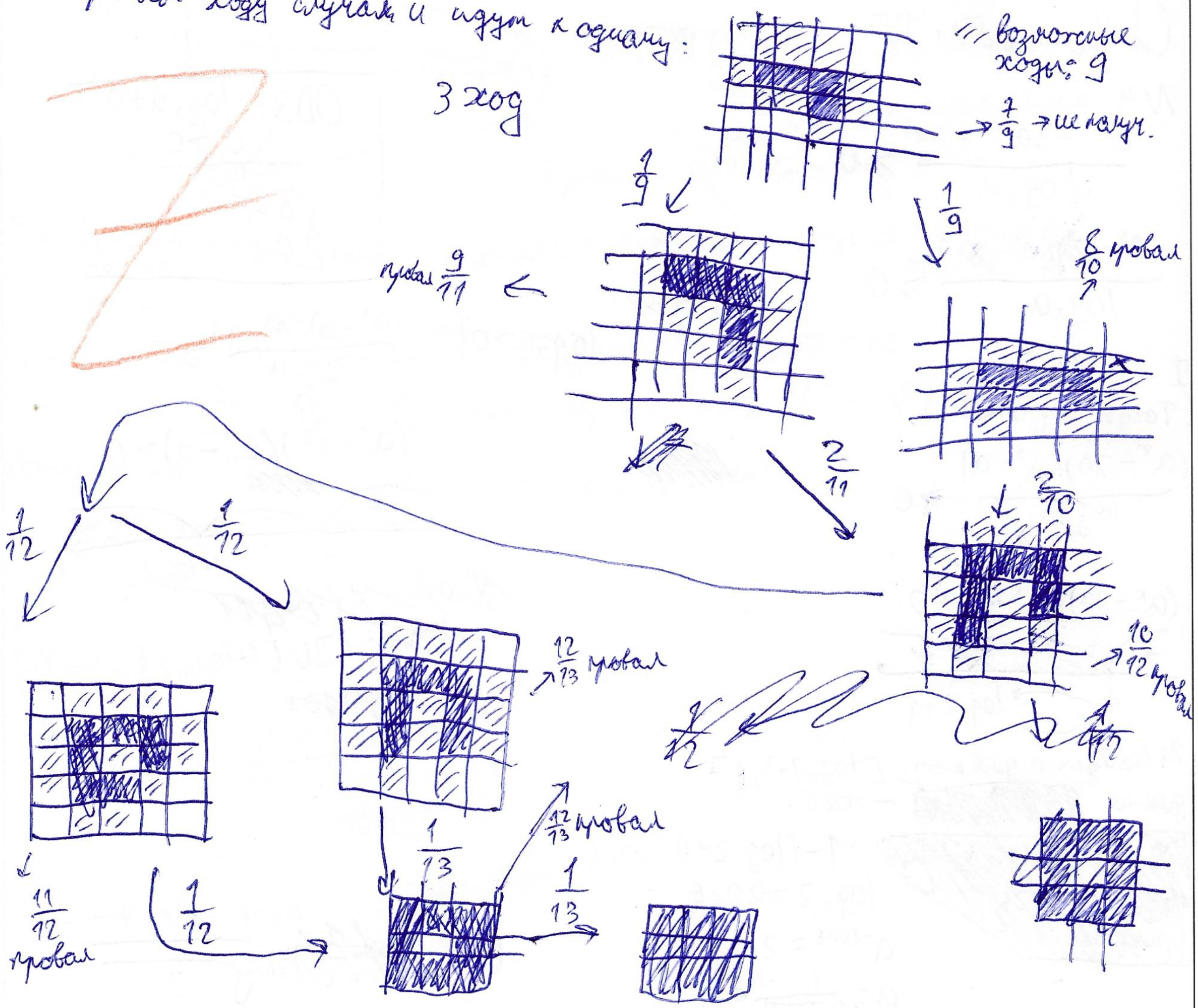
~~Далее при каждом ходе в-сть получить кольцо: $\frac{2}{10 \cdot 9}$~~

На 3 ходу ~~[illegible]~~ при II случае вероятность того что может получится кольцо: $\frac{2}{7}$



На третьем ходу случаи идут к одному:

3 ход



№8 продолж

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{1}{9}:\left(\frac{2}{11}+\frac{2}{10}\right)\cdot\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{13}=$$

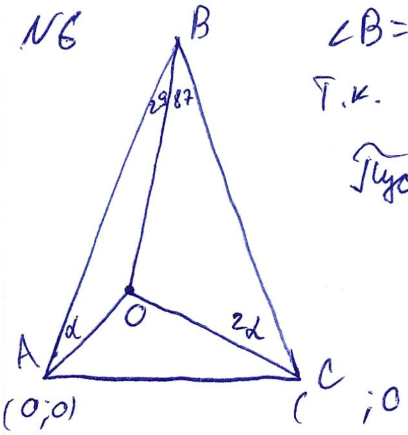
$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{21}\right)\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{13}=$$

$$=\frac{21+24}{6\cdot 21}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{11+10}{5\cdot 11}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{12+13}{13\cdot 12}\cdot\frac{1}{13}=\frac{45\cdot 21\cdot 25\cdot 1}{6\cdot 21\cdot 9\cdot 5\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 12\cdot 13\cdot 21}$$

$$=\frac{25}{6\cdot 11\cdot 12^2\cdot 13^2}$$

Ответ: $\frac{25}{6\cdot 11\cdot 12^2\cdot 13^2}$

№6



$\angle B = 180 - \angle A - \angle C = 180 - 2\cdot 32 = 116^\circ$

Т.к. $\frac{\angle AOB}{\angle BOC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle AOB = 29^\circ$, $\angle BOC = 87^\circ$

Пусть $\angle BAO = \alpha \Rightarrow \angle BCO = 2\alpha$