дешифр

0 815549 530006

81-55-49-53
(129.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Усть-Лабинск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Раш Назара Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Чистовик 1 №1

$\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}6(2-\frac{1}{\sin^2x})=16\cos^2x\\ \cos x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12-\frac{6}{\sin^2x}-16\cos^2x=0\\ \cos x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}16\sin^2x-\frac{6}{\sin^2x}-4=0\\ \cos x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8\sin^4x-2\sin^2x-3=0\\ \cos x\ge0\\ \sin x\ne0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin^2x=\frac{3}{4}\\ \sin^2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ \cos x\ge0\\ \sin x\ne0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2x=\frac{3}{4}\\ \cos x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos x\ge0\end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

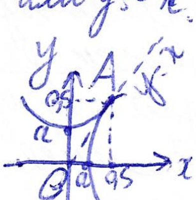
81 $\frac{162}{9}=18$

№2

Раз число при делении на свою сумму цифр даёт целое число, кратное 9, то и само начальное число кратно 9. Раз число кратно 9, то и его сумма цифр кратна 9, значит, изначальное число кратно 81, ведь при делении на кратное 9 получим кратное 9. Значит, для условия подойдут ~~все~~ числа, кратные 81. Это числа: 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972. Однако заметим, что не все из них при делении на свою сумму цифр дают целое число. Уберём их и получим исходное множество: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972. Сумма: 324+486+810=1620. Ответ: в множество A входят: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972. Сумма 1620.

№5

Возьмём центр „квадрата" за начало координат. Тогда соседние его стороны симметричны относительно прямых $y=x$ или $y=-x$. Рассмотрим график только для 2 соседних сторон.



Пусть радиус впис. окруж. равен a, тогда эти графики задаются как $y=Cx^2+a$ и $y=\pm\sqrt{\frac{x-a}{C}}$ соответственно. Мы знаем, что стороны равны 1, значит, графики пересекаются в т. $A(0,5; 0,5)$. Из этого найдём C: $0,5=C\cdot0,25+a \Leftrightarrow C=2-4a$. ~~Из касания графиков в т. A имеем~~ $\cancel{(2-4a)\cdot0,25+a=\sqrt{\frac{0,5-a}{2-4a}}}$ ~~(берём только положит. половину графика, т.к. y=0,5)~~

Чистовик 2 №5

~~$0{,}5-a+a=\sqrt{\frac{0{,}5-a}{2-4a}} \Leftrightarrow \frac{0{,}5-a}{2-4a}=0{,}25 \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}5-a=0{,}5\\ a+0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a \le \sqrt{a+0{,}5}\\ 0 \le\end{cases}$~~

Из построения точки пересечения графиков находятся всегда на $y=x$, найдем когда она единственна:

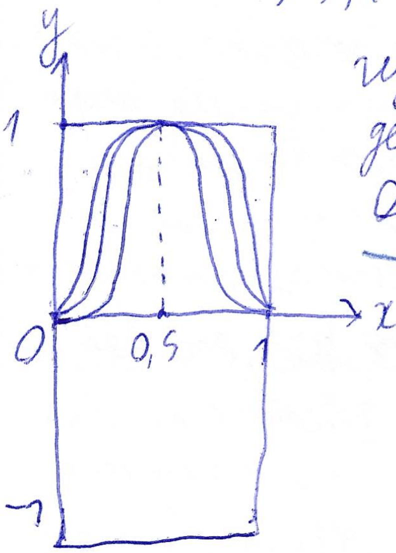
$x=(2-4a)x^2+a \Leftrightarrow (2-4a)x^2-x+a=0$ имеет 1 реш.

$D=1-4a(2-4a)=16a^2-8a+1=(4a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=0{,}25$.

Ответ: 0,25

№4.

Имеем $y=\sin k\pi x$ и $k\in\{11, 13, 17\}$, т. к. все k нечётные, то для каждого k эти графики будут пересекаться в точка $(0;0)$, $(0{,}5;1)$, $(1;0)$ следующим образом:



Из графика видно, что полоска разделена на 7 частей

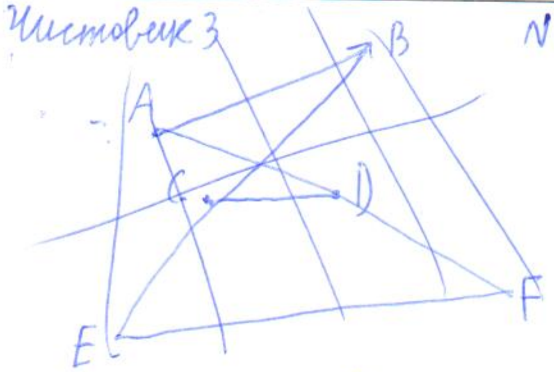
Ответ: на 7 областей

№3

Каждая координата точки может принимать значение от -3 до 3 - всего 7. Тогда всего точек в F: $7\cdot 7\cdot 7=343$. Зададим треугольник из условия следующим алгоритмом: берем произвольную точку ~~в ней~~ вершину прямого угла. Берем одну из 18 возможных ~~точек в плоскости xz и это будет 2 вершина~~. точек для образования катета, параллельного одной из осей. Больше мы не можем выбрать точку из этой оси, значит, 3 точку для катета выбираем из оставшихся 12. Нам не важен порядок точек, значит, делим количество способов на 2. Получим всего треугольников: $343\cdot\frac{18\cdot 12}{2}=37044$.

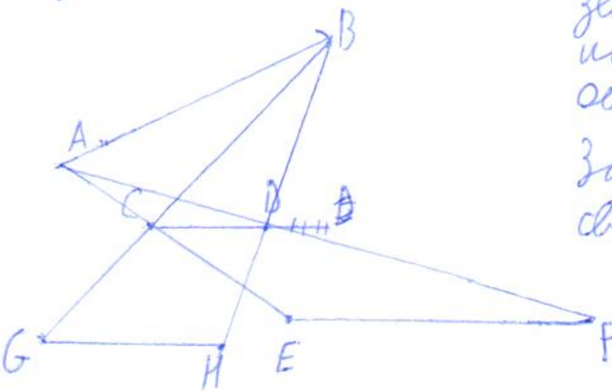
Ответ: 37044

Чистовик 3



№6

Пусть границы забора точки C и D, а точки куда упадет ~~максимально~~ луч AC – E, AD – F, BC – G, BD – H. Пусть C' и D' проекции точек C и D на землю. ~~Заметим~~ Тогда искомая ~~п~~ площадь тени – объединение C'D'HG и C'D'FE.



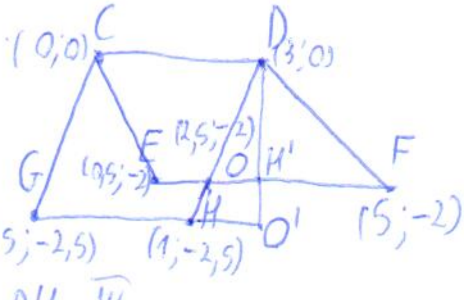
Заметим, что раз луч от светлячка до забора проходит от 6 м до 2 м, а потом до земли от 2 м до 0 м, то т.к. $\frac{6-2}{2-0}=2$, то и луч от светлячка до забора в 2 раза длиннее, ~~чт~~ чем от забора до земли. Используя это, имеем, что в $\triangle BGH$ и $\triangle AEF$: $CD \parallel GH$ и $CD \parallel EF$. Ведь отношение сторон, на которые делит CD – постоянно. ~~Нах~~ Из всего этого найдем координаты точек:

$G=\left(0-\frac{|7-0|}{2};\ 0-\frac{|5-0|}{2}\right)=(-3{,}5;\ -2{,}5)$ Примерный вид фигуры:

$H=\left(3-\frac{|7-3|}{2};\ 0-\frac{|5-0|}{2}\right)=(\cancel{3}\,1;\ -2{,}5)$

$E=\left(0+\frac{|-1-0|}{2};\ 0-\frac{|4-0|}{2}\right)=(0{,}5;\ -2)$

$F=\left(3+\frac{|-1-3|}{2};\ 0-\frac{|4-0|}{2}\right)=(5;\ -2)$.



Пусть O – точка пересечения EF и DH. Тогда нужная нам площадь – это $S_{CDHG}+S_{CDFE}-S_{CDOE}$. Пусть $DH' \perp EF$, $DH' \cap GH = O'$

$\frac{OH'}{O'H}=\frac{O'H'}{DH'}=\frac{0{,}5}{2}=0{,}25$. $|O'H|=3-1=2 \Leftrightarrow |OH'|=0{,}5 \Rightarrow O(2{,}5;\ -2)$

$S=\left(3{,}5\cdot 6{,}5 \cancel{*} -\frac{3{,}5\cdot 2{,}5}{2}-\frac{2{,}5\cdot 2}{2}\right)+\left(5\cdot 2-\frac{0{,}5\cdot 2}{2}-\frac{2\cdot 2}{2}\right)-\left(3\cdot 2-\right.$

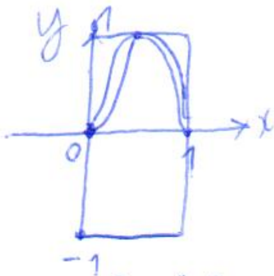
$\left.-\frac{0{,}5\cdot 2}{2}-\frac{0{,}5\cdot 2}{2}\right)=\left(\frac{91}{4}-\frac{35}{8}-\frac{5}{2}\right)+10-0{,}5-2-6+0{,}5+0{,}5=$

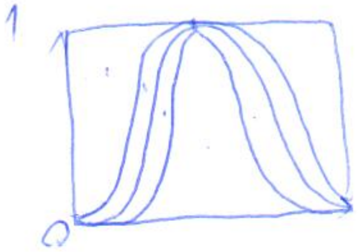
$=\frac{91}{4}-\frac{35}{8}+10-5-6+1=\frac{91}{4}-\frac{35}{8}=\frac{182-35}{8}=\frac{147}{8}=18{,}875$

Ответ: 18,875

Черновик 2

343

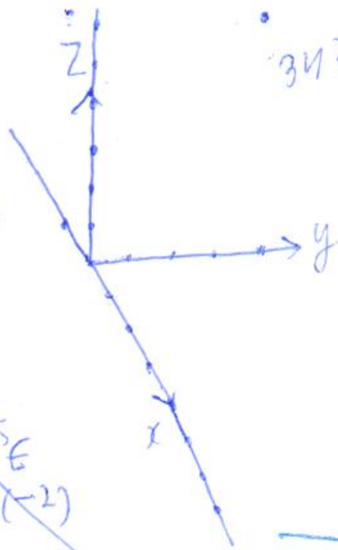


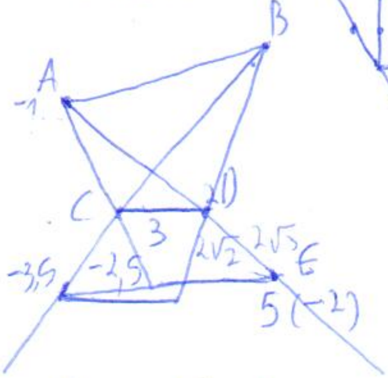


343 · 18 · 6

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times\ 108 \\ \hline 2744 \\ 343\ \ \\ \hline 37044 \end{array}$$

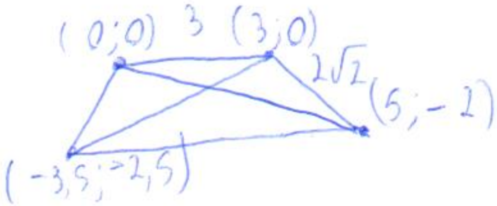
343 · 12 · 6





$AD = 4\sqrt{2}$ 4

$AD = 4\sqrt{32+16} = 4\sqrt{3}$; $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



Черновик 1

$$\begin{cases} \frac{6-6\cos^2 x}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$6\sin^2 x - 6\cos^2 x - 16\cos^2 x \sin^2 x = 0$

$\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

$324 + 486 = 810$

$6 = \quad 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

$6\left(\frac{1}{\sin^2 x} + 2\right) = 16\cos^2 x$

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$16 - \frac{6}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x - 4 = 0$

$343.$

$16\sin^2 x - \frac{6}{\sin^2 x} - 4 = 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4ax^2 + a \geq 0 \\ D = (2-4a)x^2 + a \geq 0 \end{cases}$$

$2x^2 - 4ax^2 + a = \sqrt{\frac{x-a}{2-4a}}$

$(2-4a)x + a$

$y = ax^2 \quad y = 0{,}25x^2$

$\frac{x}{a} = ay^2$

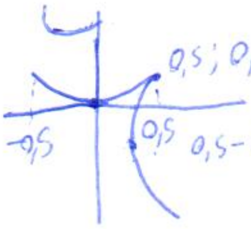
$a^2x^4 = x$

$(2-4a)x^2 + a = \sqrt{\frac{x-a}{2-4a}}$

$y = \pm\sqrt{\frac{x}{a}}$

$-\sqrt{\frac{0{,}25}{x}}$

$y = (2-4a)x^2 + a$



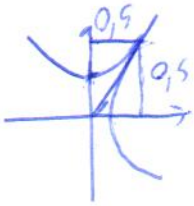
$0{,}5 - 0{,}25a;\ 0{,}25a - 0{,}5$

$-\sqrt{\frac{1}{a}} = a \quad x\ 4 \cdot 2$

$\frac{1}{a} = a^2 \quad a^3 = 1 \quad 6 \cdot 4^{12}$

$a \geq 0$

$(2-4a)x^2 - x + a = 0$



$y = cx^2 + a$

$x = cy^2 + a$

$cy^2 = x - a \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x-a}{c}}$

$D = 1 - 4a(2-4a) =$

$= 1 - 8a + 16a^2 = (4a-1)^2$

$18 \cdot 12$

$\sqrt{\frac{x-a}{2-4a}} =$

$0{,}5 = 0{,}25c + a$

$0{,}5 - a = 0{,}25c$

$2 - 4a = c$

$\sqrt{\frac{0{,}5-a}{4a}} = 2a$

$4a^2 + \frac{0{,}5}{4a} = 0{,}25$

$\frac{0{,}5-a}{4a} = 4a^2$

$0{,}5 - a = 16a^3$

$16a^3 + 0a^2$

$16a^3 + a - 0{,}5 \mid a - 0{,}25$

$16a^2 + 4a + 2$

$a\left(4a + \frac{0{,}5}{4a^2}\right) = 0{,}25$

$\frac{0{,}5}{4a} - 0{,}25 = 4a^2$

$16a^3 + a - 0{,}5 = 0$

$(a - 0{,}25)($

$32a^3 + a - 1 = 0$

$4a^2 + \frac{0{,}5}{4a} + 0{,}25 = 0$

$a(32a^2 + 1) = 1$

$4a^2 + a - 0{,}5$

$4a^2 - a$

$2a - 0{,}5$