0 248084 130002

24-80-84-13
(128.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Редченко Максима Валериевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

Редч

 50 (пятьдесят)

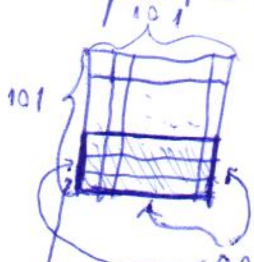
24-80-84-13 (128.1)

Чистовик

Задача №2

Рассмотрим 3 возможных варианта:

1) вырезанный прямоугольник вырезался по 3 границам, совпадающим с границами изначального:



Тогда ~~нужн~~ можно 4 способами выбрать оставшуюся границу и 100 способов выбрать длину стороны, так как весь прямоугольник вырезать нельзя. Итого 4·100.

совпадающие границы

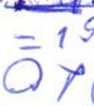
длина может быть от 1 до 100.

2) вырезанный прямоугольник вырезался по 2 сторонам, совпадающим со сторонами изначального:

В этом случае достаточно выбрать угол (4 способами) и ещё одну ~~точк~~ клетку (прямоугольник можно задать 2 клетками, как на рисунке), клетку можно выбрать ~~100~~ 100² способами, если не учитывать варианты из 1 случая). Итого 4·100².

3) совпадение ровно по 1 стороне.

4 способами можно выбрать сторону, 100 способов можно ~~100~~ выбрать длину, и C_{99}^{2} способами выбрать ширину. Итого 4·100·99·49.



В общем 4·100 + 4·100·100 + 4·100·99·49 = 1980800.

Ответ: 1980800

Чистовик

Задача №4

$a - ?$: $x \in [b; c]$, где $c - b = 2026$.

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \quad \Big| \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

Введём $t = a^x$:

$$\frac{t^2 - 3at + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$, так как, если $a<1$, то $\log_2 a < 0$, а если $a>1$, то $\log_2 a > 0$, то можно заменить $\log_2 a$ на $(a-1)$.

$$\frac{(t-a)(t-2a)}{(a-1)} \geq 0$$

$$\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{a-1} \geq 0$$, $a^x - a^n$ можно заменить на $(a-1)(x-n)$, потому ~~той же самой при~~ что при $a>1$ $y=a^x$ ~~возраста~~ возрастающая функция, а при $a<1$ $y=a^x$ наоборот убывающая функция.

$$\frac{(x-1)(x-1-\log_a 2)(a-1)^2}{a-1} \geq 0$$

1) Если $a>1$, то:

$(x-1)(x-1-\log_a 2) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1 + \log_a 2 + 1)$ ⟵ это не отрезок ⇒ ⇒ такой a не подходит

2) Если $a<1$, то:

$(x-1)(x-1-\log_a 2) \leq 0$

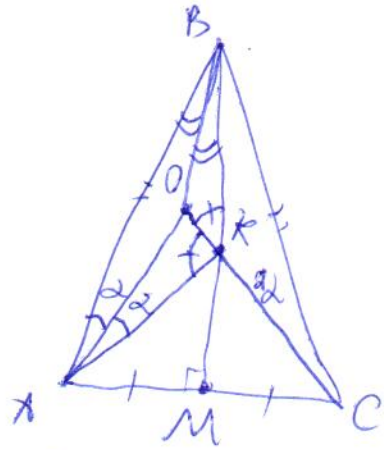
$x \in [1; 1+\log_a 2] \Rightarrow 2026 = \log_a 2 + 1 - 1 = \log_a 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$a = \sqrt[2026]{\ldots}$~~ $a = \sqrt[2026]{2}$

Ответ: $a = \sqrt[2026]{2}$

24-80-84-13
(128.1)

№6 Чистовик



Дано: $\triangle ABC$; $\angle A=\angle C=32^\circ$; $O \in \triangle ABC$; $\angle BCO=2\angle BAO$; $\angle OBC=3\angle ABO$.

Найти: $\frac{\angle BOA}{\angle BAO}=?$

Решение:

Опустим высоту, медиану и биссектрису BM, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный ($\angle A=\angle C$). $\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=116^\circ \Rightarrow \angle ABM=58^\circ$.

$\angle OBC=3\angle ABO$, но $\angle OBC+\angle ABO=4\angle ABO=116^\circ \Rightarrow \angle ABO=29^\circ$, $\angle OBC=87^\circ$.

Пусть $\angle BAO=\alpha \Rightarrow \angle BCO=2\alpha$. Если $K=OC\cap BM$, то $\angle BAK=2\alpha$, так как $\triangle ABC$ симметричен относительно $BM \Rightarrow \angle BAO=\angle KAO=\alpha \Rightarrow$ AO — биссектриса $\angle BAK$. $\angle ABO=29^\circ \Rightarrow \angle OBK=\angle ABK-\angle ABO=58^\circ-29^\circ=29^\circ \Rightarrow \angle ABO=\angle OBK \Rightarrow$ BO — биссектриса $\angle ABK$. Значит O — ~~цент~~ инцент $\triangle ABK \Rightarrow$ KO — биссектриса $\angle AKB \Rightarrow \angle AKB=2\angle AKO=2(\angle KAC+\angle KCA)$ (так как $\angle AKO$ внешний в $\triangle AKC$) $=2(\angle A-2\alpha+\angle C-2\alpha)=2(64^\circ-4\alpha)=128^\circ-8\alpha$.

Получаем из суммы углов $\triangle ABK$:

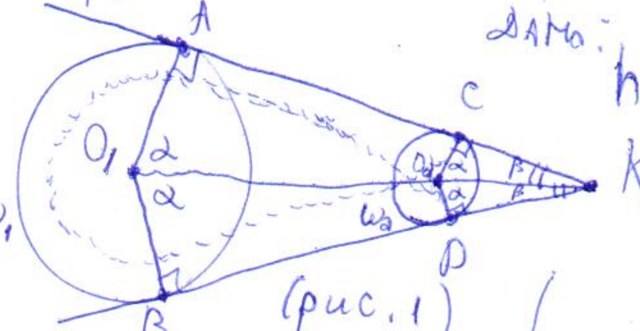
$2\alpha+58^\circ+128^\circ-8\alpha=180^\circ$

$6\alpha=6^\circ \Rightarrow \alpha=1^\circ$. Значит $\angle BOA=180^\circ-\alpha-29^\circ=150^\circ$ и $\angle BAO=\alpha=1^\circ \Rightarrow \frac{\angle BOA}{\angle BAO}=\frac{150^\circ}{1^\circ}=150$.

Ответ: 150.

№7 Чистовик

Трасса:

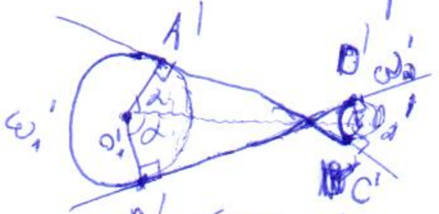


(рис. 1)

Дано: $O_1A=4$; $O_2C=1$; $O_1O_2=6$. $h=1{,}5$.

Найти: длину дорожки из травы.

След дорожка из скошенной травы:



(рис. 2)

Решение:

Легко заметить, что след от газонокосилки при движении по (той же длинны) прямой — это прямая, а по окружности — это окружность, радиуса $|R-h|$, где R - изначальный радиуса, h - то насколько косилка отбрасывает.

На рисунке 1: $\triangle AKO_1 \sim \triangle CKO_2$ по общему углу $\beta = \angle AKO_1 = \angle CKO_2$ и по прямому углу $\angle O_1AK = \angle O_2CK = 90°$. Тогда (так как AK касательная к ω_1 и ω_2)

$\frac{KO_2}{KO_1} = \frac{O_2C}{O_1A} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4KO_2 = KO_1 = KO_2 + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3KO_2 = O_1O_2 = 6 \Rightarrow KO_2 = 2 \Rightarrow$ По теореме Пифагора для $\triangle O_2CK$: $CK = \sqrt{KO_2^2 - O_2C^2} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = 4AC = 4\sqrt{3} \Rightarrow AC = 3\sqrt{3}$ и $BD = 3\sqrt{3}$ (весь рисунок симметричен относительно O_1O_2).

$\sin\alpha = \frac{CK}{O_2K} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ $2\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Тогда ~~Путь, пройденный косилкой~~ дуги окружностей ω_1 и ω_2 равны $\frac{4\pi}{3} \cdot O_1A$ и $\frac{2\pi}{3} \cdot O_2C$ соответственно (у окружности ω_1 взята большая дуга, так как именно по ней прошлась косилка, а у ω_2 взята меньшая по той же причине).

Тогда из рисунка 2: $O_1A' = |O_1A - h| = |4 - 1{,}5| = 2{,}5$;

Чистовик

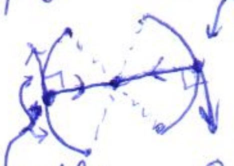
№7. Продолжение

$O_2'C' = |O_2C - h| = |1-1{,}5| = 0{,}5$;

$A'C' = AC$; $B'D' = BD$.

Тогда длина дорожки из травы равна: $A'C' + B'D' + \frac{4\pi}{3} \cdot O_1'A' + \frac{2\pi}{3} \cdot O_2'C' =$
$= AC + BD + \frac{2\pi}{3}(2O_1'A' + O_2'C') = 6\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}(5 + 0{,}5) =$
$= 6\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3}$.

Можно показать почему след травы от косилки ~~буде~~ при движении по окружности будет часть окружности



~~Скорость косилки направлена по касательной~~

Рассмотрим момент времени. Скорость косилки направлена по касательной. ~~Если мы построим~~ Если мы рассмотрим точку следа травы на расстоянии h перпендикулярно скорости, то прямая, проходящая через них, пройдёт через центр, отрезок соединяющий эти точки будет равен h, а расстояние от точки следа травы до центра окружности будет как раз таки равно $|R-h|$, и движение этой точки то же будет перпендикулярно прямой, соединяющей её и центр. Ускорение и косилки, и точки следа травы направлены к центру. В общем точка следа травы тоже движется по окружности, но с радиусом $|R-h|$.

Ответ: $6\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3}$

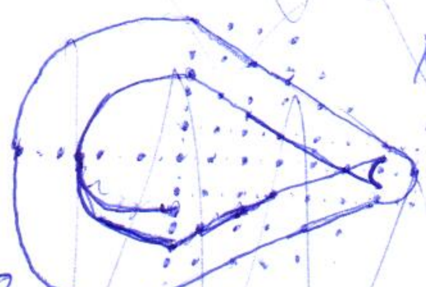
Черновик

$abc+b+6 \le abc+4(ab+c)+2(ab+ac+bc)=2006$

$abc \le 2008$ ~~abc ≤ 2006~~

$= 251\cdot 8$

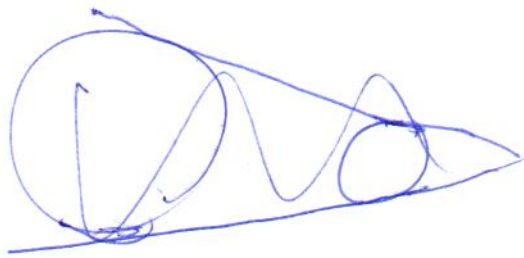
$R=4,\ r=1$ ~~$(a+b+c)^3$~~



$R=2{,}5$

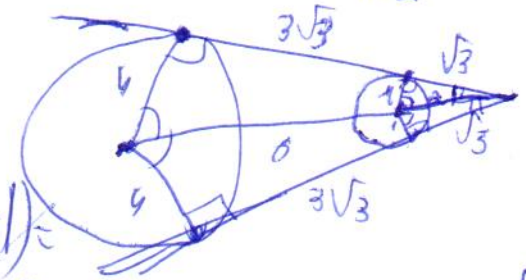
$r=0{,}5$

Немного не правильно.



$x+8=4x$

$x=2$

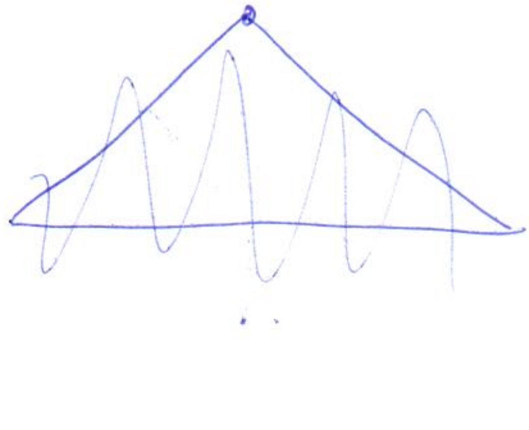


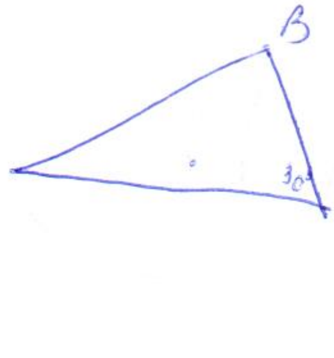
$6\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\left(R-1{,}5\left(+r-\sqrt{3}\right)\right)=$

$=6\sqrt{3}+2\pi$

$2\alpha=120^\circ=\frac{2}{3}\pi$

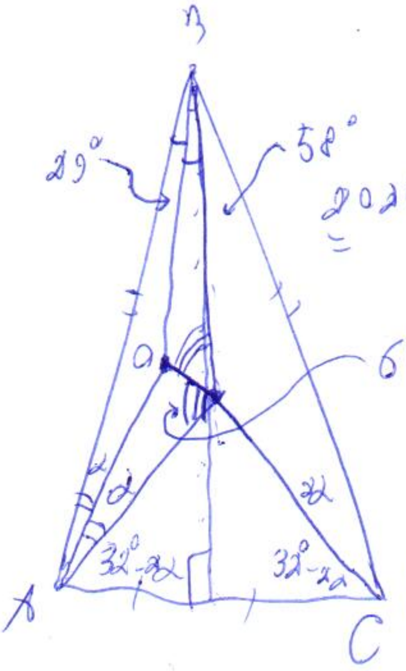
$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ$





Черновик

№6



$2026 = 1013 \cdot 2 =$

$t^3+6t^2+12t-2026 \le 0$

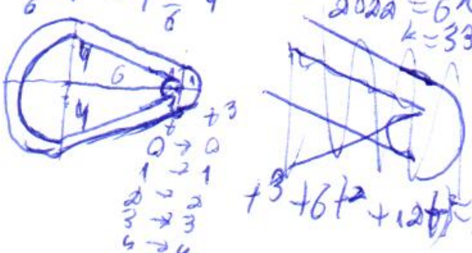
$2026 = 6k+4$

$2022 = 6k$

$k = 333+4 =$

$= 337$

$\equiv_6 4 \Rightarrow t \equiv_6 4$



$+3$

$0 \to 0$
$1 \to 1$
$2 \to 2$
$3 \to 3$
$4 \to 4$
$5 \to 5$

$t^3+6t^2+12t = 2026$

$64^\circ - 9\alpha$

$128^\circ - 8\alpha$

$90^\circ + \frac{128^\circ - 8\alpha}{2} = 90^\circ + 64^\circ - 9\alpha$

$\angle AOB = 151^\circ - \alpha$

$3^\circ = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 1^\circ \Rightarrow \frac{151^\circ - \alpha}{\alpha} = \frac{151^\circ - 1^\circ}{1^\circ} = 150$

15

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

$x+y+z = \frac{\pi}{2}$

$\max(tg\, x \cdot tg\, y \cdot tg\, z) = ?$

$\sqrt[3]{tg\, x \cdot tg\, y \cdot tg\, z} \le \frac{tg\, x + tg\, y + tg\, z}{3}$

$tg\, x + tg\, y = tg(x+y) \cdot (1 - tg\, x \cdot tg\, y)$

$\frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\cos(x-y) - \cos(x+y))\sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

$\cos\cancel{(x+y) \cdot \sin z = \frac{1}{2}(}$

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

$\sin z \cdot \cos(x+y) = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{2} + \sin(z-x-y))$

$\sin z \cdot \cos(x-y) = \frac{1}{2}(\sin(z+x-y) + \sin(z-x+y))$

$\frac{\sin(z+x-y) + \sin(z-x+y) - \sin(z-x-y) - 1}{\cancel{\cos}\ 0 + \cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(x-y-z)}$

$tg(x+y) - tg(x+y) \cdot tg\, x \cdot tg\, y + ctg(x+y)$

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a}\geq 0$$

~~Чер~~ Черновик №4

$a>0$
$a\neq 1$

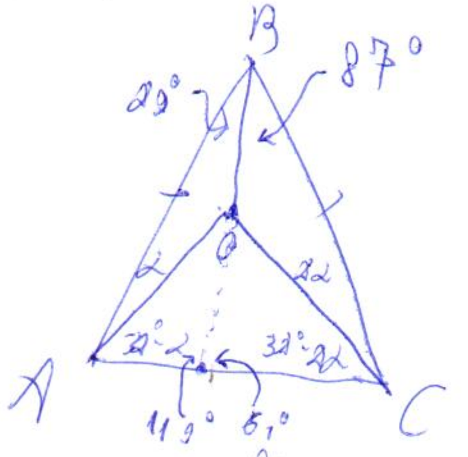
$t=a^x>0;$

$$\frac{t^2-3at+2a^2}{a-1}\geq 0$$

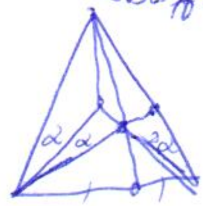
$$\frac{(t-a)(t-2a)}{a-1}\geq 0$$

$$\frac{(a^x-a)(a^x-2a)}{a-1}\geq 0$$

$$\frac{(a-1)(x-1)(a-1)(x-1-\log_a 2)}{a-1}\geq 0$$



$\angle A=\angle C=32° \Rightarrow \angle B=116°$
$\angle BCO=2\angle BAO$
$\angle OBC=3\angle ABO$
$\frac{\angle BOA}{\angle BAO}=7=\frac{151°-\alpha}{\alpha}=?$
$\angle BOA=151°-\alpha$



1) $a>1$

$(x-1)(x-1-\log_a 2)\geq 0$

~~$x\in[1;1+\log_a 2]$~~ $\to x\in(-\infty;1]\cup[1+\log_a 2;+\infty)$. не отрезок?

2) $0<a<1$:

$(x-1)(x-1-\log_a 2)\leq 0$

$x\in[1;1+\log_a 2] \Rightarrow 1+\log_a 2-1=2026 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a 2=2026 \Rightarrow 2=a^{2026} \Rightarrow a=\sqrt[2026]{2}$

№5

$\max(tg\,x\cdot tg\,y\cdot tg\,z)=?$

$0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$, $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$z=\frac{\pi}{2}-x-y \Rightarrow tg\,z=tg\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+(-y)\right)=$

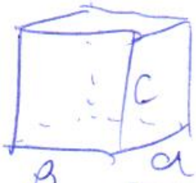
$$=\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+tg(-y)}{1-tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tg(-y)}=\frac{ctg\,x-tg\,y}{1+ctg\,x\cdot tg\,y}$$

$\cancel{\frac{1-tg\,x\cdot tg\,y}{tg\,x+tg\,y}}\cdot tg\,x=ctg(x+y)\cdot tg\,x$

Черновик

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $\min(abc)$ - ?



$abc + 4(a+b+c) + 2(ab+ac+bc) = 2026$

$2ab + 2a + 2b + 2 = 2(a+1)(b+1)$

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$ab+ac+bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

$abc + 2(a+1)(b+1) + 2(a+1)(c+1) + 2(b+1)(c+1) = 2034$

~~$2(a+1)(b+c+2)$~~

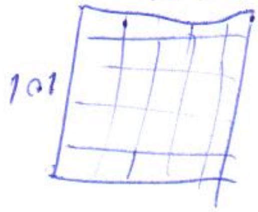
$abc + 12\sqrt[3]{abc} + 6\sqrt[3]{(abc)^2} = 2026$

$t = \sqrt[3]{abc}$

$t^3 + 6t^2 + 12t - 2026 = 0$

№2

прилежат:



•) 3 стороны: ~~[illegible]~~ $4 \cdot 100$

•) 2 стороны: $4 \cdot 100^2$

•) 1 сторона: $4 \cdot 100 \cdot C_{99}^{2} = 4 \cdot 100 \cdot \frac{99 \cdot 98}{2} =$

$= 4 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 49.$

$4 \cdot 100 + 4 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 49.$

$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_{2} a} \geq 0$

$t = a^x$

$\frac{t^2 - 3at + 2a^2}{a-1} \geq 0$

$D = 9a^2 - 4 \cdot 2a^2 = a^2$

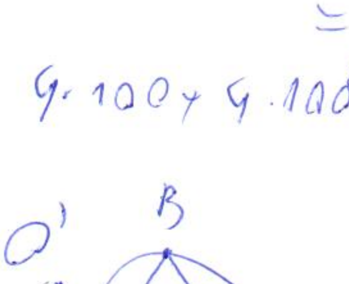
$t_{1,2} = \frac{3a \pm a}{2}$

$= a; 2a$

$(a-1)(a^x - a)(a^x - 2a) \geq 0$

~~$(a-1)(a-1)^2(x-1)(x-$~~

№3

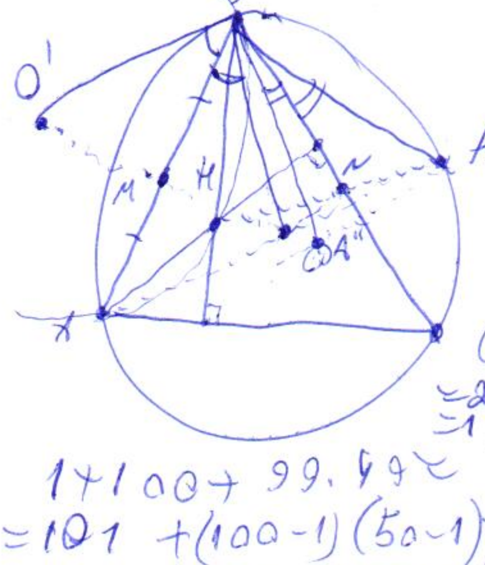


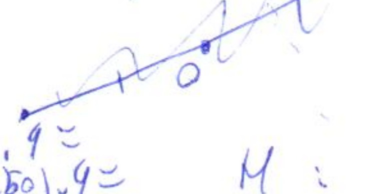
$\angle C = 30^\circ$

O', B, A'' и A

одной прямой.

$\angle B = ?$



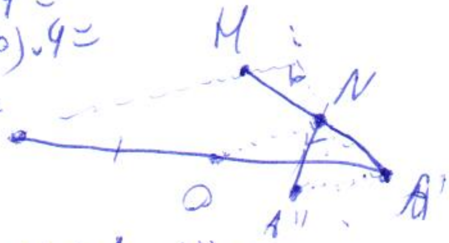


$4952 \cdot 4 =$

$= (5002 - 50) \cdot 4 =$

$= 20008 - 200 =$

$= 19808$



$1 + 100 + 99 \cdot 49 =$

$= 101 + (100-1)(50-1) = 101 + 5000 + 1 - 150 =$

$= 5002 - 50 = 4952$