



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 КЛАСС

Место проведения Москва
город

ДЕШИФР

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наименование олимпиады

по математике Москва
профиль олимпиады

Романовой Полины Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03 2026 года

Подпись участника
Пилип

38-87-14-99

Черновик

$$1. \sqrt{3(1-\operatorname{ctg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \cos x$$

$$3(1-\operatorname{ctg}^2 x) = 8 \cos^2 x$$

$$3\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8 \cos^2 x$$

$$3\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 3\left(-\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8 \cos^2 x$$

$$3\left(-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = 8 \cos^2 x$$

$$-3\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = 8 \cos^2 x$$

$$\frac{-3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\sin^2 x} = 8 \cos^2 x$$

$$\frac{-3 \cos^2 x - 3(-\cos^2 x)}{4 \cos^2 x} = 8 \cos^2 x$$

$$\frac{-3 \cos^2 x + 3 - 3 \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} - 8 \cos^2 x = 0$$

$$\frac{-6 \cos^2 x + 3}{1 - \cos^2 x} - 8 \cos^2 x = 0$$

$$\frac{-3(2 \cos^2 x - 1)}{1 - \cos^2 x} - 8 \cos^2 x = 0$$

$$\frac{-48 \cos^4 x + 24 \cos^2 x - 8 \cos^2 x + 8 \cos^4 x}{8 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)} = 0$$

$$\frac{-40 \cos^4 x + 16 \cos^2 x}{8 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)} = 0$$

$$\frac{-40 \cos^4 x + 16 \cos^2 x}{8 \cos^2 x - 8 \cos^4 x} = 0$$

$$\cos^2 x = t$$

$$\frac{-40t^2 + 16t}{8t - 8t^2} = 0$$

$$3(1-\operatorname{ctg}^2 x) = 8 \cos^2 x$$

$$3\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = 8(1 - \sin^2 x)$$

$$\frac{3}{\sin^2 x} = 8 - 8 \sin^2 x$$

$$\frac{3}{\sin^2 x} - 8 + 8 \sin^2 x = 0$$

$$\frac{3 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x}{\sin^2 x} = 0, \quad \sin^2 x \neq 0$$

$$8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 3 = 0$$

$$\sin^2 x = t, \quad t \geq 0$$

$$8t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$D = 64 - 96 = -32$$

$$\sqrt{3(1-\operatorname{ctg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \cos x$$

$$3(1-\operatorname{ctg}^2 x) = 8 \cos^2 x$$

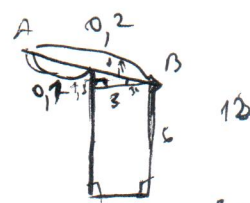
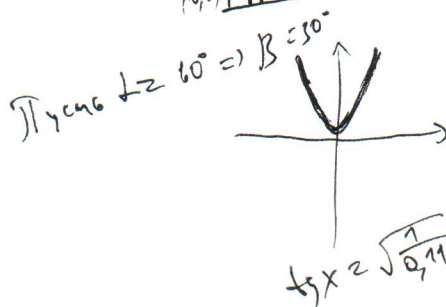
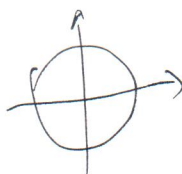
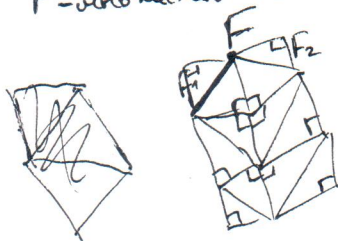
$$3(1-\operatorname{ctg}^2 x) = 8 \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x$$

$$\frac{24}{96}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\cos^2 x = \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x$$

3. F-множество точек в пространстве, координаты-целые и > 15



$$y = \pm x^2 + c$$

$$\sin = \frac{0.1}{3} \pi$$

$$\cos = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{0.1}{3}\right)^2}}{1} = \sqrt{1 - \frac{0.01}{9}}$$

$$\approx \frac{\sqrt{0.99}}{1} = \sqrt{0.99}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{0.99}\right)^2} = \frac{1}{0.99} = \operatorname{ctg}^2 x$$

Черновик

$$8x^2 \log_a x - \log_a x - 2x \leq 0$$

$$8x^2 \log_a x + \log_a x - 2x \leq 0$$

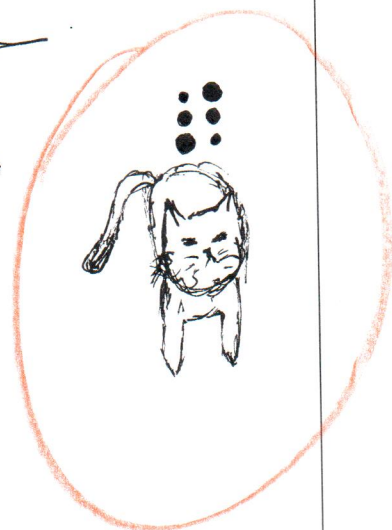
$$8x^2 \log_a x^2 - 2x \leq 0,$$

$$8x^2 \log_a (x^2)^{4x^2} - 2x \leq 0$$

$$\log_a x^{16x^2} - 2x \leq 0$$

$$\log_a x^{16x^2} - \log_a a^{2x} \leq 0.$$

$$x^{16x^2} - 2x \leq 0$$



ДЕШИФР

$$\sqrt{3(1-\cos^2 x)} = 2\sqrt{2}\cos x$$

$$3(1-\cos^2 x) = 8\cos^2 x$$

$$1-\cos^2 x = \frac{8\cos^2 x}{3}$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{8\cos^2 x}{3}$$

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{8\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\sin^2 x}{20}$$

$$\frac{3\sin^2 x - 3\cos^2 x - 8\cos^2 x \sin^2 x}{3\sin^2 x} \geq 0$$

$$-3(\sin^2 x + \cos^2 x) - 8\cos^2 x \sin^2 x \geq 0$$

$$-3 - 8\cos^2 x \sin^2 x$$

$$\frac{3(1-\cos^2 x) - 3\cos^2 x - 8\cos^2 x \sin^2 x}{3 - 3\cos^2 x - 8\cos^2 x (1-\cos^2 x)} \geq 0$$

$$\frac{3 - 3\cos^2 x - 3\cos^2 x + 8\cos^4 x}{3\sin^2 x} \geq 0$$

Числовик

№ 2

$$n = 100a + 10b + c$$

Тогда сумма цифр $s = a + b + c$

По условию: $\frac{n}{s} = 9K \Rightarrow n = 9Ks$, где

K - целое число

Значит, n кратно 9 $\Rightarrow s$ тоже кратно 9 по признаку делимости на 9

n - трёхзначное число $\Rightarrow s$ может быть 9, 18 или 27.

Рассмотрим все случаи:

1. $s = 9 \Rightarrow n = 81K$

Трёхзначные числа кратные 81:

162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972.

Из них $s = 9$ только у: 162, 243, 324, 405, 810

2. $s = 18 \Rightarrow n = 9K \cdot 18 = 162K$

Трёхзначные числа кратные 162:

162, 324, 486, 648, 810, 972

Из них $s = 18$ только у: 486, 648, 972

3. $s = 27 \Rightarrow n = 9K \cdot 27 = 243K$

Единственное трёхзначное число с $s = 27$: 999, но оно не кратно 243

$$A = \{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$$

$$243 + 486 + 810 = 1539$$

№ 1 $\sqrt{3(1 - \operatorname{ctg}^2 x)} = 2\sqrt{2} \cos x$

$$3(1 - \operatorname{ctg}^2 x) \geq 0 \Rightarrow 1 - \operatorname{ctg}^2 x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}^2 x \leq 1$$

$$2\sqrt{2} \cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 0$$

$$\sin x \neq 0$$

Числовые

$$3 - 3\operatorname{ctg}^2 x = 8 \cos^2 x$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 8 \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$z = \cos^2 x$$

$$3(1-z) - 3z = 8z \cdot (1-z)$$

$$3 - 14z = -8z^2$$

$$8z^2 - 14z + 3 = 0$$

$$D = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100$$

$$z_1 = \frac{14+10}{8 \cdot 2} > 1 \quad (\text{не подходит, } \cos^2 x \leq 1)$$

$$z_2 = \frac{14-10}{8 \cdot 2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\text{И } \cos x \geq 0, \text{ получаем } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$252 \cos x > 0 \Rightarrow 8 \cos^2 x > 0 \Rightarrow 3(1 - \operatorname{ctg}^2 x) > 0$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

N 3

Возможные значения, координаты:

$\{-5; -4; \dots; 5\}$ — всего 11 значений. Всего 3 координаты (x, y, z) , значит, всего $11^3 = 1331$ точек в пространстве.

1. Выбрать вершину прямого угла можно 11^3 способами.

2. Возможные плоскости треугольника: xy, yz, xz .

Всего 3 штуки.

3. Конец каждого катета на конкретной осях можно выбрать 10 способами, потому что 1 из 11 значений уже занято прямым углом.

Тогда количество искоемых треугольников:

$$N = \cancel{1331} \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 399300$$

Ответ: 399300

Чистовик
~5

Введем в систему координат $O = (0, 0)$ - точку касания окружности и верхней параболы.

Oy - ось симметрии параболы верхней,

$M(0, -r)$ - центр

$A(-\frac{1}{2}, y)$ - левая вершина

$B(\frac{1}{2}, y)$ - правая вершина

$\angle AMB = 60^\circ$ (360° на 6 сторон)

$$\frac{(\frac{1}{2})}{(y+r)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\angle AMB}{2}\right)$$

$$(r+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Для точки B : $y = cx^2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - r = c \cdot \frac{1}{4}$$

Касательная для параболы в точке B , это луч MB .

$$y' = 2cx$$

$$y'(B) = 2c \cdot \frac{1}{2} = c$$

$\angle MB$ с осью Ox 60° , значит $c = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

~7

Вершина кривой является пересечением парабол вида:

$$y = x^2 + c + 1, \quad y = -x^2 + d, \quad y = -x^2 + d + 1, \quad \text{где}$$

c и d - целые

Пусть $k = d - c$, тогда возможны 2 типа источников:
 $k = 0, k \geq 1$

Числовик

1. $K=0 \Leftrightarrow c=d$

~~a~~: $x^2 + c = -x^2 + c \Rightarrow a(0; c)$

c: $x^2 + c + 1 = -x^2 + c + 1 \Rightarrow c(0; c+1)$

b и d: $x^2 + c = -x^2 + c + 1$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y = x^2 + c = \frac{1}{2} + c \Rightarrow$$

$$b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; c + \frac{1}{2}\right), d\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; c + \frac{1}{2}\right)$$

Видно, что $ac=1$, $bd=\sqrt{2} \Rightarrow$ площадь такой клетки. $S_0 = \frac{ac \cdot bd}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $K \geq 1$, из симметрии достаточно рассмотреть правые клетки.

a: $x^2 + c = -x^2 + d \Rightarrow x = \sqrt{\frac{d-c}{2}} = \sqrt{\frac{K}{2}},$

$$y = \frac{c+d}{2} \Rightarrow a\left(\sqrt{\frac{K}{2}}; \frac{c+d}{2}\right)$$

b: $x^2 + c + 1 = -x^2 + d \Rightarrow x = \sqrt{\frac{d-c-1}{2}} = \sqrt{\frac{K-1}{2}},$

$$y = \frac{c+d+1}{2} \Rightarrow b\left(\sqrt{\frac{K-1}{2}}; \frac{c+d+1}{2}\right)$$

c: $x^2 + c + 1 = -x^2 + d + 1 \Rightarrow$

$$x = \sqrt{\frac{d-c}{2}} = \sqrt{\frac{K}{2}}, y = \frac{c+d+2}{2} \Rightarrow$$

$$c\left(\sqrt{\frac{K}{2}}; \frac{c+d+2}{2}\right)$$

d: $x^2 + c = -x^2 + d + 1 \Rightarrow 2x^2 = d - c + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{K+1}{2}}, y = \frac{c+d+1}{2} \Rightarrow d\left(\sqrt{\frac{K+1}{2}}; \frac{c+d+1}{2}\right)$$

$$ac=1; bd = \sqrt{\frac{K+1}{2}} - \sqrt{\frac{K-1}{2}} \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

