0 697721 200002

69-77-21-20
(128.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 кл.

GMT+4
выход: 14:42–14:44

Место проведения Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Рябова Михаила Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника
Рябов

 100 (сто) Надорваб

69-77-21-20
(128.2)

чистовик

Задача № 1.

Обозначим длину, ширину, высоту за a, b, c.
Объём призмы $= abc$; площадь полной поверхности $= 2(ab+bc+ca)$; сумма длин рёбер $=4(a+b+c)$
$abc + 2ab+2bc+2ca+4a+4b+4c = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2)-8 = 2026$
$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

$2034 = 2\cdot 3^2 \cdot 113$
Нам нужно разложить на 3 скобки, где каждая ≥ 3. Значит двойка должна стоять в произведении с кем-то. Есть 2 варианта.

1) $(2\cdot 3)\cdot(3)\cdot(113) = 2034$
$abc = 4\cdot 1\cdot 111 = 444$

2) $(2\cdot 113)\cdot(3)\cdot(3) = 2034$
$abc = 224\cdot 1\cdot 1 = 224$

Тогда есть ответ 224.

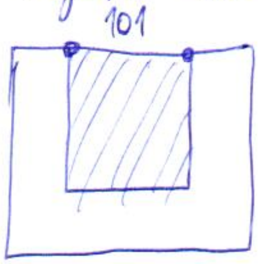
Ответ: 224.

Чистовик

Задача №2.

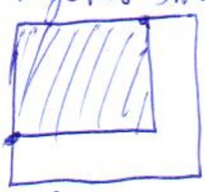
Т.к. не должно быть дырки, то ~~прямоу~~ ≥1 сторона прямоугольника должна соприкасаться со стороной квадрата. ~~Может~~ Все 4 стороны не могут. (т.к. прямоуг. меньше квадрата)

1) Соприкасается 1 сторона прямоугольника.
Пусть это верхняя.



Выбрать сверху сторону прямоугольника C_{100}^{2} вариантов.
Выбрать где будет лежать нижняя сторона 100 вариантов.
Итого в этом случае $4 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100 = 1980000$ вариантов.

2) Соприкасается 2 стороны.
Это ~~в~~ не противоположные стороны. (Тогда бы квадрат распался на 2 части)
Пусть это левая и верхняя.



Выбрать левую и верхнюю стороны по 100 вариантов. Итого $4 \cdot 100^2 = 40000$

3) Соприкасаются 3 стороны. Пусть это все кроме правой.

Выбрать правую сторону 100 вариантов.
Итого $4 \cdot 100 = 400$ вариантов.

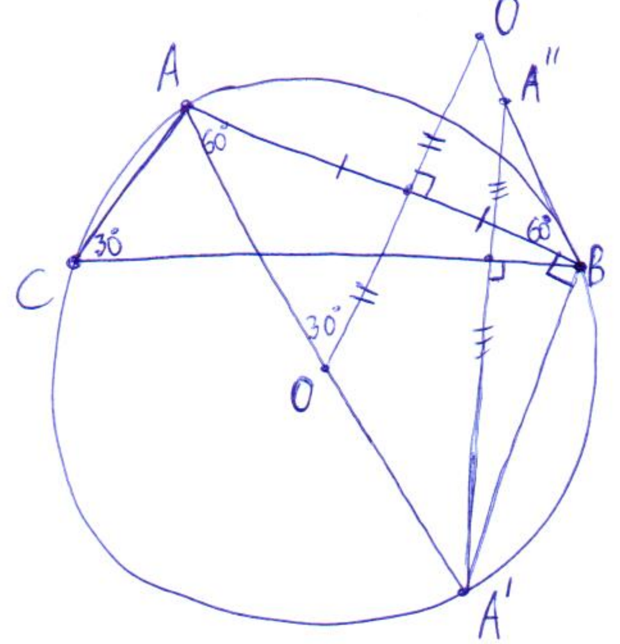
$1980000 + 40000 + 400 = 2020400$ способов всего

~~От~~ Ответ: 2020400.

69-77-21-20
(128.2)

Чистовик

Задача № 3.



AA' — диаметр $\Rightarrow \angle ABA' = 90^\circ$

$\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOO' = 30^\circ$; $\angle BAO = 60^\circ$

$AOBO'$ — ~~параллелограмм~~ ромб (у него диагонали делят друг друга пополам и перпендикулярны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O'BA = \angle BAO = 60^\circ \Rightarrow \angle A''BA = 60^\circ$

$\angle A''BA' = \angle ABA' + \angle ABA'' = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

$\angle A''BC = \dfrac{\angle A''BA'}{2} = 75^\circ \Rightarrow \angle ABC = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$

Ответ: 15°.

Задача № 4.

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

т.к. в знаменателе $\log_2 a$, то $a > 0$ и $a \neq 1$.

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0 \quad | : a^2 \qquad a > 0$

$a^{2(x-1)} - 3a^{x-1} + 2 \geq 0$

Обозначим $y = a^{x-1}$

& $y^2 - 3y + 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$ или $y \leq 1$

Чистовик

Продолжение задачи № 4.

$a^{x-1} \geq 2$

или

$a^{x-1} \leq 1$

При $a > 1$: a^{x-1} увеличивается до бесконечности при возрастании $x \Rightarrow$ ~~бесконечн~~ подходят все $x \geq N$ (для них $a^{x-1} \geq 2$) для какого-то $N \in$ ~~$\mathbb{Z}$~~ $\mathbb{R}$. (Не ~~от~~ отрезок длины 2026)

При $a < 1$: a^{x-1} убывает до бесконечно малых при ~~уб~~ возрастании $x \Rightarrow$ подходят все $x \geq M$ для какого-то $M \in \mathbb{R}$ (для них $a^{x-1} \leq 1$), но они тоже не образуют отрезок длины 2026. (не вмещаются в него)

Ответ: $a \in \varnothing$.

Задача № 5.

Докажем, что если $x \neq y$, то $tg\, x \cdot tg\, y < tg^2(\frac{x+y}{2})$. Тогда наибольшее значение будет при $x = y = z \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ответ $tg^3 \frac{\pi}{6}$.

Обозначим $\frac{x+y}{2} = a$; а ~~числа~~ углы x и y за $a+t$ и $a-t$

$\sin(a-t) \cdot \sin(a+t) = (\sin a \cdot \cos t - \cos a \cdot \sin t) \cdot (\cos a \cdot \sin t + \sin a \cdot \cos t) = \sin^2 a \cdot \cos^2 t - \cos^2 a \cdot \sin^2 t = \sin^2 a \cdot \cos^2 t - \cos^2 a + \cos^2 t \cdot \cos^2 a = \cos^2 t - \cos^2 a$

~~$\cos^2 t - \cos^2 a < \sin^2 a$~~

~~$\cos^2 t < 1$, верно~~

~~Значит $\sin x \cdot \sin y < \sin^2(\frac{x+y}{2})$~~

69-77-21-20 (*28.2)

Чистовик

Продолжение задачи № ~~4~~5.

$\cos(a-t)\cdot\cos(a+t) = (\cos a\cdot\cos t+\sin a\cdot\sin t)\cdot(\cos a\cdot\cos t-\sin a\cdot\sin t)=$

$=\cos^2 a\cdot\cos^2 t - \sin^2 a\cdot\sin^2 t = \cos^2 a\cdot\cos^2 t-\sin^2 a\cdot(1-\cos^2 t)=$

$=\cos^2 a\cdot\cos^2 t - \sin^2 a+\sin^2 a\cdot\cos^2 t = \cos^2 t-\sin^2 a$

$\cancel{\cos^2 t-\sin^2 a > \cos^2 a}$

Надо доказать, что:

$$\frac{\sin(a-t)\cdot\sin(a+t)}{\cos(a-t)\cdot\cos(a+t)} < \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

$$\frac{\cos^2 t-\cos^2 a}{\cos^2 t-\sin^2 a} < \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

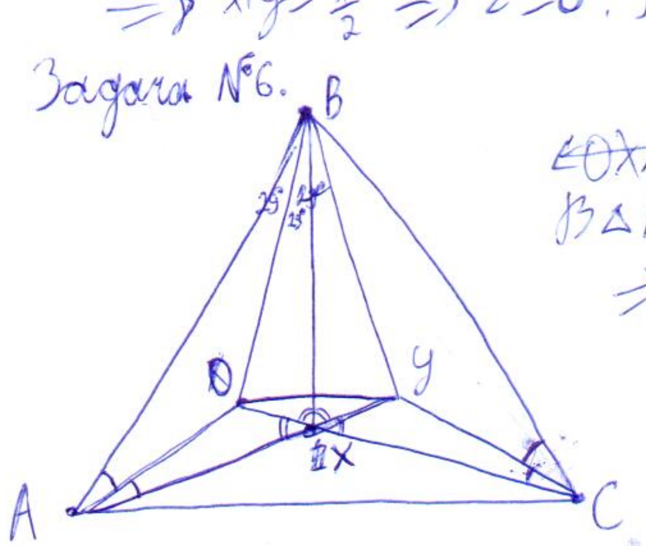
$\cos^2 t\cdot\cos^2 a-\cos^4 a < \sin^2 a\cdot\cos^2 t - \sin^4 a$

$\cos^2 t\cdot(\cos a-\sin a)(\cos a+\sin a) < (\cos^2 a+\sin^2 a)\cdot(\cos a-\sin a)\cdot(\cos a+\sin a)$

$\cos^2 t<1$, это верно. ч.т.д.

Но $\cos a$ может быть равно $\sin a$, тогда решение не работает. Но значит $a=45^\circ \Rightarrow$ ~~og~~ $\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=0$. Такого быть не может.

Задача №6.



~~$\angle OXA=\angle$~~

В $\triangle ABX$ 2 биссектрисы в 1 точке $\Rightarrow$

$\Rightarrow XO$ – биссектриса

$\angle OXB=\angle BXY$ (симметрия)

$\angle OXA=60^\circ$

$\angle BAO=\frac{180^\circ-120^\circ-58^\circ}{2}=1^\circ$

$\angle BOA=150$

Ответ: 150.

Черновик

$\cancel{\sin x + \sin y}$

$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2$

$\cancel{\sin 30° = \sin 60° \cdot \cos 60°}$

$\sin^2 \frac{x}{2} =$ $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\sin x = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$

$\cancel{\sin^2 \frac{x}{2}}$ $\cancel{\sin \frac{x}{2} =}$

$\frac{x+y}{2} = 2$

$\cancel{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y < \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2}$ $x \ a$ $2z$

y

$\sin x \cdot \sin y < \sin^2 \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

$x+t$ a

x b

t $x-t$

$\cancel{\sin z +} (\cos z + i \cdot \sin z)^2 =$

$\sin a \sin b =$

$t = \frac{a-b}{2}$

$\sin (x-t) \cdot \sin (x+t) = (\sin x \cdot \cos t - \cos x \cdot \sin t) \cdot (\cos x \cdot \sin t + \sin x \cos t) =$

$= \sin^2 x \cdot \cos^2 t - \cos^2 x \cdot \sin^2 t = \sin^2 x \cdot \cos^2 t -$

$- \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 t) = \cancel{\sin^2 t} \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 t - \cos^2 x + \cos^2 t \cdot \cos^2 x =$

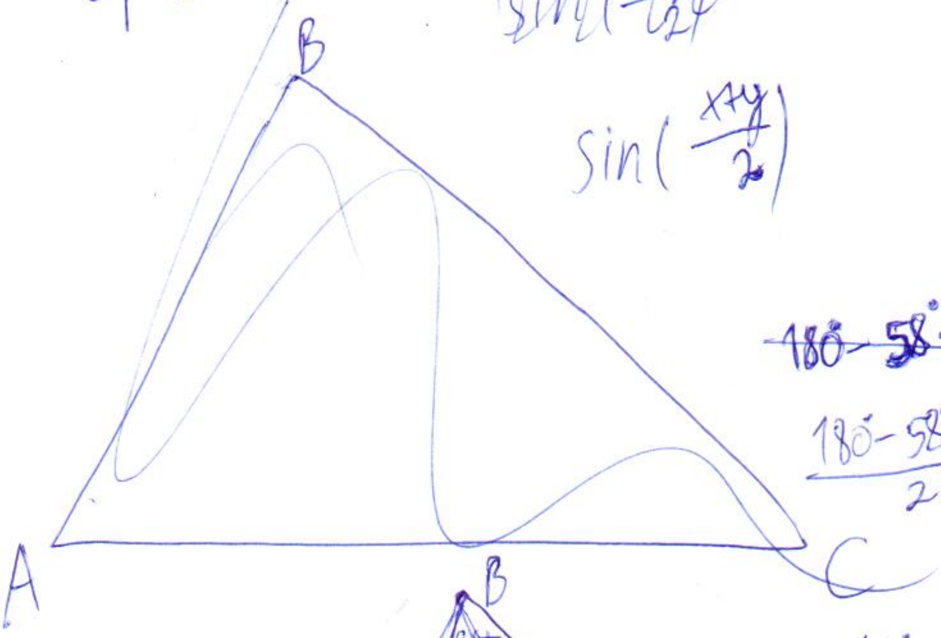
$= \cos^2 t - \cos^2 x$

$\sin^2 x > \cos^2 t - \cos^2 x$

$\cos^2 t < 1$

черновик

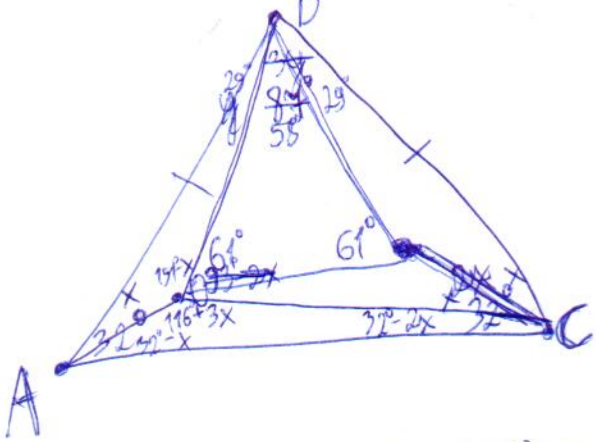
$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$



$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\cancel{180-58^\circ\cdot 2}$

$\frac{180^\circ-58^\circ}{2}=\frac{122^\circ}{2}=61^\circ$



$180^\circ-64^\circ=116^\circ$

$y=\frac{116^\circ}{4}=\frac{58^\circ}{2}=29^\circ$

$29^\circ\cdot 3=87^\circ$

$\cancel{180}$ $\cancel{151^\circ}$ $151^\circ-x+93^\circ-2x=244^\circ-3x$

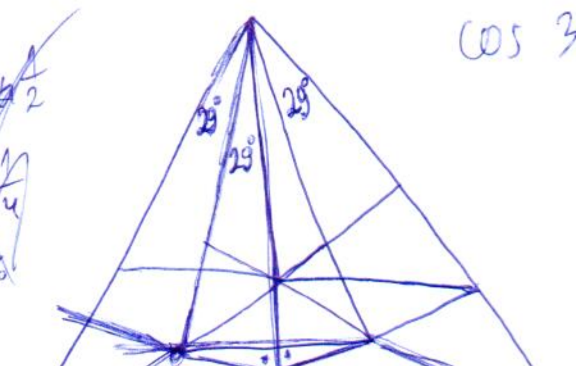
$360^\circ-(244^\circ-3x)=116^\circ+3x$

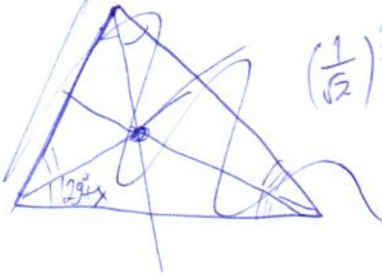
$\cos 30^\circ\cdot\cos 60^\circ=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt3}{4}$

$\frac{\sqrt3}{4} > \frac12$

$\frac{3}{16} > \frac14$

$12 > 16$





$\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2=\frac12$

$\cos x\cdot\cos y$

$\left(\cos\frac{x+y}{2}\right)^2$

черновик

$$(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\cdot\sin\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta -$$
$$-\sin\alpha\cdot\sin\beta + i\cdot(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\end{aligned}}$$

$x+y=const$

$$\cancel{\frac{\sin(x-t)\cdot\sin(y+t)}{\cos(x-t)\cdot\cos(y+t)}} \neq \frac{\sin x\cdot\sin y}{\cancel{x}\cos x\cdot\cos y}\ \cancel{x}+1 = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

Ssin

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{30^\circ+60^\circ}{2}\right) = \frac{\quad}{2}$$

$$\sin\left(x-\frac{x}{2}\right) = \sin x\cdot\cos\frac{x}{2} - \cos x\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}\ \cancel{tg}\cdot(\cos x+1)^2 = \sin^2 x\cdot\cos^2\frac{x}{2}$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{\cos x+1}$$

$$tg\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\cancel{\cos\alpha}\cos x\cdot\sin y + \sin x\cdot\cos y}{\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y + 1}$$

черновик

$\sin(\alpha+\beta) = \sin x \cdot \sin y - \cos x \cdot \cos y$

$\cos(\alpha+\beta) = \sin x \cdot \cos y$

$a^{x-1} = y$

$y^2 + 2 \geq 3y$

$y^2 - 3y + 2 \geq 0$

$1; 2$

$y \geq 2$

$y \leq 1$

x

2026

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$

$a^{x-1} \geq 2$

$a > 0$

$a \neq 1$

$0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$

и

$a^{x-1} \leq 1$

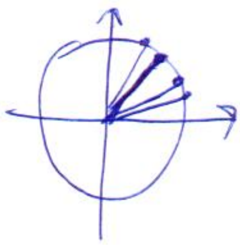
$x + y + z = \frac{\pi}{2}$

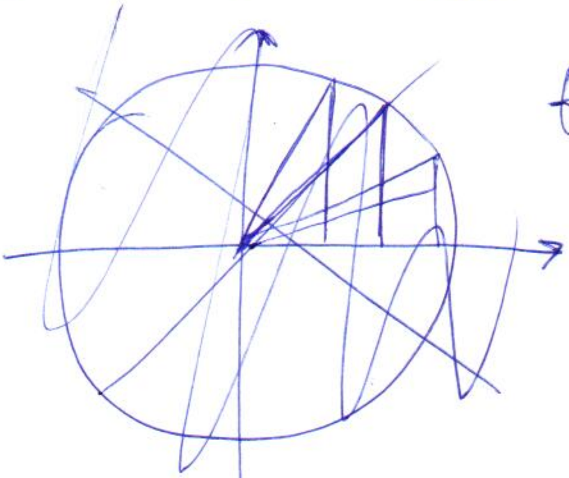
$x + y = const$

$0 < a < 1$

$a < 1$

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$





$\operatorname{tg}(x-t) \cdot \operatorname{tg}(y+t) =$

$= \frac{\sin(x-t) \cdot \sin(y+t)}{\cos(x-t) \cdot \cos(y+t)}$

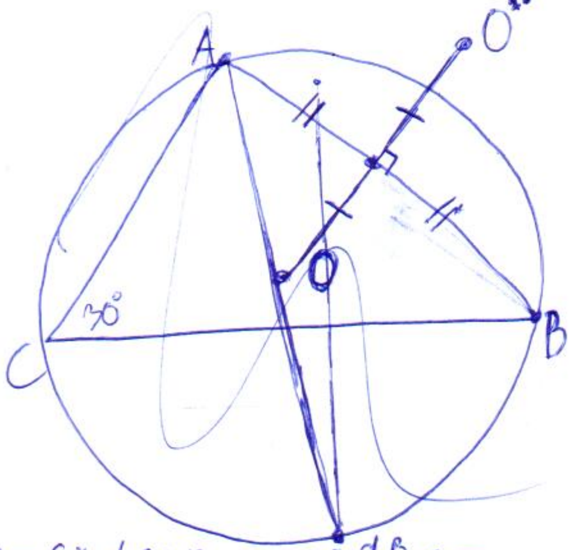
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

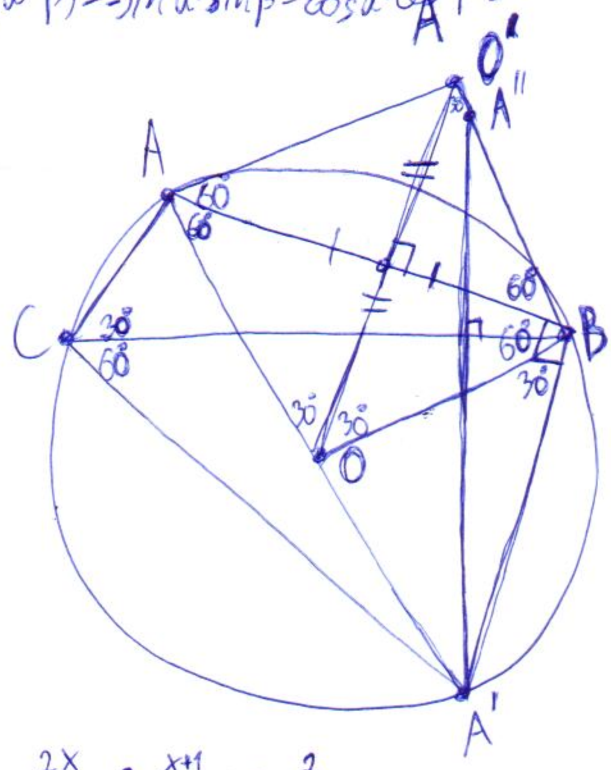
~~sin(α-β~~

черновик

$(\sin x + \cos x \cdot i)(\sin y + \cos y \cdot i) = \sin x \cdot \sin y + i \cdot (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) - \cos x \cdot \cos y$



$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta = -$



$\cancel{\angle A''BC = \angle O'BC}$

$60° + 90° = 150°$

$\frac{150°}{2} - 60° = 75° - 60° = 15°$

$\log_2 a\ \cancel{0 = x}$

$2^x = a$

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$a > 0$

$a \neq 1$

2026

y y+2026

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$

$\cancel{a^{2x} + 2a^2 \geq 3a^{x+1}}$

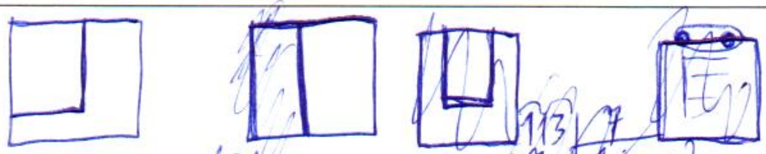
$a^{2x} + 2a^2$

a^{x-1}

$a^{2x-2} + 2 \geq 3 \cdot a^{x-1}$

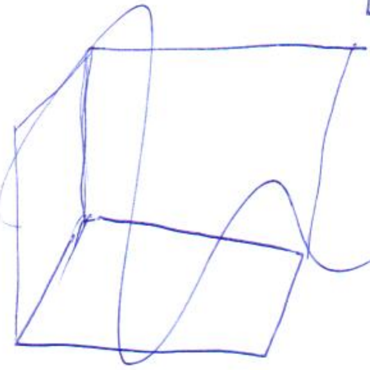
a^{2x-2}

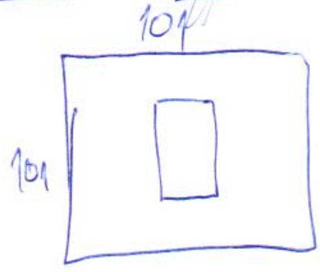
Черновик

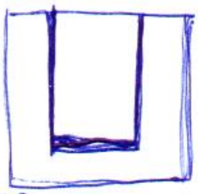


$113 \mid 7$, -7, 43

C^2_{100}



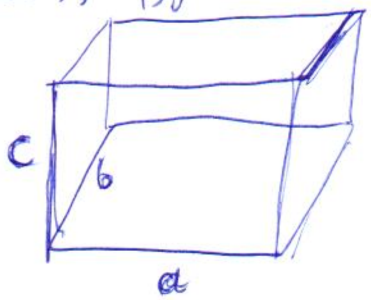


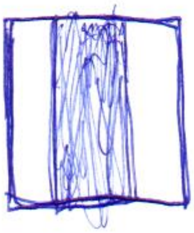


$1017 \mid 3 = 339$

-9, 11, -9, 27, -27, 0

$2\cdot 10000\cdot 99 = 1980000$





~~$abc = ?$~~

$\min abc = ?$

$abc + 2ab + 2cb + 2ac + 4b + 4a + 4c = 2026$

~~$(a+2)(b+2)(c+2) = 202$~~

~~$ab + cb + 4b$~~

$2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c)$ – max

$\|$

$(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 4a + 4b + 4c$ ~~max~~ max

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2ab + 2ac + 4a + 2bc + 4b + 4c + 8 =$

$= 2026 + 8 = 2034$

$2034 = 2\cdot 1017 = 2\cdot 3\cdot 339 =$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

$= 2\cdot 3^2\cdot 113$

$2\cdot 3$	3	113
$2\cdot 113$	3	3

$4\cdot 1\cdot 111 = 444$

$1\cdot 1\cdot 224$