0 620078 320000

62-00-78-32
(123.22)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Савченко Владислава Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«__» 29.03 2026 года

Подпись участника

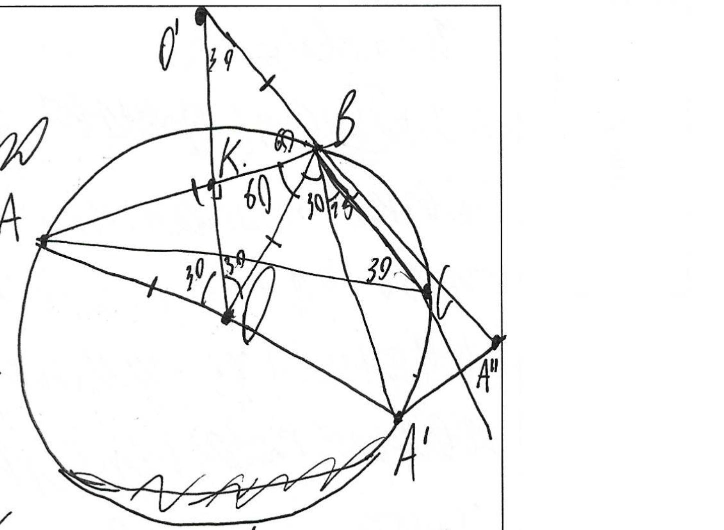
62-00-78-32 (123.22)

Чистовик ①.

№1.) Пусть длина, ширина и высота равны a, b и c соответственно. Тогда из условия следует, что $4a+4b+4c+2ab+2ac+2bc+abc=2026$. ($4a+4b+4c$ – сумма рёбер, $2ab+2ac+2bc$ – площадь полной поверхности, abc – объём). Заметим, что $(a+2)(b+2)(c+2)=abc+2ab+2bc+2ac+4a+4b+4c+8=2026+8=2034$. $2034=2\cdot3\cdot3\cdot113$ (разложение на простые множители), поскольку из условия следует, что $a,b,c>0$, то $a+2, b+2, c+2>2$ т.е. каждая из этих скобок хотя бы 3. Одна из этих скобок делится на 113 (113 – простое, а $2034 \,\vdots\, 113$) без ограничения общности считаем, что $a+2 \,\vdots\, 113$. Тогда если $a+2=113$, то $(b+2)(c+2)=18$, если $a+2=113\cdot2$, то $(b+2)(c+2)=9$, а других вариантов нет (иначе $(b+2)(c+2)<9$, а т.к. $b+2\geq3$ и $c+2\geq3$, то $(b+2)(c+2)\geq9$). Значит, всего есть 2 случая. В 1-м случае, $a=111$, $(b+2)(c+2)=18$ т.е. эти скобки принимают значения 6 и 3 или 3 и 6 ($b=4, c=1$ или $b=1, c=4$), иначе либо $b+2<3$, либо $c+2<3$), $V=abc=111\cdot4\cdot1=444$. Во 2-м случае, $a=113\cdot2-2=224$, тогда $(b+2)(c+2)=9$, $b=c=1$, $a\cdot b\cdot c=224$. $224<444$, значит, наименьшее значение V – 224.

Ответ: 224.

Чистовик ②



№3.) Проведём OB. Т.к. $\angle C = 30^\circ$, то по свойству центрального угла (он в 2 раза больше вписанного, если они опираются на одну дугу), $\angle BOA = 30 \cdot 2 = 60$, т.к.

$\angle OBA' = \frac{(180 - \angle BOA')}{2} = 30^\circ$

$AO = OB$ (радиусы), а $\angle BOA = 60^\circ \Rightarrow \Delta AOB$ – равносторонний. $\angle AOO' = \angle BOO'$ по построению точки O' ($\Delta AOO' = \Delta BOO'$: $BO = AO$, OO' – общая, $O'A = O'B$ т.к. все точки серединного перпендикуляра равноудалены от концов отрезка, а OO' – серединный перпендикуляр к AB – центр описанной окружности треугольника лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам) $\Rightarrow \angle AOO' = \angle BOO' = \angle AOB : 2 = 30^\circ$, т.к. ~~AO=OB~~ $OB = O'B$ ($\Delta OBK = \Delta O'BK$: $\angle O'KB = \angle BKO = 90^\circ$, KB – общая, $OK = O'K$ по построению), то $\angle BOO' = \angle BO'O = 30^\circ \Rightarrow \angle O'BO = 180 - 2 \cdot 30 = 120^\circ$, $\angle O'BK = 120 - 60 = 60^\circ$. Заметим, что $\angle O'BA''$ – развёрнутый (по условию) $\Rightarrow \angle O'BA'' = 180 = 60 + 60 + \underbrace{30}_{=\angle OBA'} + \angle A'BA'' \Rightarrow \angle A'BA'' = 30$. Т.к. A'' симметрична A' относительно BC, то $\angle A'BC = \angle A''BC = 30/2 = 15^\circ$, $\angle B = \angle ABO + \angle A'BO + \angle A'BC = 60 + 30 + 15 = 115^\circ$

Ответ: $\angle B = 115^\circ$

62-00-78-32
(123.22)

Чистовик ③

№4.) $\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$. О.Д.З.: $a>0$ (иначе $\log_2 a$ не имеет смысла). Если $a>1$, то $\log_2 a>0$, иначе $\log_2 a \leq 0$. Разберём оба случая.

1. ~~$\log_2 a$~~ $a>1$, тогда $\log_2 a>0$, и, следовательно, $a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0$. $a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 = (a^x-a)(a^x-2a) = a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)$, поскольку $a>0$ (О.Д.З.), то $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \geq 0$. Т.к. $a>1$, то a^{x-1} — возрастающая функция. Решим это нер-во методом интервалов:

при $x=1$, $a^{x-1}-1=a^0-1=0$, а при $x=\log_a 2+1$, $a^{x-1}-2 = a^{\log_a 2}-2=2-2=0$.

Но при всех достаточно больших x (скажем, 10000) $a^{x-1}-1>0$ и $a^{x-1}-2>0$, значит, множество решений — 2 промежутка: $(-\infty;1]\cup[\log_a 2+1;+\infty)$, по условию это не подходит.

2. $0<a<1$, тогда $\log_2 a<0$, и, следовательно, $a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \leq 0$, аналогично 1 случаю, $a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \leq 0$, т.к. $a>0$, $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \geq 0$. Теперь также можно решить это неравенство методом интервалов (только теперь т.к. $a<1$, то $\log_a 2+1<1$). При достаточно больших x (скажем, 10000), $a^{x-1}-1<0$ и $a^{x-1}-2<0$, значит, ось выглядит так:

Чистовик (4)

№4.) (продолжение).

Значит, исходя из условия, длина отрезка $[\log_a 2+1;\ 1]$ равна 2026 т.е. ~~[illegible]~~

$1-\log_a 2-1=2026$, $\log_a 2=-2026$, ~~$a=\frac{1}{2^{2026}}$~~.

~~Действительно, тогда~~

Т.е. a таково, что $a^{-2026}=2$, $a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}=$

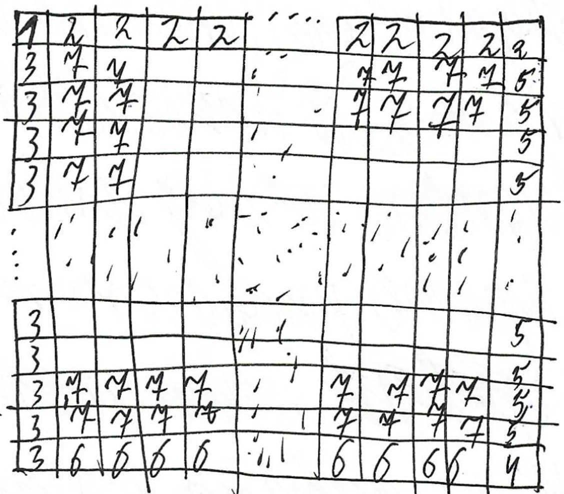
$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2026}}}=\frac{2^0}{2^{\frac{1}{2026}}}=2^{-\frac{1}{2026}}.$

Ответ: при $a=2^{-\frac{1}{2026}}.$

62-00-78-32 (123.22)

Чистовик (5)

№2.) Посмотрим на этот квадрат и посчитаем количество всех прямоугольников, удовл. условию. Для этого переберём положения верхнего левого угла прямоугольников и посчитаем количество прямоугольников.



Всего есть ~~6~~ 7 случаев верхнего левого угла: левый верхний угол квадрата, верхняя строка, левый столбец, правый нижний угол, правый столбец, нижняя строка, „внутренность" - всё, что не относится к 1-м шести случаям. Для 1-го случая подходят все прямоугольники, кроме большого квадрата - итого 101^2-1. Для 4-го случая подходит только 1 - прямоугольник, состоящий только из правого нижнего угла - 1 способ. Для 2-го случая подходят только те прямоугольники, у которых правый нижний угол не в нижней строке ~~или правом столбце~~ (иначе условие не выполняется): итого

$100\cdot100+1+100\cdot99+1+100\cdot98+1+\ldots+100\cdot1+1=$

$=100(1+2+3+\ldots+100)+100$ способов. Для левого столбца, очевидно, способов будет столько же

Черновик 6

№2.) (продолжение), сколько и для верхней строки (для каждой такой клетки правый нижний угол не может находиться в правом столбце (кроме правого нижнего угла).

Для ~~правой~~ нижней строки нижний правый угол, очевидно, находится в ней же, итого $100+99+98+\ldots$, с правым столбцом аналогичная ситуация.

Теперь рассмотрим ~~на~~ 7 случай — когда левый верхний угол не на границе квадрата.

Тогда правый нижний угол может находиться только в нижней строке или в правом столбце — ~~всего будет способов~~ (иначе образуется дыра) — итого способов — ~~100·99+~~ ~~+99·99+98·99+...+2·99+99·99...~~

~~$99 + 99 + 99 \cdot 98 + 99 \cdot 97 + \ldots + 99 \cdot 2 + 99$~~

~~$99 + 99 + 98 + 99 + 97 + 99$~~

$2 \cdot (99 \cdot 99 + 99 \cdot 98 + 99 \cdot 97 + \ldots + 99 \cdot 2) + 99 \cdot 99 =$

$= 2 \cdot 99(99 + 98 + 97 + \ldots + 2) + 99 \cdot 99.$

Теперь посчитаем, сколько всего прямоугольников получится: $101^2 + 2(100(1+2+3+\ldots+100) - 100) +$

$+ 2(2 + \ldots + 100) + 2 \cdot 99(2+3+4+\ldots+99) + 99 \cdot 99.$

Чистовик

17

№ 2.11 (продолжение). Обозначим $a = 1+2+\dots+100$, тогда кол-во способов равно $101^2+99^2+200+2\cdot 100a+$
$+2a+198(a-101) = 101^2+99^2+200+400a-101\cdot 198=$
$= 400a+202 = 400\cdot 5050 = 2020000+202 =$ 2020202.

Ответ: ~~2020000 способами~~

2020202 способами.

черновик $a>1$: $a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 \geq 0.$ $x-1=\log_a 2.$

$(a^x-a)(a^x-2a)=a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2.$ $x-1=\log$

$(a^x-a)(a^x-2a)\geq 0.$

$a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0.$

1. $\log_a 2+1.$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0.$ $a^{x-1}=1,$ $a^{x-1}=2.$

$\log_a 2=2026,$

$$\frac{\sin x\sin y(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}{\cos x\cos y(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}.$$

45°

$\sin x\sin y(\sin(90-x)\sin(90-y)-\sin x\sin y)$

a

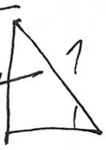
10201
9801
20002.

20202

505
4
2020

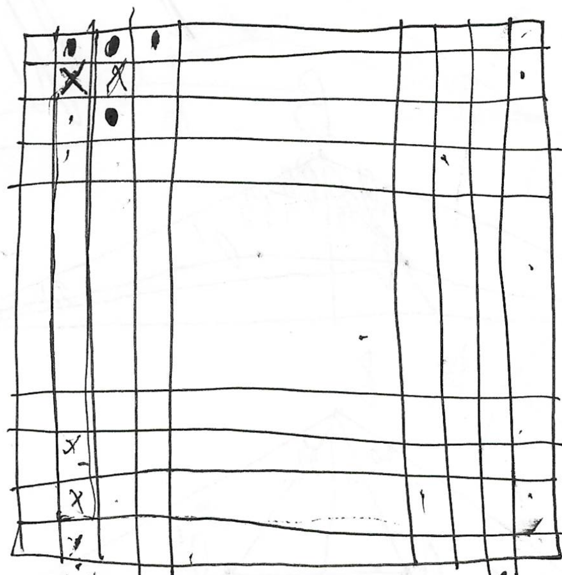
101
101
101
101
10201

99
99
891
891
9801



$101\cdot 100+1+99\cdot 100+1.$

$(100\cdot 99+99\cdot 99+\ldots+2\cdot 99)\cdot 2.$



100. 200

$99+99.$

9998

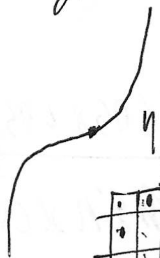
204

198
101
198
198
19998

черновик

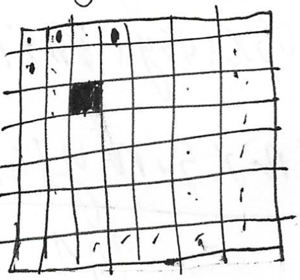
$$\frac{\sin x\sin y\cos(x+y)}{\cos x\cos y(\sin(x+y)} = \frac{\sin x\sin y(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}{\cos x\cos y(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}$$

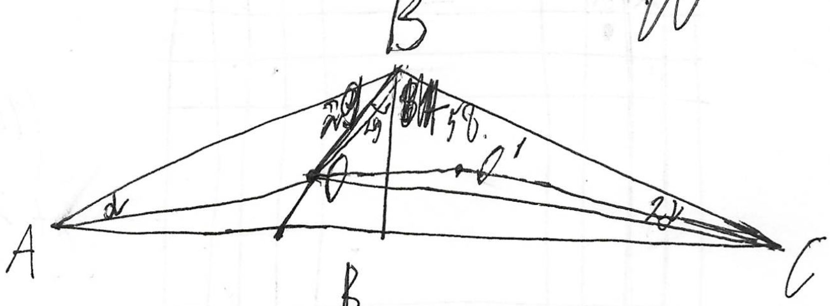
$$\frac{\sin x\sin y(\cos x\cos y-\sin x\sin y).}{\cos x\cos y(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}$$

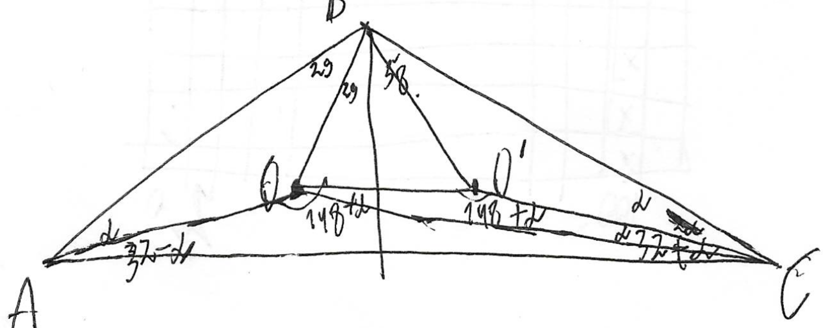


$$\frac{a(b-a)}{b\cdot c.}$$

48.

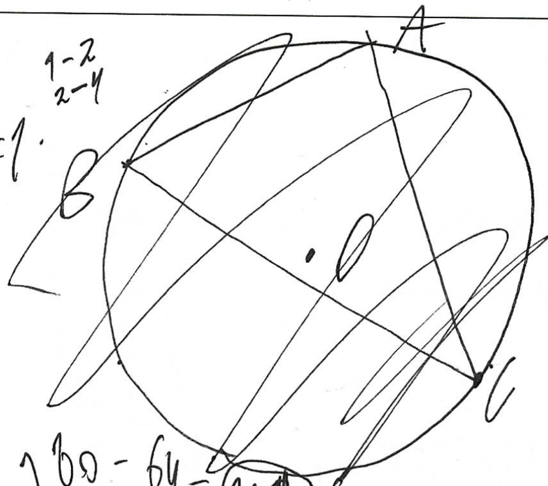






Черновик.

$\frac{1}{2^3}$ $\cdot \left(\frac{1}{2^3}\right)^0 = 1.$ $\begin{matrix}1-2\\2-4\end{matrix}$

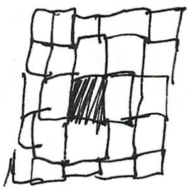


$a^{x-1}=2,$

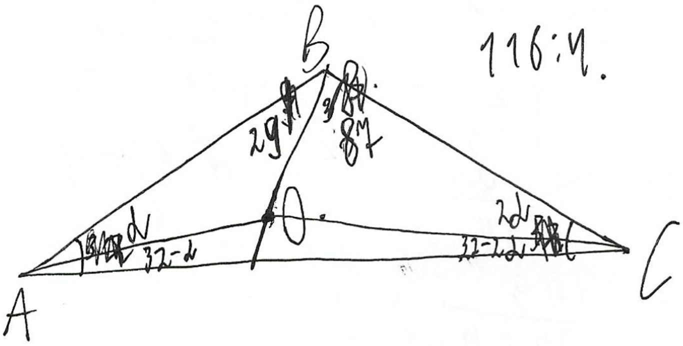
$116 : 4 = 29.$

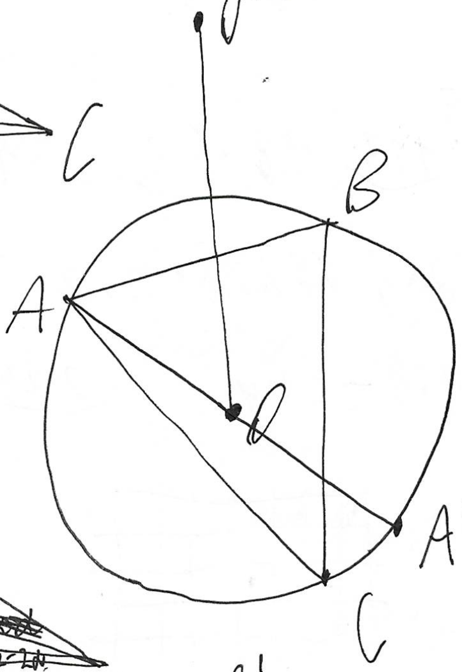
$x-1=\log_a 2.$

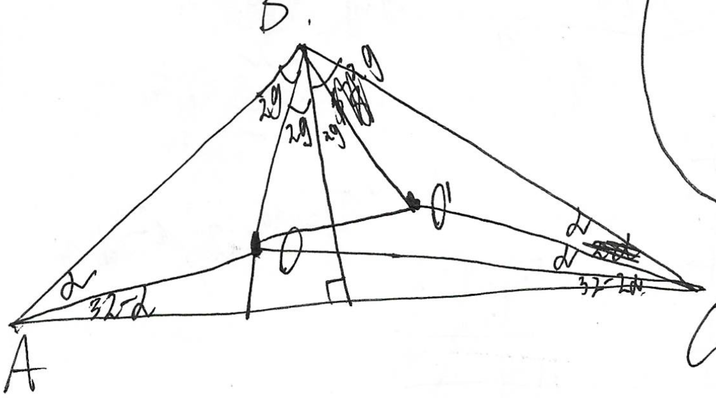
$180-64=116.$



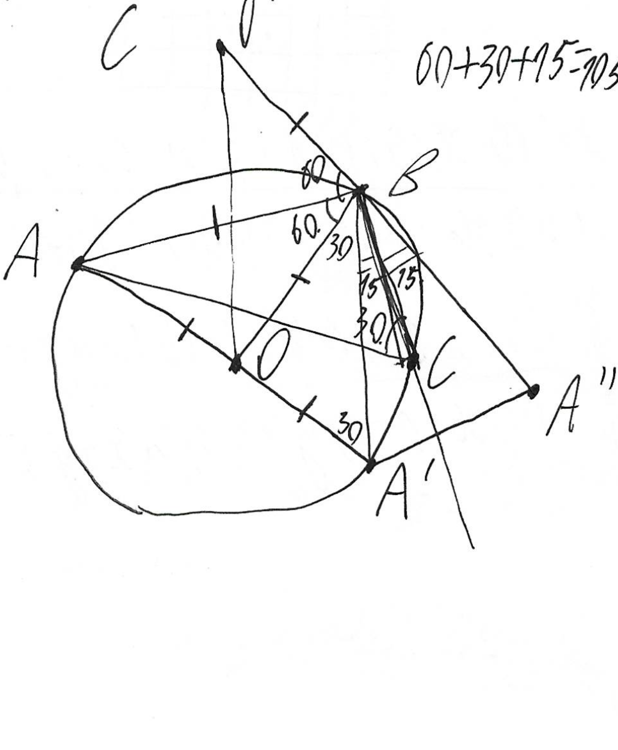
$116:4.$





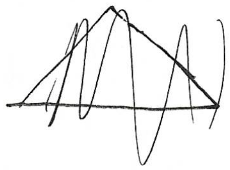


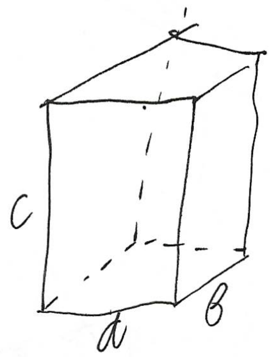
$60+30+15=105.$



Черновик

$abc+4a+4b+4c+$
$+2ab+2bc+2ac=2026$





$1017:3=$
$=339:3=$
$=113$

$(a+2)(b+2)(c+2)=abc+$

$(a+2)(b+2)(c+2)=abc+\ldots+8=2026+8=\underline{2034}$

$113\cdot 18.$

$$\begin{array}{r} 113 \\ \times\ 18 \\ \hline 904 \\ 113 \\ \hline 2034 \end{array}$$

5^{-2026}

$5^0=1,$

$5^{-1}=\frac{1}{5}$

1, 2,

$\underline{113}\ \cancel{18}\cdot\underline{6\cdot 3}$

$113\cdot 6\cdot 3,\ 226\cdot 3\cdot 3.$

$111\cdot 4\cdot 1=444.$

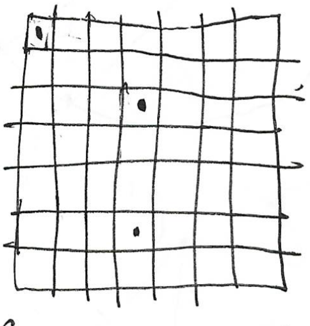
$\underline{224}$

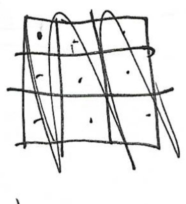
$49\cdot 48.$

$9\cdot 9=81$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=4^2.$

$a^{2026}=2,\ a=\sqrt[2026]{2}.$





$$\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(90-x-y)}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(90-x-y)}.$$

$$\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y)}{\cos x\cdot\cos y\cdot\sin(x+y)}=\frac{\sin x\sin y\,(\cos^2 x-\cos^2 y)}{\cos x\cdot\cos y\cdot(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}.$$