0 679602 080002

67-96-02-08
(121.4)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7 – 8 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сазановича Юрия Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

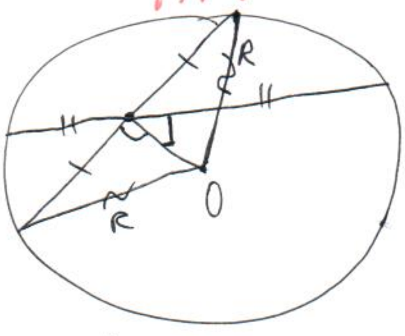
«29» марта 2026 года

Подпись участника

67-96-02-08 (121.4)

Чистовик №1.

№1.



Пусть хорды отличны от диаметра круга. Тогда, т.к. две хорды делятся точкой пересечения пополам, то если провести отрезок из центра круга в точку пересечения — он должен быть $\perp$ хордам, т.к. это по сути серединный перпендикуляр к ним, т.к. расс-ие от центра до точек пересечения хорды с окр-тью равно $R = 5$. Тогда две хорды пересекаются в точке, делящей их пополам и сер. пер-ры к этим хордам из этой точки должны приходить в центр круга $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ эти две хорды перпендикулярны одной прямой $\Rightarrow$ либо они параллельны, что невозможно, т.к. они пересекаются, либо они совпадают, что также невозможно по усл. Значит, эти две хорды являются диаметрами круга, пересекающимися в центре $\Rightarrow$ и третья хорда тоже является диаметром $\Rightarrow$ её наименьшая возможная длина $5 \cdot 2 = \boxed{10}$.

Ответ: 10.

№6.

Расс-м число, при делении кот. на сумму его цифр получившееся число $\vdots\, 9$. ~~Тогда~~ Пусть это число $\overline{abc}$, тогда:
$\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c} = 9k$, где k — некоторое целое число. Тогда $\overline{abc} = 9k \cdot (a+b+c)$, т.е. в представлении числа $\overline{abc}$ через некоторые множители есть множитель $9 \Rightarrow \overline{abc} \vdots 9$. По признаку деления на 9 сумма цифр $\overline{abc}$ также кратна $9 \Rightarrow \overline{abc} = \underbrace{9k}_{\vdots 9} \cdot \underbrace{(a+b+c)}_{\vdots 9} = 9k \cdot 9m = 81km$, где m — тоже некоторое целое число $\Rightarrow \overline{abc} \vdots 81$. Теперь мы можем выписать все трёхзначные числа, кратные 81, т.к.

Чистовик №2.

№6 (продолжение)

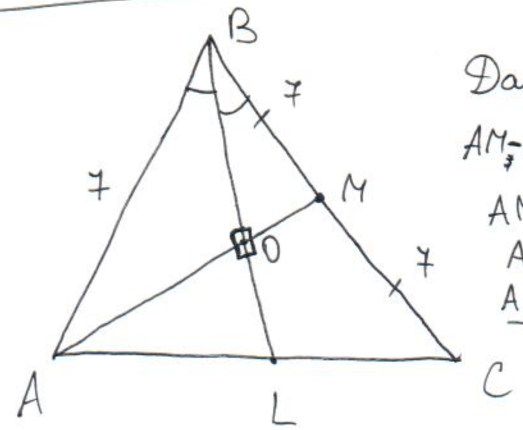
их не очень много (11):

162	243	324	405	486	~~567~~	648	~~729~~	810	~~891~~	972
$\downarrow :9$	$\downarrow :9$	$\downarrow :9$	$\downarrow :9$	$\downarrow :18$	$\downarrow :18$	$\downarrow :18$	$\downarrow :18$	$\downarrow :9$	$\downarrow :18$	$\downarrow :18$
$18 \vdots 9$	$27 \vdots 9$	$36 \vdots 9$	$45 \vdots 9$	$27 \vdots 9$	31,5	$36 \vdots 9$	40,5	$90 \vdots 9$	49,5	$54 \vdots 9$

Т. о. в множество A входят числа: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810 и 972. Нам нужно найти сумму чисел 162, 648 и 972 по усл.: $162 + 648 = 810$, $810 + 972 = \boxed{1782}$.

Ответ: 1782.

№4.



Дано: $\triangle ABC$, не р/б

AM – мед., BL – бисс.

$AM \perp BL$

$AB = 7$

$AC, BC \in \mathbb{Z}$

Найти:

$P_{\triangle ABC}$ – ?

Решение: расс-м $\triangle ABM$. В нём BO ($O = AM \cap BL$) является и бисс-ой, и высотой $\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б $\Rightarrow AB = BM = 7$. Т.к. AM – мед., то $BM = MC = 7 \Rightarrow BC = BM + MC = 7 + 7 = 14$. Тогда, т.к. $\triangle ABC$ – не р/б, то $AC \neq AB$, и $AC \neq BC$, т.е. $AC \neq 7$ и $AC \neq 14$. ~~В $\triangle ABM$ по нерав-ву $\triangle$-ка $AB + BM > AM \Rightarrow AM < 14$. Тогда по нерав-ву $\triangle$-ка в $\triangle AMC$ – $AM + MC > AC \Rightarrow AC < AM + 7 \Rightarrow AC < 21$, но т.к. $AC \in \mathbb{Z}$, то $AC \leq 20$.~~ По нерав-ву $\triangle$-ка в $\triangle ABC$ $AB + BC > AC \Rightarrow AC < 7 + 14 \Rightarrow AC < 21$. Также $AB + AC > BC \Rightarrow 7 + AC > 14 \Rightarrow AC > 7$, т.е. $7 < AC < 21$, причём $AC \neq 14$. Тогда

$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 7 + 14 + AC = 21 + AC$

$21 + 7 < 21 + AC < 21 + 21 \Rightarrow$ $\boxed{28 < P_{\triangle ABC} < 42, \text{ кроме } P_{\triangle ABC} = 21 + 14 = 35, \text{ где } P_{\triangle ABC} \in \mathbb{Z}.}$

Ответ: $28 < P_{\triangle ABC} < 42$, $P_{\triangle ABC} \neq 35$, $P_{\triangle ABC} \in \mathbb{Z}$.

67-96-02-08 (121.4)

Чистовик №3.

№3.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}ТУК\\ТУК\end{array} \\ \hline ФАРТУК \end{array}$$

Заметим, что в этом рав-ве при умножении К на К получается число, последняя цифра кот. также К => К м.б. либо 1, либо 5, либо 6, т.к. $1\cdot1=1$, $5\cdot5=25$, $6\cdot6=36$. Также можно заметить, что при перемножении степеней числа 5 ~~[illegible]~~ на конце всегда остаётся 25, т.к. получающиеся числа всегда $\vdots 25$. Т.о., можно предположить, что $У=2$, $К=5$. Тогда трёхзначных степеней числа 5 всего две — 125 и 625. Перемножим 125 на 125 и 625 на 625:

$$\begin{array}{r} 125\\ \times 125\\ \hline 625\\ +250\\ 125\\ \hline 15625 \end{array}$$ — не подходит

$$\begin{array}{r} 625\\ \times 625\\ \hline 3125\\ +1250\\ 3750\\ \hline 390625 \end{array}$$ — подходит => $Т=6$, $У=2$, $К=5$, $Ф=3$, $А=9$, $Р=0$.

Тогда ФАРТУК = 390625.

Ответ: 390625.

№7.

Пусть в первой строке сумма чисел n. Тогда во второй — $n+1$, в третьей — $n+2$, в четвёртой — $n+3$ => Суммарно во всех строках $n+n+1+n+2+n+3=4n+6$ — чётное число. Сумма цифр от ~~одного~~ 1 до 9 — 45 — нечёт. число => нужно, чтобы мы не использовали нечёт. число, чтобы суммарно во всех строках получилось чёт. число. Найдём суммы во всех строках при неиспользовании чисел 1, 3, 5, 7, 9:

1 — 44 5 — 40 9 — 36

3 — 42 7 — 38

Чистовик №4.

№7 (продолжение)

Т.к. n – целое, то сумма без 6 должна делиться на 4 $\Rightarrow$ подходят только 42 и 38, т.к. $\frac{42-6}{4} = 9$, $\frac{38-6}{4} = 8$.

Т.е. первый вариант – когда не используется тройка, тогда $n = 9$. Второй вариант – не используется семёрка, тогда $n = 8$.

I.

1	8
4	6
2	9
5	7

2	7
1	9
5	6
4	8

Есть два варианта расположения чисел без тройки. Но мы можем переставлять числа в одной строке $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ у каждого варианта

$2^4 = 16$ способов перестановки $\Rightarrow$ ~~утр~~ без тройки $16 \cdot 2 = 32$ способа.

II.

2	6
4	5
1	9
3	8

3	5
1	8
4	6
2	9

У семёрки также 2 варианта и 32 способа перестановки.

Тогда всего $32 + 32 = \boxed{64}$ варианта.

Ответ: 64 способа.

Черновик №3.
№7.

	16	
n	1	8
$n+1$	4	6
$n+2$	2	9
$n+3$	5	7

16
27
19
56
48

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\Sigma = 4n+6$ – чёт.

$n \in \mathbb{Z}$

без числа	Σ	
1	44	×
2	43	×
3	42	√
4	41	×
5	40	×
6	39	×
7	38	√
8	37	×
9	36	×

Подх.: ~~1,8,3,7~~

1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — 32
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 — 32

64

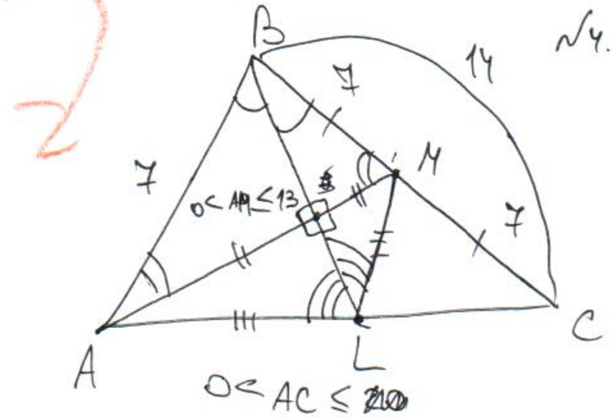
$n = 9$

$n = 8$

26	35
45	18
19	46
38	29
16	16

Черновик №2.

№4.



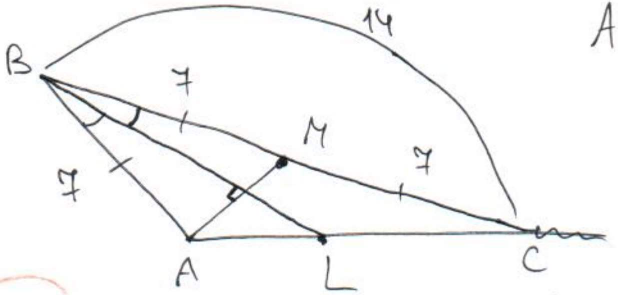
$0 < AC \le 19$

$AC, BC \in \mathbb{Z}$

$P = 7 + 14 + AC$

$0 < AC \le 19 \Rightarrow 21 < P \le 40$

$AC \ne 7, \; AC \ne 14.$



$\boxed{21 < P \le 40, \text{ кроме } P = 28 \text{ и } P = 35}$

№3.

$$\begin{array}{r} \times\, ТУК \\ ТУК \\ \hline ФАРТУК \end{array}$$

$625 = 5^4$

$$\begin{array}{r} \times\, 625 \\ 25 \\ \hline 3125 \\ +\,1250 \\ \hline 15625 \end{array} = 5^6$$

$1 \cdot 1 = 1$

$5 \cdot 5 = 25$

$6 \cdot 6 = 36$

$$\begin{array}{r} \times\, 125 \\ 125 \\ \hline 15625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 625 \\ 625 \\ \hline 3125 \\ +\,1250 \\ +\,3750 \\ \hline 390625 \end{array} = 5^8$$

$(ТУК)^2 = ФАР000 + ТУК$

$(ТУК)^2 - ТУК = ФАР000$

$ТУК(ТУК-1) = ФАР000 = ФАР \cdot 1000$

$2^3 \cdot 5^3$

$ТУК = 100Т + 10У + К$

$(100Т + 10У + К)^2 = 10000Т^2 + 100У^2 + К^2 + 2000ТУ + 200ТК + 20УК$

$= 100000Ф + 10000А + 1000Р + 100Т + 10У + К$

$ТУК - 1 = ТУЗ$

$$\begin{array}{r} \times\, ТУК \\ ТУЗ \\ \hline ФАР000 \end{array}$$

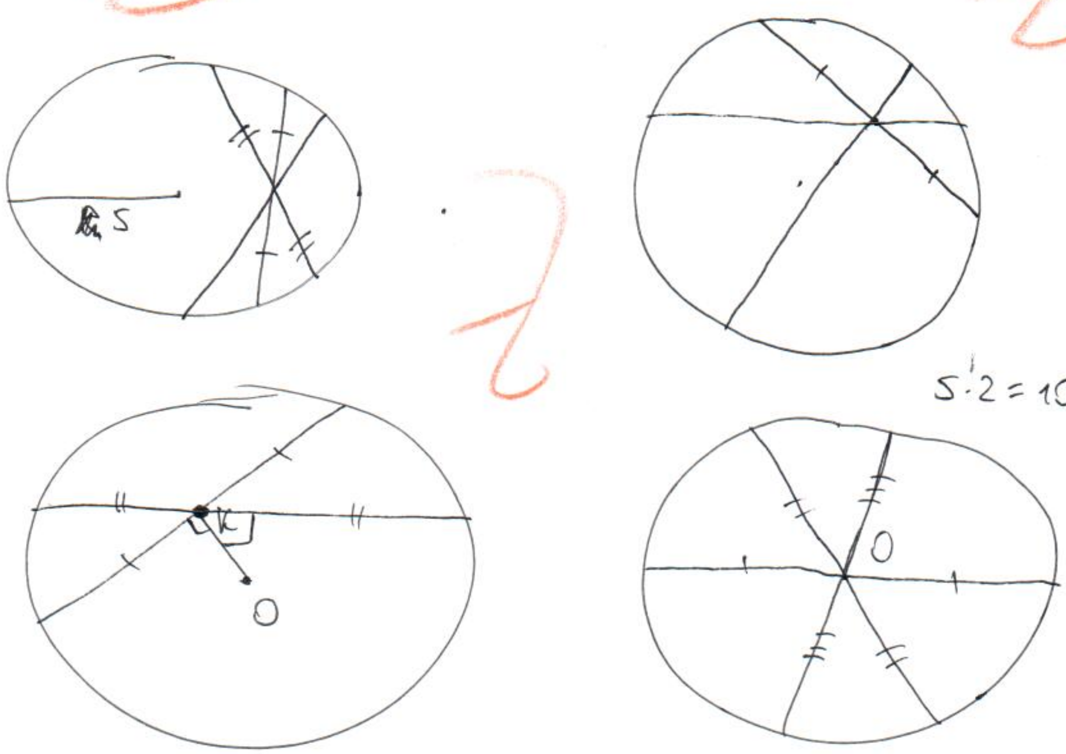
$(ТУК)^2 - ТУК - ФАР000 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot ФАР000 = 4ФАР000 + 1$

$ТУК = \dfrac{1 + \sqrt{D}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{4000ФАР + 1}}{2}$

Черновик №1.

№1.



№6.

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$ $=\overline{abc}$

$648 + 162 = 810$

$A = \{ \dots ; \dots ; \dots ; \dots \}$

1 ... 6 ... посл.

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = \underbrace{9k}_{\vdots 9}$$

$972 + 810 = 1782$

$\overline{abc} = \underbrace{9k\cdot(a+b+c)}_{\vdots 9} \Rightarrow \overline{abc} \vdots 9 \Rightarrow (a+b+c) \vdots 9$ по пр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{abc} = \underbrace{(a+b+c)}_{\vdots 9}^{9m} \cdot \underbrace{9k}_{\vdots 9} = 81mk \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{\overline{abc} \vdots 81}$

162, 243, 324, 405, 486, ~~567~~, 648, ~~729~~, 810, ~~891~~, 972

$162 : 9 = 18$, $243 : 9 = 27$, $324 : 9 = 36$, $405 : 9 = 45$, $486 : 18 = 27$, $567 : 18$, $648 : 18 = 36$, $729 : 18$, $810 : 9 = 90$, $891 : 18$, $972 : 18 = 54$

$486 : 18 = 27$; $567 : 18 = 31{,}5$; $648 : 18 = 36$; $729 : 18 = 40{,}5$; $891 : 18 = 49{,}5$; $972 : 18 = 54$

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972

810 — 1782