0 893378 850007

89-33-78-85

(124,4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Салащенко Владимира Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

Vlaaaz—

89-33-78-85
(124.4)

Черновик 1

$1196 \,|\, 2$ 598

-10 19 -18 16

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$

$4 \cdot 9.$ $3 \cdot 11$

$297 \,|\, 9$ 27 33 27 27

$1+4=5$

$1 - tg^2\alpha = (1-tgx)(1+tgx)$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$S =$

f - множество точек.

$598 \,|\, 2$ 299 19 -18 14

16 -9 $7.$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

18 27.
999
27

Теорема Брахмагупты

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Площадь четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность, равна корню из полупериметра минус a, умноженному на полупериметр минус b, умноженному на полупериметр минус c, умноженному на полупериметр минус d

36×36: 216, 1080, 1296

$81 \times 7 = 567$

$81 \times 3 = 243$

$(tgx-1)(tgx+1) \geq 0$

$+$ -1 $-$ 1 $+$ $tgx.$

$81 \times 6 = 486$

A - нат. множ.

$\frac{\text{число}}{\text{сумма цифр}} = \frac{0}{9}$

$81 \times 9 = 810$

Деление на 9 — сумма цифр делится на 9

Черновик 2.

$A, B, C \in F$

$|a| \leq 4$

$a \in [-4; 4]$.

получи первый 4 бочки, которая не принадлежит координатной ... не является ... координ.

Находят из катетов параллелен одной из координатных осей.

$\log_a x$

$x \notin$

$8x^2 \log_a + \log_a + 9 \cdot -2x = 20$

$D = 2R$

$y = \frac{x^2}{2}$

$y = \pm \frac{x^2}{2} + C$

$\log_a b = c$

$a^c = b$

$121 + 49 = 170$

$(6; 9)$

$(6; 9) - (-5; 2) = (11; 7)$

$\sqrt{121 + 49}$

$\sqrt{170}$

$(0;0) \cdot (3;0)$

$(-5; 2)$

По т. cos

$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma} = 2R$

длина вектора

№7

① $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + C$

$x_1^2 = C + 1$

$x_1 = \sqrt{C+1}$

② $\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + C$

$x^2 = C - 1$

$x_2 = \sqrt{C-1}$

89-33-78-85
(124.4)

Чистовик 1

№1

$$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$$

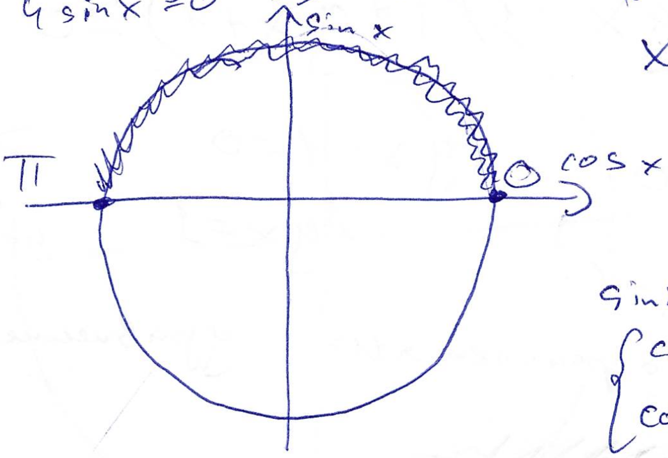
Основное тригонометрическое тождество:
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

Ограничение допустимых значений:

$4\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$



$\sin x = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 1 \\ \cos x = -1.\end{array}\right.$

$6(1-tg^2x) \geq 0 \Rightarrow 1 - tg^2x \geq 0$

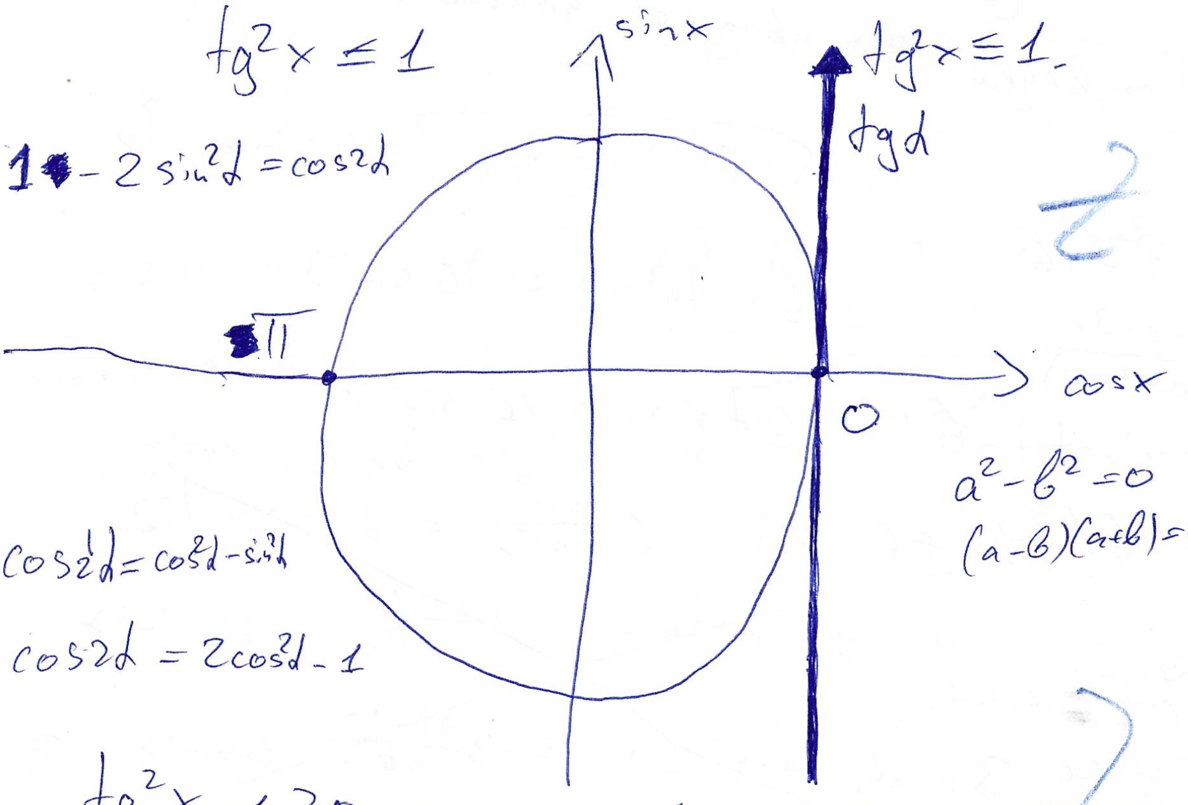
$\Downarrow$

$1 \geq tg^2x$

$tg^2x \leq 1$

$tg^2x \leq 1.$

$1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$



$a^2 - b^2 = 0$

$(a-b)(a+b) = 0$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg^2x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow (tg x - 1)(tg x + 1) \geq 0$

Чистовик 2.

№1 продолжение

$tg\,x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

$$(tg\,x - 1)(tg\,x + 1) \geq 0$$

$tg\,x + 1 = 0$ $\quad$ $tg\,x - 1 = 0$ $\quad$ ≥ 0 ↓ положительное

$tg\,x = 1$.

$tg\,x = -1$.

Обобщим ограничения на уравнение:

$$\begin{cases} tg\,x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$

Возведем в квадрат. уравнение

$$\sqrt{6(1 - tg^2 x)} = 4\sin x \quad |^2$$

$4^2 = 16$

$$6(1 - tg^2 x) = 16\sin^2 x$$

$\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $tg\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\cos^2 x = t;\ t \geq 0$ $\quad$ $6 - 6tg^2 x = 16\sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$6\cos^2 x + 6\sin^2 x - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\sin^2 x \quad |:2$$

$$3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 8\sin^2 x.$$

$6 - 6\dfrac{1-t}{t} = 16(1-t)$

$16t^2 - 4t - 6 = 0$ $\quad$ $3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 8\sin^2 x = 0$

$t_1 = \dfrac{3}{4}$ $\quad$ $3\cos^2 x - 3\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\sin^2 x = 0$

$t_2 = -\dfrac{1}{2}$ $\varnothing$

89-33-78-85
(124.4)

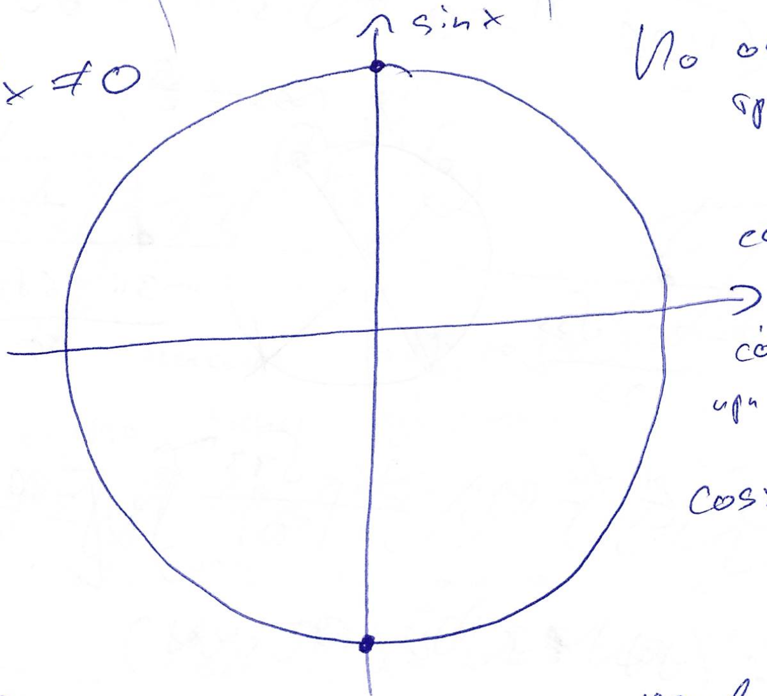
Черновик 3

№1 Продолжение

Умножим уравнение на $\cos^2 x$. $\cos^2 x \geq 0$,

При этом $\cos^2 x$ стоит в знаменателе у числа $3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, поэтому $\cos^2 x \neq 0$.

$\cos^2 x \neq 0$



По основному тригонометрическому тождеству: cosx.

$\cos^2 x = 0$ только при условии, что $\sin^2 x = 1$

$\cos x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

При выполнении этого условия:

$3\cos^4 x - 3\sin^2 x - 5\sin^2 x \cos^2 x = 0$

$3\cos^4 x - 3\sin^2 x - 5\sin^2 x \cos^2 x$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

Заменим $\cos^2 x$ на t; $t \geq 0$

$3t^2 - 5t\sin^2 x - 3\sin^2 x = 0$

$D = 25\sin^4 x + 36\sin^2 x = \sin^2 x(25\sin^2 x + 36) \geq 0$

$g = \sin^2 x$.

$D = 1296 - 100 = 1196$

Чистовик ч.

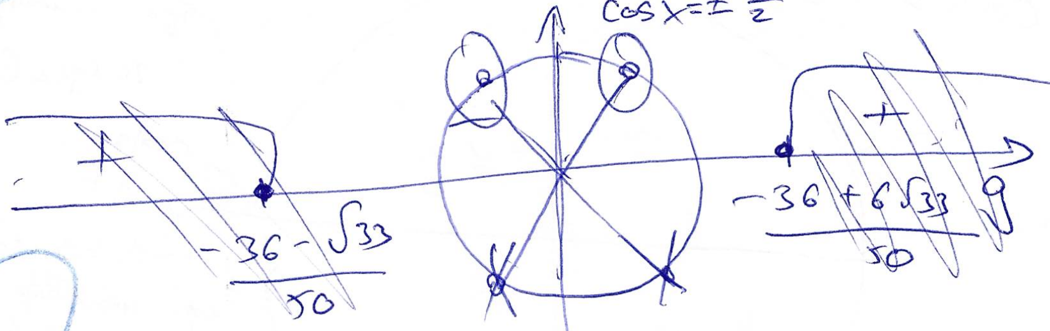
№1 Продолжение.

$$g_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{1196}}{50} \Rightarrow g_1 = \frac{-36 + 6\sqrt{33}}{50} \quad g_2 = \frac{-36 - \sqrt{33}}{50}$$

$$1196 = 4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\sqrt{1196} = 2 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 11} = 6\sqrt{33}$$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$g \in \left(-\infty; \frac{-36-\sqrt{33}}{50}\right] \cup \left[\frac{-36+6\sqrt{33}}{50}; +\infty\right)$$

Ответ: ~~$(-\infty; \ldots) \cup (\ldots)$~~

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

№2

Дано: A - множество натуральных чисел. Найти: трехзначные числа из A.

$$\frac{\text{Число из множества}}{\text{сумма цифр числа}} : 9 = n$$

где

n - натуральное целое число

Признак деления на 9 - сумма цифр делится на 9, следовательно число должно иметь в себе 9^2, 2 девятки

№2 продолжение

Чистовик 5.

множество A.

$\sqrt{162}$ $\sqrt{405}$ $\sqrt{810}$

$\sqrt{243}$ $\sqrt{486}$ $\sqrt{972}$

$\sqrt{324}$ $\sqrt{648}$

$$\begin{array}{r} 243 \\ +\,648 \\ \hline 891 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 891 \\ +\,972 \\ \hline 1863 \end{array}$$

Первое число подходящее под условие того, что число должно быть трехзначным и иметь в своих множителях 81, т.е. это будет $2 \cdot 81 = 162$, продолжая эту цепочку находим следующее число $3 \cdot 81 = 243$, это 2, из этого следует, что следующий элемент номер 6 будет [illegible] = 648, а последний подходящий будет 972, т.е. [illegible])

~~Суммой же их будет~~ ~~243 + 648 + 810~~

$$\begin{array}{r} 162 \\ +\,567 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 243 \\ +\,486 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 729 \\ +\,810 \\ \hline 1539 \end{array}$$

Ответ: ~~1539~~ 1863

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\,7 \\ \hline 567 \end{array}$$

2 2 2

№3.

Дано:

f - множество точек в пространстве, координаты - целые числа, $|n| \leq 4$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чисовик 6.

№3 продолжение.

F

Рассмотрим плоскости $\parallel z=0 \Rightarrow 9$ верт $+$ 9 гориз прямых

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$(9^2) = \dfrac{9!}{2!\,7!} = \dfrac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}}$

$(9^2)^2 = 36^2 = (35+1)^2 = 1225+1+70 = 1296$

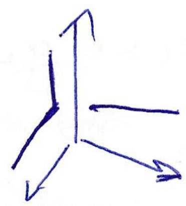
$1296\cdot4 = 4000+800+360+24 = 5184$

$5184\cdot27 = 139968$

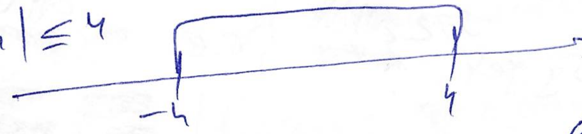
$$\begin{array}{r} 5184 \\ \times\ 27 \\ \hline 36288 \\ +103680 \\ \hline 139968 \end{array}$$

ABC - прямоугольный треугольник

[redacted] ABC $\in$ F.



$|n| \le 4$



$\Rightarrow n \in [-4;4]$.

Ответ: [redacted] 139968

№4. $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$

$\boxed{\begin{array}{ll} 1)\ \sin 11\pi x = \sin 17\pi x & 2)\ 2\cos(16\pi x)\sin(-\pi x)=0 \\ 2)\ \sin 15\pi x = \sin 17\pi x & 3)\ 2\cos(13\pi x)\sin(-2\pi x)=0 \\ 3)\ \sin 11\pi x = \sin 15\pi x & \\ 1)\ 2\cos(14\pi x)\sin(-3\pi x)=0 & \end{array}}$

[redacted]

43 внутренних пересечений

$\sin k\pi x = 1$

$x = \dfrac{4m+1}{2k}$ $\Rightarrow \begin{cases} k=11 \Rightarrow 6 \\ k=17 \Rightarrow 9 \\ k=15 \Rightarrow 8 \end{cases}$

$k \in \{11, 15, 17\}$

$\sin k\pi x = -1:$

$: 19$

$y = \sin 4\pi \cancel{\ }x$

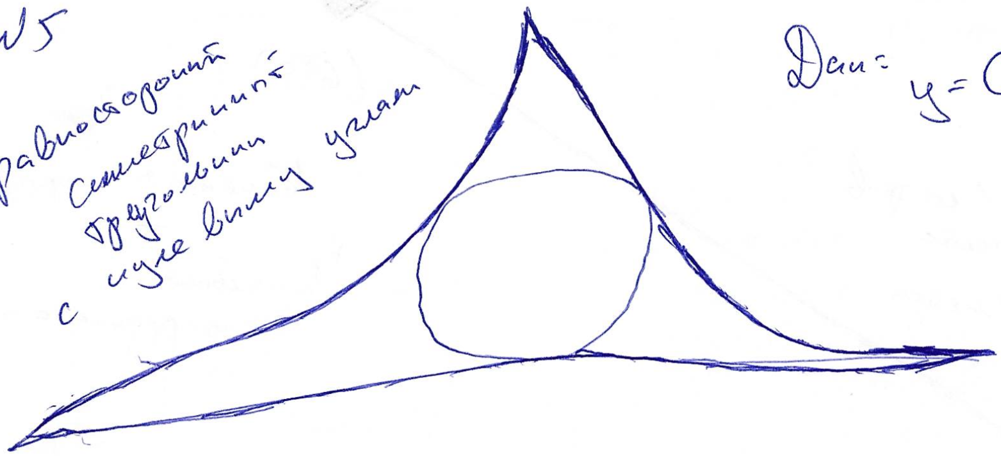
Ответ: [redacted] 91 [redacted] [redacted]

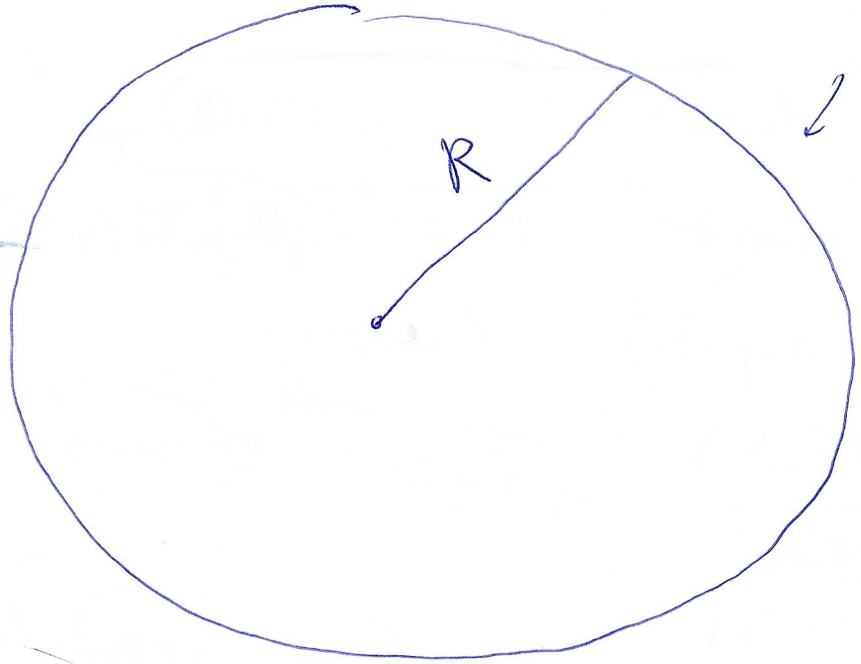
Чистовик 7

№5

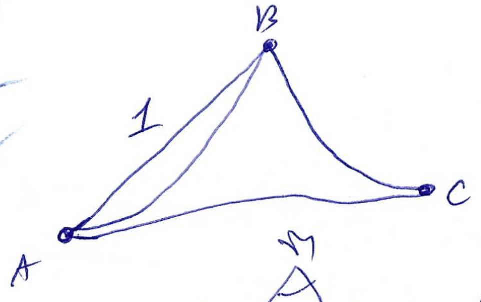
равносторонний сферический треугольник с нулевыми углами

Дано: $y = Cx^2$

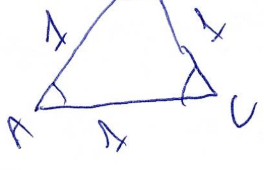




Вписанная в треугольник окружность



Пусть ABC — треугольник

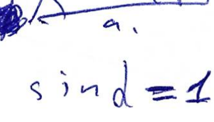


ABC – равносторонний треугольник

⇓

все углы равны

По теореме синусов:



$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Т.к. углы по условию нулевые, то $\sin\alpha = 1$,

следовательно $R = 2$ Ответ: 2.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

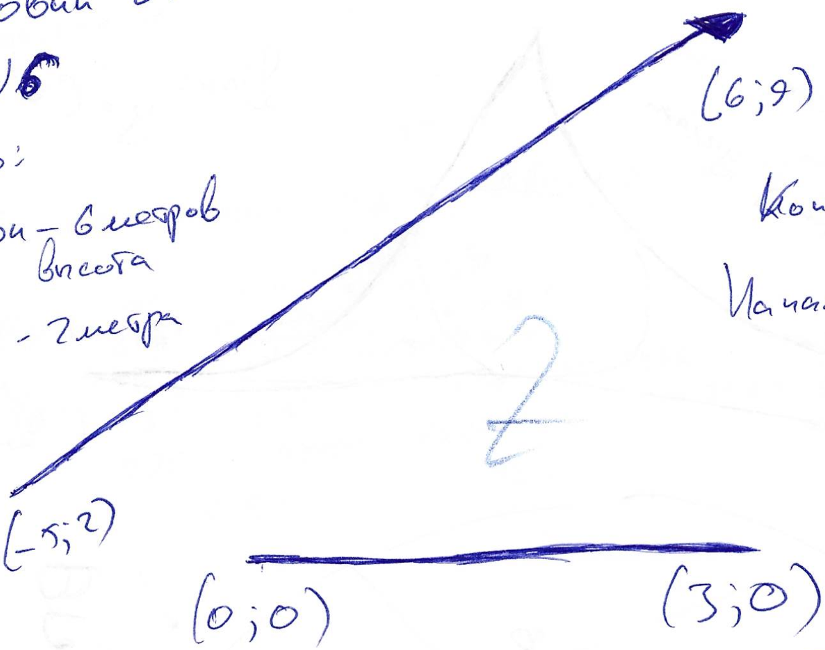
Чистовик 8.

№6

Дано:

Светлячок — 6 метров высота

Забор — 2 метра



Конечная координата — Начальная координата

Длина вектора: $|\vec{B-A}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

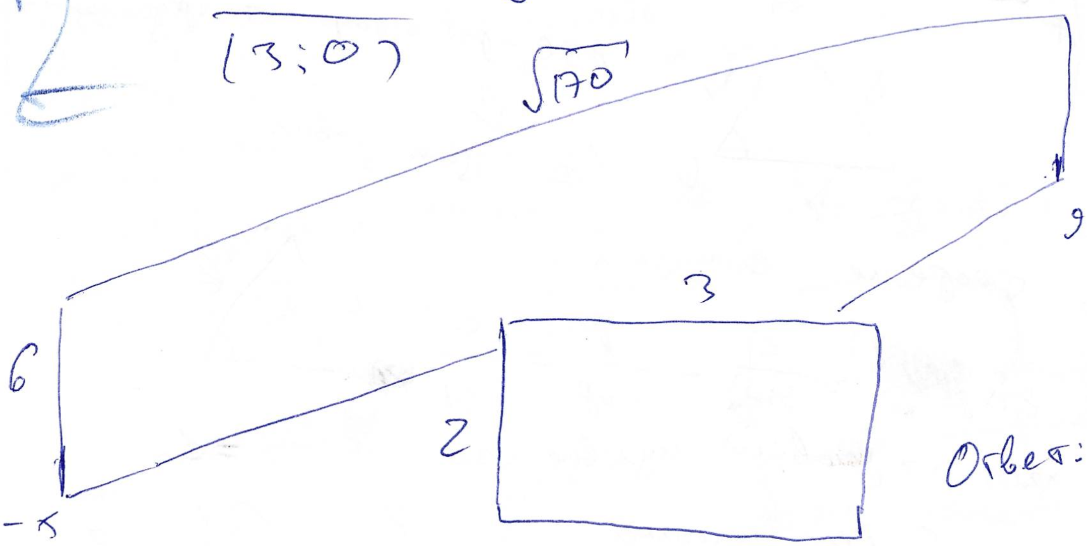
Длина вектора пути светлячка:

$$\begin{array}{r} (6;9) \\ -\ (-5;2) \\ \hline (11;7) \end{array} \quad \sqrt{11^2+7^2} = \sqrt{121+49} = \sqrt{170}$$

S = длина · высоту

Длина вектора забора:

$$\begin{array}{r} (3;0) \\ -\ (0;0) \\ \hline (3;0) \end{array} \quad \sqrt{9+0^2} = 3.$$



Ответ: 6

Листовки Э.

№ 7

Тетрадь

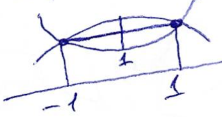
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ $x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Диагонали $\perp$-ны $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$



См. черновик 2

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1 + c \end{cases}$$

$x_1 = \sqrt{c+1}$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + c \end{cases}$$

$x_2 = \sqrt{c-1}$

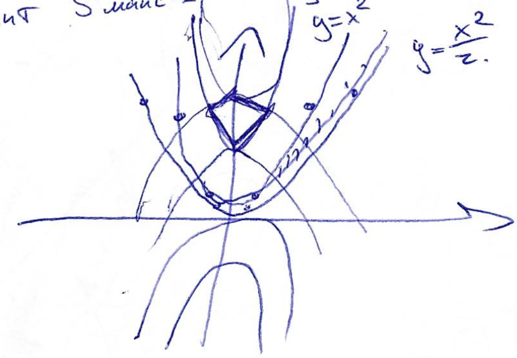
$x_1 - x_2 = \sqrt{c+1} - \sqrt{c-1} \Rightarrow h =$

$= \frac{(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1})(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1})}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} =$

$= \frac{(c+1) - (c-1)}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} = \frac{2}{\sqrt{c+1} +$ [redacted] $\sqrt{c-1}} = F(c)$

F – функция убывающая

Значит S макс $= 1$



Парабола $y = \pm \frac{x^2}{2} + c$,

$c \in \mathbb{Z}$.

Начало – центр листа

Высота × ширина 210×297 мм.

Ответ: [redacted] $\{1\}$ [redacted]

№8

$8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \geq 0$

$\log_x a = \frac{1}{t}$ $\quad 8a^{2t}t - \frac{1}{t} - 2a^t \geq 0$

~~$x(8x^2 \log_a x - 2) \geq \log_x a \geq 0$~~

при $t > 0$: $8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \geq 0$

при $t < 0$: $8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \leq 0$

~~$x \cdot 2\log_a x \log_x a \geq 26$~~

$8u^2 - 2u - 1 = 0$

$u = \frac{2 \pm 6}{16}$ $\rightarrow \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$

$\log_a x \cdot \log_x a = 1.$

$t > 0$ $u \geq \frac{1}{2}$

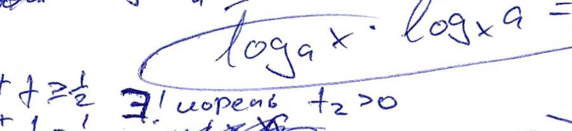
$u > 0$ $\quad a^t t \geq \frac{1}{2}$ $\quad \exists!$ корень $t_2 > 0$

$F(t) \geq 0$ $\quad a^t t = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ [redacted]

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \\ a \neq 1 \\ a > 0 \end{cases}$$



Чистовик 10

№8 продолжение

$+$ $-$ $+$

$-\frac{1}{2\log_a x}$ $\frac{1}{\log_a x}$

$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2\log_a x}\right] \cup \left[\frac{1}{\log_a x}; +\infty\right)$

$t \le 0$ $u \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

$a^t t \ge -\frac{1}{4}$

максимум $-\frac{1}{e\ln a}$

$\Downarrow$

$\left(x + \frac{1}{2\log_a x}\right)\left(x - \frac{1}{\log_a x}\right) = 0$

$\log_a b = c \Rightarrow b = a^c$

$\Downarrow$

$a = e^{-\frac{2}{e}}$

Ответ: $\{1\} \cup \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$a = e^{-\frac{2}{e}}$