0 965775 900002

96-57-75-90
(123.22)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город
дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Самойлова Юрия Борисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

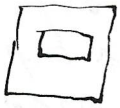
Сам

Чистовик

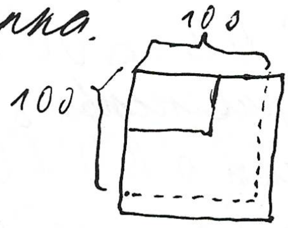
№2

квадрата 101×101

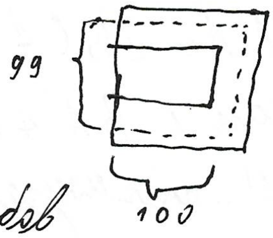
I Посмотрим каких сторон может касаться вырезанный прямоугольник.


п. 1

1) Он не касается ничего. Такого варианта не может быть, т.к. тогда будет дырка.


п. 3

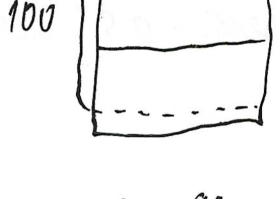
2) Он касается 1-ой стороны. Тогда нам нужно выбрать 2 целые не крайние точки на этой стороне — это C_{100}^2 способа и выбрать расстояние на котором будет его противоположная сторона от стороны касания — это 100 способов.


п. 2

Тогда прямоугольник будет построен, ~~как~~ из прямых: перпендикуляры, восстановленные в 2-х выбранных точках, сторона квадрата и прямая на выбранном от неё расстоянии. Это $100\,C_{100}^2$ способов,

~~3) Он касается~~ но можно выбрать 4 стороны, поэтому $4 \cdot 100 \cdot C_{100}^2$

3) Он касается 2-х сторон, т.е ему принадлежит ровно 1 вершина квадрата и остаётся только выбрать длину и ширину, это $100 \cdot 100$. Всего будет $4 \cdot 100 \cdot 100$ т.к. есть 4 угла. (2 противоположные стороны квадрата было выбрать нельзя, т.к. тогда он распадётся)

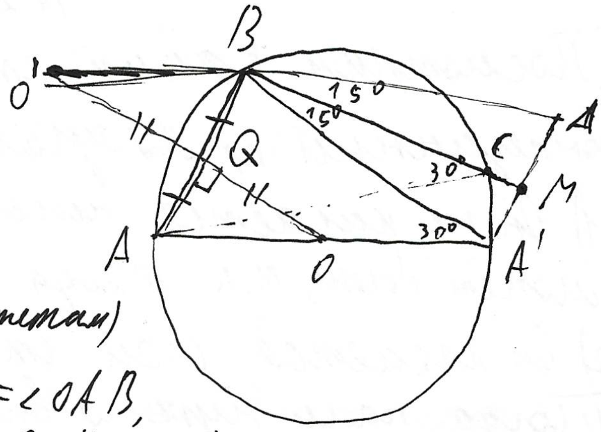

п. 4

4) Он касается 3-х сторон. Тогда нужно выбрать только расстояние до средней из этих сторон — это 100 вариантов. Получаем $4 \cdot 100$, т.к. 4 варианта выбрать 3 стороны.

II В итоге имеем $4(100\,C_{100}^2 \cdot 100 \cdot 100 + 100) = 400\left(\frac{100 \cdot 99}{2} + 101\right) =$
$= (4950 + 101)400 = (5051)400 = 2020400$. Ответ: 2020400

Чистовик

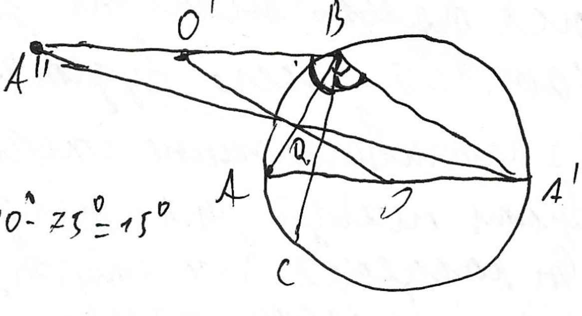
№3



1) Пусть $OO' \cap AB = Q$.
2) Тогда $AQ = QB$, т.к. центр окр. лежит на сер. перп. к AB.
3) $O'Q = QO$, $\angle O'QB = 90°$.
4) $\triangle O'QB = \triangle OQA$ (по 2-м катетам)
5) Из равенства △-ов $\angle O'BA = \angle OAB$, значит $O'B \parallel AO$, а точнее $BA'' \parallel AA'$, где A' - диаметрально противоположная A точка.
6) $\angle BA'A = \angle BCA = 30°$, т.к они опираются на 1 дугу AB.
(случай $\angle BA'A = 180° - \angle BCA = 150°$ невозможен, т.к. $\triangle ABA'$ - прямоугольный)
7) Теперь имеем 2 случая:

I ~~Точки~~ A' и A'' расположены в 1 полуплоскости относительно AB.
1) Тогда $\angle A'BA'' = \angle AA'B = 30°$.
2) $\triangle BA'A''$ - р/б из симметрии, значит $\angle A'BC = \angle A''BC = 15°$
3) $\angle ABA' = 90°$, значит $\angle ABC = 90° + 15° = 105°$

II Точки A' и A'' расположены в разных полуплоскостях относительно AB
1) $\angle A'BA'' = 180° - \angle AA'B = 150°$
2) $\angle A'BC = \angle A''BC = 75°$
3) $\angle ABA' = 90°$, значит $\angle ABC = 90° - 75° = 15°$



Ответ: $105°$ или $15°$.

96-57-75-90 (123.22)

Листовик

№ 4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$y = a^x$

$$\frac{y^2-3ay+2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

Чтобы множество решений было отрезком нужно, чтобы $\log_2 a < 0$, т.к иначе получим 2 луча. Также из ОДЗ $a > 0$ и $a \neq 1$, т.е получаем $a \in (0;1)$

$y^2 - 3ay + 2a^2 \geq 0$

$y \in \left[\frac{3a-\sqrt{9a^2-8a^2}}{2}; \frac{3a+\sqrt{9a^2-8a^2}}{2}\right]$

$y \in [a; 2a]$

$a \leq a^x \leq 2a$

Для удобства $b = \frac{1}{a}$ $b \in (1;+\infty)$

$\frac{b}{2} \leq b^x \leq b$

$\log_b \frac{b}{2} \leq \log_b b^x \leq \log_b b$

$1 - \log_b 2 < x \leq 1$

Значит $\log_b 2 = 2026$

$2 = b^{2026}$

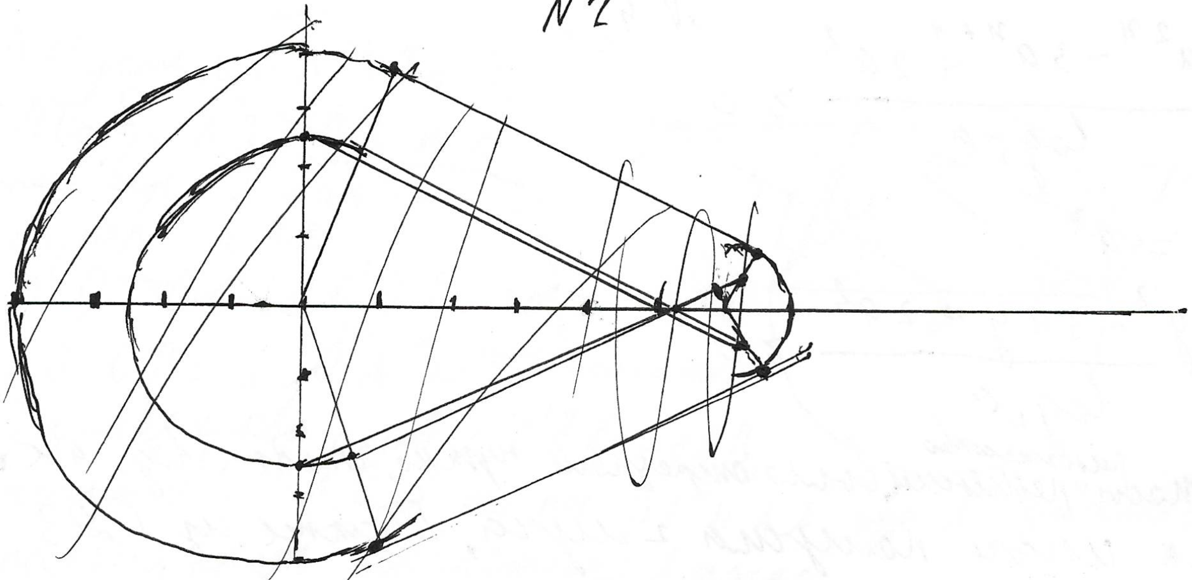
$b = \sqrt[2026]{2}$

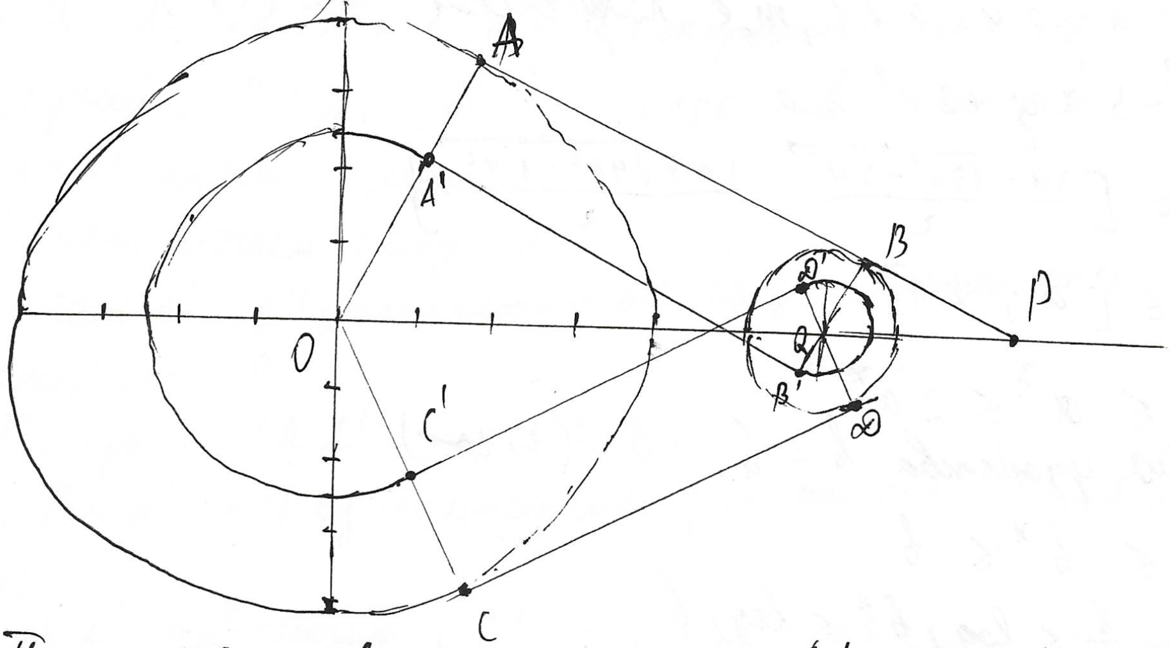
$a = \frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$

Чистовик

№7





1) Пусть AB - первая касательная (A - точка касания большой окр.) CD - 2-ая касат.

2) Пусть A' - точка, куда трава летит, когда косилка в A, аналогично B', C', D'

3) Пусть O - центр большой, а Q - мал. окр.

4) Пусть $OQ \cap AB = P$

5) Пусть $PB = x$, тогда из подобия $\triangle PBQ \sim \triangle PAO$

$PA = 4x$, $BA = 3x$. По т. Пифагора $AB^2 + (OA - QB)^2 = OQ^2$

6) ~~$A'B' = A'B' = 3x$~~

$9x^2 + 9 = 36$ $9x^2 = 27$ $x = \sqrt{3}$

7) Тогда $\operatorname{tg} \angle BPQ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\angle BPQ = 30° = \frac{\pi}{6}$

8) Кусок траектории - дуга $A'C'$ длиной $(4 - 1{,}5)\left(\pi + 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$

96-57-75-90 (123.22)

Чистовик

№ 7 продолжение

т.е. дуга $A'C'$ по длине $2,5 \cdot \frac{4}{3}\pi$

9) Аналогично дуга $B'D'$ по длине $0,5 \cdot \frac{4}{3}\pi$

10) В траектории есть отрезки $A'B'$ и $C'D'$ и они равны $3x = 3\sqrt{3}$, а в сумме $6\sqrt{3}$

11) Получаем $3 \cdot \frac{4}{3}\pi + 6\sqrt{3} = 4\pi + 6\sqrt{3}$

Ответ: $4\pi + 6\sqrt{3}$

№ 1.

Пусть длина, ширина и высота равны a, b, c, тогда

$abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) = 2026$

Известно, что

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8$

т.е.

$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 2026$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2 \cdot 1017 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$

Б.О.О. $a<b<c$

Остаётся перебрать варианты ~~$x = a+2$~~,

$\{x = a+2, \; y = b+2 \; z = c+2$

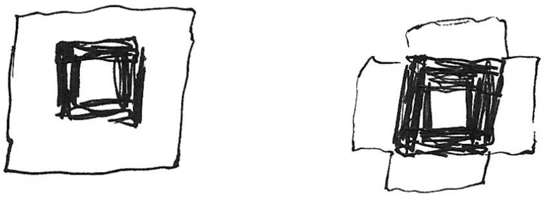
$(x; y; z) = (2; 9; 113)$ − нет $a=0$

$= (3; 6; 113) \quad V = 1 \cdot 4 \cdot 111 = 444$

$= ($

Ответ: 444

Черновик



$2+(a+2)(b+2)(c+2)=$

$\left(\frac{9}{21}\right)=abc+ab+bc$

$1\cdot 2\cdot$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2c+2(2+3c)+4(3+c)=2026$

$2c+4+6c+12+4c=2026$

$12c=2010$

$4c=670$

$1013 : 7 = 14$
-7
31
-28
33

$$\frac{a^2b^2c^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

$abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)=2026$

$abc:2$

$2\cdot 1013$

1013

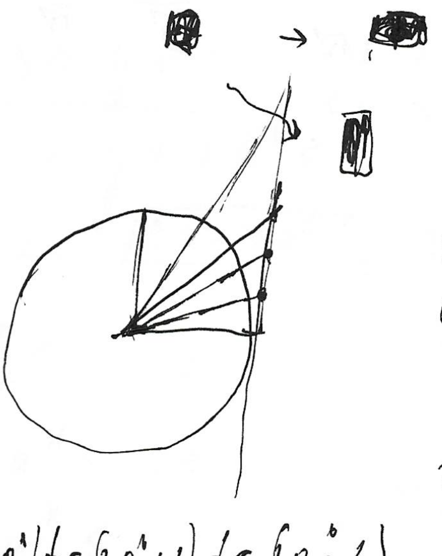
1 2 3

$6+2(2+3+6)+4(1+2+3)=$

$6+22+24=82$

$a^3+6a^2+12a=2026$

$a(a^2+6a+12)=2026$



$tg\, a+b=$

$\frac{\sin a+b}{\cos a+b}=$

$=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$

$=\frac{tg\, a+tg\, b}{1-tg\, a\, tg\, b}$

$30^\circ\ 30^\circ\ 30^\circ$

$45^\circ,\ 30^\circ\ 15^\circ$

$60^\circ\ 15^\circ\ 15^\circ$

$x(x-t)(x+v)$

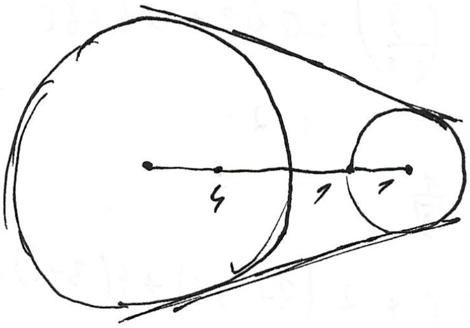
$x(x^2+(v-t)x-tv)$

$(v-t)$

$tg(30^\circ)\,tg(30^\circ+\alpha)\,tg(30^\circ-\alpha)$

$tg\,30^\circ\,\frac{tg\,30^\circ+tg\,\alpha}{1-tg\,30^\circ\,tg\,\alpha}\,\frac{tg\,30^\circ-tg\,\alpha}{1+tg\,30^\circ\,tg\,\alpha}=$

Черновик



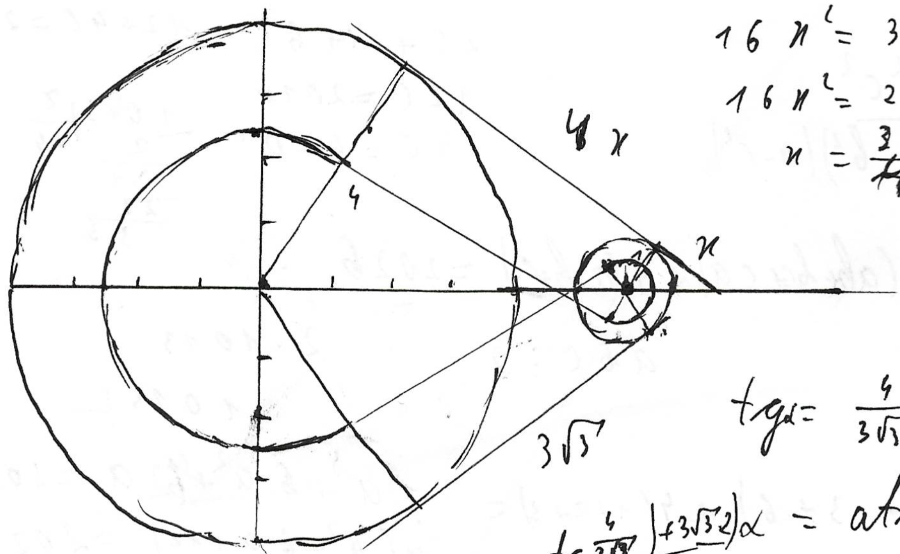
$\overline{x}$

$(4x)^2 + 3^2 = 6^2$

$16x^2 = 36 - 9$

$16x^2 = 27$

$x = \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{16}}$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\alpha = \frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\alpha = atg\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$l = 3,5(\pi + 2\,atg\frac{4}{3\sqrt{3}}) + \cancel{0,5\cdot(\pi + 2\,atg\frac{4}{3\sqrt{3}}) + 3\sqrt{3}\cdot 2)}$

$\frac{4}{3\sqrt{3}} \vee 1$

$4 < 3\sqrt{3}$

$16 < 27$

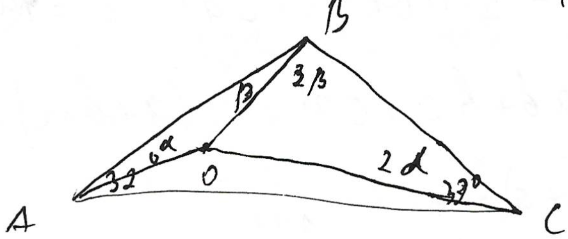
$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$l = 3(\pi + 2\,atg\frac{4}{3\sqrt{3}}) + 6\sqrt{3}$

$l = 3\pi + 6\,atg\frac{4}{3\sqrt{3}} + 6\sqrt{3}$

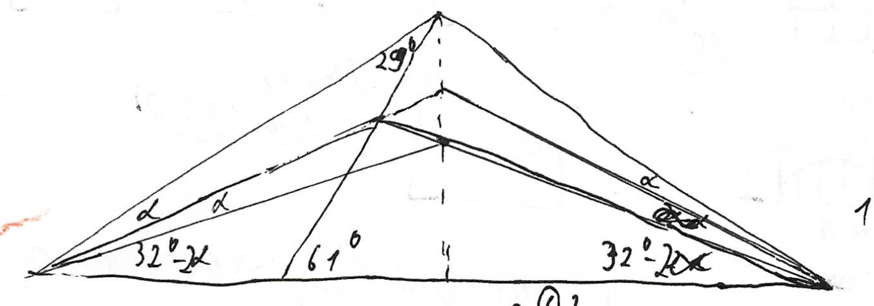
Черновик

$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -\ 64^\circ \\ \hline 116^\circ \end{array}$



$116 : 4 = 29$
$\begin{array}{r} 116 \\ -\ 8 \\ \hline 36 \end{array}$

$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 3 \\ \hline 87 \end{array}$



1

ОДЗ

$a \in (0; +\infty)$

$a \neq 1$

$113 : 13$

$a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$

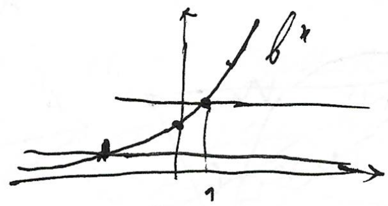
$(a^x)^2 - 3a(a^x) + 2a^2 \geq 0$ $\quad 0 < a < 1$ $\quad 123 \times 9$

$y^2 - 3ay + 2a^2 \geq 0$ $\quad 1017 : 9 = 113$ $\quad \begin{array}{r} 1230 \\ -\ 123 \\ \hline 1107 \end{array}$

$y^2 - 3ay + 2a^2 \leq 0$ $\quad \begin{array}{r} 11 \\ -\ 9 \\ \hline 27 \end{array}$

$y_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{3a \pm a}{2} = \{a; 2a\}$ $\quad 113 : 7$ $\quad \begin{array}{r} -\ 7 \\ \hline 43 \end{array}$

$y \in [a; 2a]$



$a \leq a^x \leq 2a$ $\quad a = \frac{1}{\sqrt[b]{2026}}$

$a^1 \leq a^x \leq$

$\log_b 2 = 2026$

$\left(\frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{1}{a}\right)^x \geq \frac{1}{2a}$ $\quad b^{\log_b 2} = b^{2026}$

$b \geq b^x \geq \frac{b}{2}$ $\quad \log_b b - \log_b 2 \leq x \leq 1$ $\quad 2 = b^{2026}$

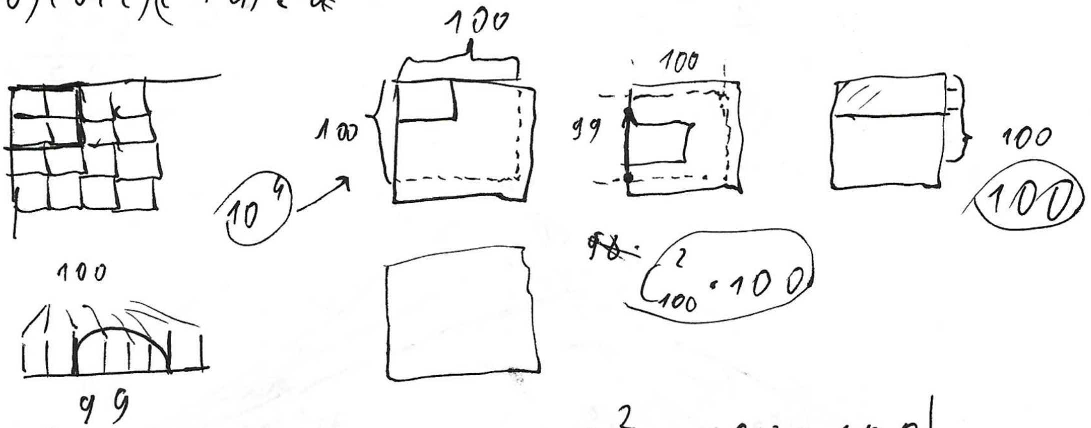
$\log_b \frac{b}{2} \leq x \leq 1$ $\quad 1 - \log_b 2 \leq x \leq 1$ $\quad b = \sqrt[2026]{2}$

Черновик

$V=abc$ $\quad S=2(ab+bc+ca)$ $\quad L=4(a+b+c)$

$abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)=2026$

$(a+b)(b+c)(c+a)=$



C^2_{100}

$4(10000+C^2_{100}\cdot 100+100)$

$9900 : 2 = 4950$

$\frac{100\cdot 99}{2}=\frac{9900}{2}=\cancel{498}$