0114837730006

11-48-37-73
(123.11)

Выход: 13:00
Приход: 13:02

+1 лист

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 КЛАСС

Место проведения МОСКВА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ЛОМОНОСОВ
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

САНДЖАКА БИЛАЛА ЭСАТОВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

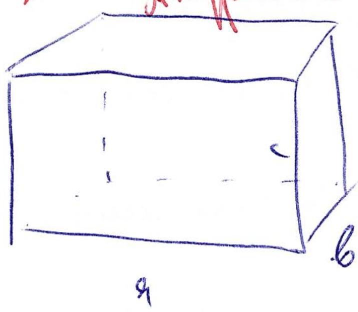
Дата
«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника

100 (Сто)

11-48-37-73 (123,11)

Черновик



$V = abc$

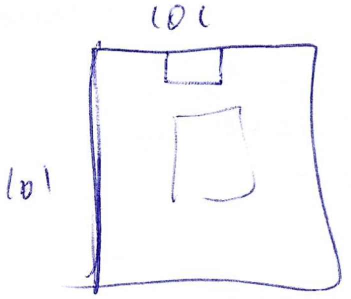
$S_1 = 2ab + 2ac + 2bc$

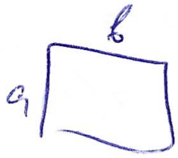
$S_2 = 4(a+b+c)$

a - число
b - число $x^3 + ax^2 + bx + c$
c - число a:4

$4(a+b+c) + abc + 2(ab+ac+bc) = 2026$

$x + y + z = 90^\circ$





2, 3, 4

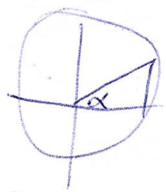
2, 3, 5

30

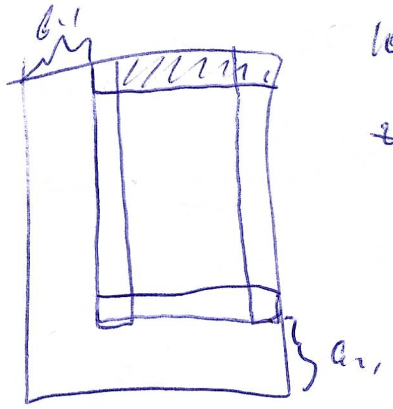
30+

$a < 101$

$b < 101$



$X = 90^\circ - (y+z)$

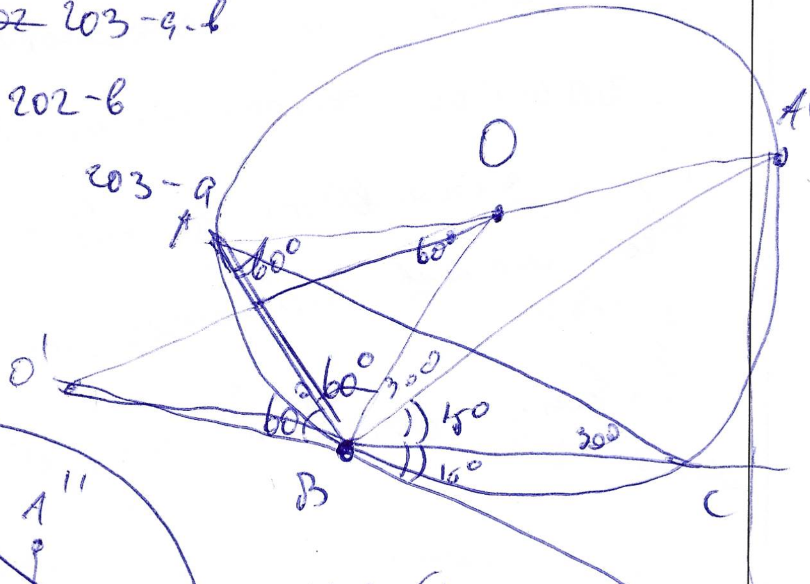


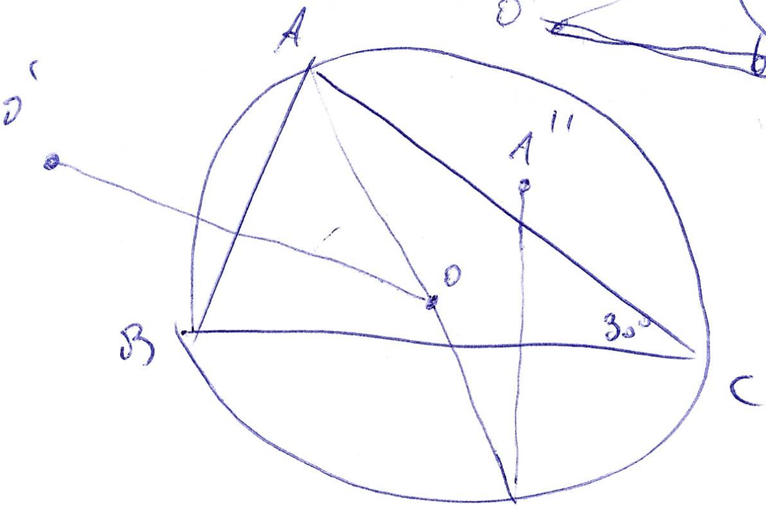
$101 - b + 1 + 101 - a + 1$ $ax^2 + bx$

~~202~~ $203 - a - b$

$202 - b$

$203 - a$





$tg\,(\cancel{y+z}\ 90^\circ - (y+z))$

$tg\ \frac{\sin(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)} = $

$= ctg\ \frac{\cos(y+z)}{\sin(y+z)}$

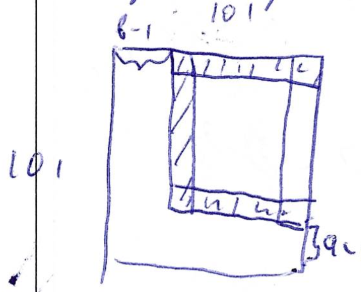
$\cos(y+z) = \frac{(\cos x \cdot \cos z - \sin x \cdot \sin z)\ \sin y \cdot \sin z}{(\sin y \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos y)(\cos y \cdot \cos z)}$

№2

Чистовик

Пусть мы хотим вырезать прямоугольник со сторонами

, где $a, b < 101$. Рассмотрим куда может попасть верхний правый угол. В заштрих. область. Т.е.



$2(102-b)+2(102-a)-4 = 404-2b-2a$ способов

Если фиксировать a и менять b, то $(404-2a)100-2(1+\ldots+100)=$

$= 40400-200a-2\cdot\frac{100\cdot101}{2} = 40400-10100-200a =$
$= 30300-200a$

Если менять a, то $30300\cdot100-200(1+\ldots+100)$ ~~$30300-200(1+\ldots+100)$~~ $=$

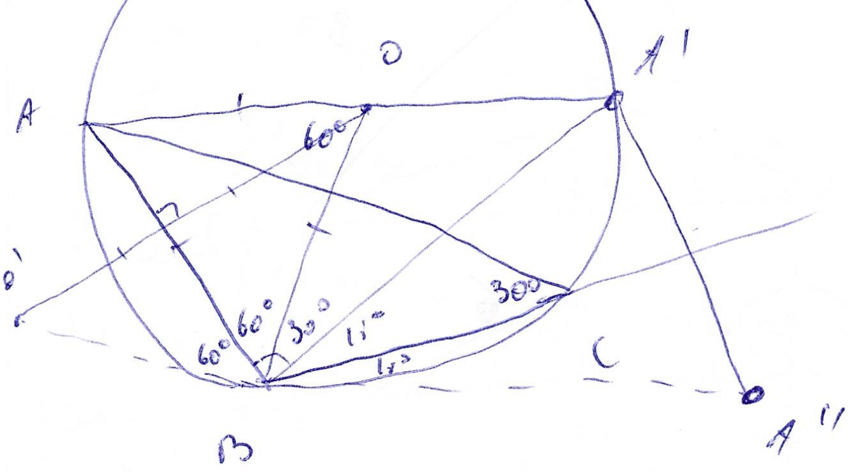
$= 3030000-100\cdot100\cdot101 = 2020000$

Пусть $a=101$, $b<101$, но каждое $b \to 2$ способа, всего 200 способов, аналогично, если $b=100$.

Ответ: 2020400 способов

№3

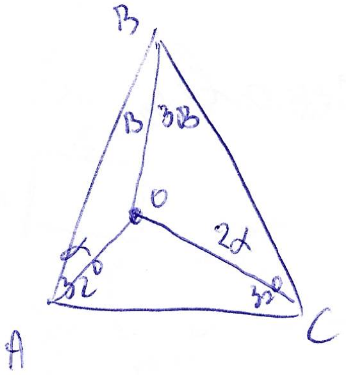
Чистовик



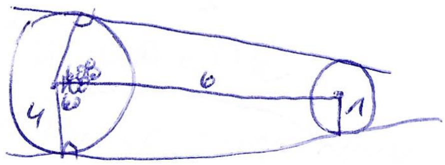
1) $\angle AOB = 60^\circ$, как центральный $\Rightarrow$, так как $\triangle AOB$ — р/б $\Rightarrow$ $\angle ABO = 60^\circ$, но $\angle ABO = \angle ABO'$ из симметрии, и так как $\angle ABA' = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр с другой стороны $\Rightarrow \angle OBA' = 30^\circ$, $\angle A'BC = \angle CBA''$ из симметрии, но $\angle O'BA'' = 180^\circ = 180^\circ + 2\angle A'BC \Rightarrow \angle A'BC = 15^\circ \Rightarrow \angle B = 105^\circ$.

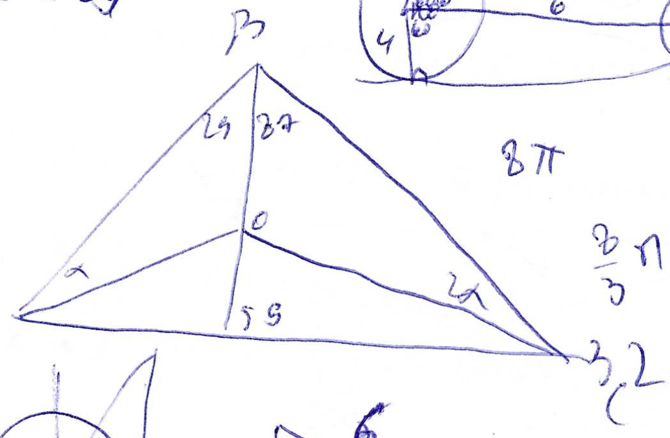
Если $\angle B$ острый, то O' и A'' в одной полуплоскости относительно BC, а значит не могут лежать с B на одной прямой. Нетрудно проверить, что работает только эта картинка.

Ответ: 105°



$\frac{116}{4} = 29$



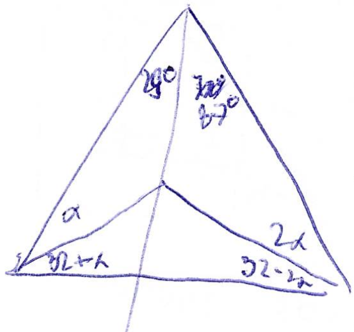


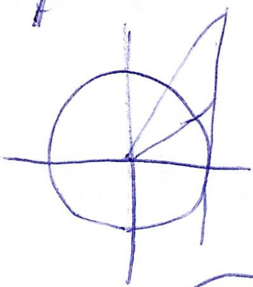
8π

$\frac{1}{3}$

$\frac{8}{3}\pi$

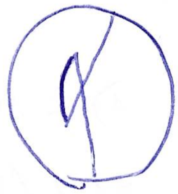
32





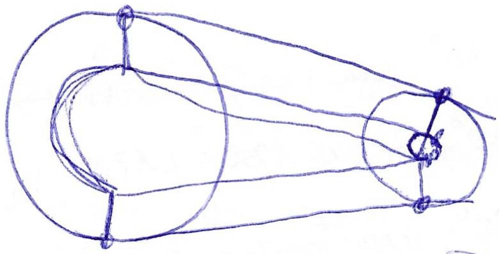
6

11 9



$a > 0$

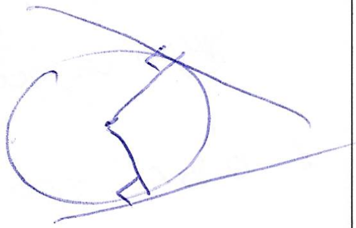
m	n	n
n		n
n	n	n



$a \geq 1$

$a \neq 1$

$a > 1: \log_{1-a} a \geq 0$ $\quad a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2 \geq 0$

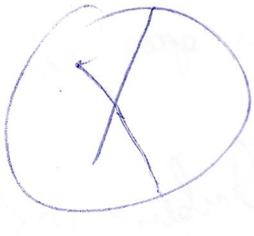


$a^{2x} - a^{x+1} - 2a^{x+1} + 2a^2$

$a^{x+1}(a^{x-1}-1) - 2a^2(a^{x-1}-1) = (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\cdot a^2 \geq 0$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2) \leq 0$

$a^{x-1} \geq 2$, тогда $\log_a 2$ $\quad x \geq \log_a 2 + 1$



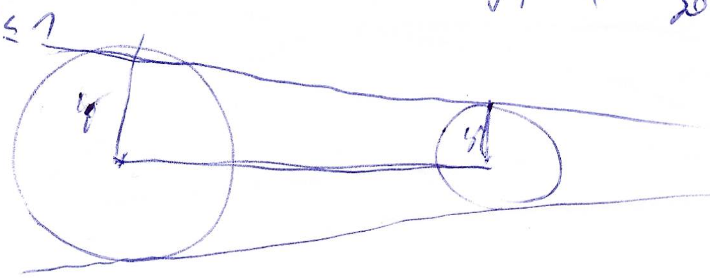
$0 < a < 1$

$1 \leq a^{x-1} \leq 2$ $\quad a^{x-1} = 2$

$1 \leq \frac{1}{a^{1-x}}$ $\quad \log_a 2 = x-1$

$x = \log_a 2 + 1$ $\quad \leq \log_a 1 + 1$

$a^{1-x} \leq 1$



$0 + 1$

№4

Чистовик

$a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2 = a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)$, заметим, что $a>0$, иначе $\log_2 a$ не определен, также $a\neq 1$.

1) $a>1$: $\log_2 a>0 \Rightarrow a^2(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0 \Rightarrow (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geq 0$

Начиная с какого-то x, $a^{x-1}-2>0 \Rightarrow$ решений бесконечно, это нам не нужно X.

2) $0<a<1$: $\log_2 a<0 \Rightarrow (a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\leq 0 \Rightarrow 1\leq a^{x-1}\leq 2$

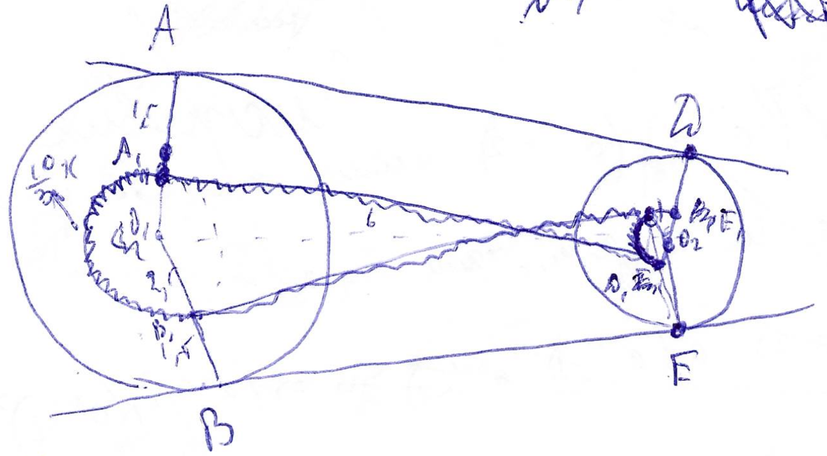
при $a<1$, a^x убывает на луче $(-\infty;0]$, т.е.

$x-1\in[\log_a 2;\log_a 1]$ или $x\in[\log_a 2+1;1]$, тогда

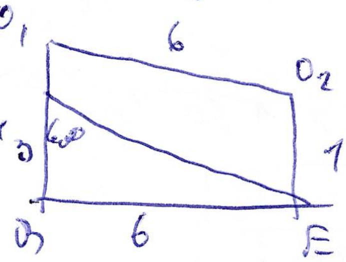
$\log_a 2=-2026 \Rightarrow$ $a=\frac{1}{\sqrt[2026]{2}}$, т.к. $0<a<1$

№7 ~~Черновик~~

Чистовик

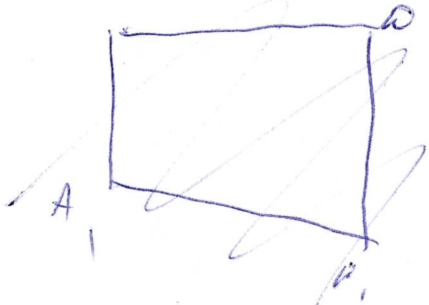


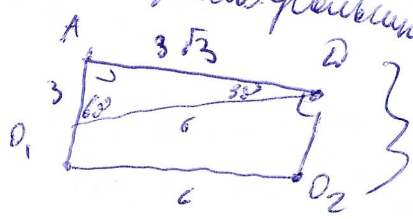
Путь заштрихованное — дорожки правы.



Перенесем параллельно O_1O_2 на 1 вниз и заметим, что получился треугольник с углом $60^\circ \Rightarrow \angle BO_1O_2 = 60^\circ \Rightarrow BO_1A = 120^\circ$

Длина окр-ти с $(O_1; r=2,5)$: $\pi \cdot 2,5 \cdot 2 = 5\pi$, но мы должны убрать одну треть $\Rightarrow$ получим $\frac{10}{3}\pi$. Во второй окр-ти наоборот, оставляем только треть $\frac{2\pi \cdot 0,5}{3} = \frac{\pi}{3}$, также $AD = A_1D_1$ и $BE = B_1E_1$, т.к. ~~где~~ ADD_1A_1, BB_1E_1E — прямоугольники.





$AD = 3\sqrt{3} = BE$.

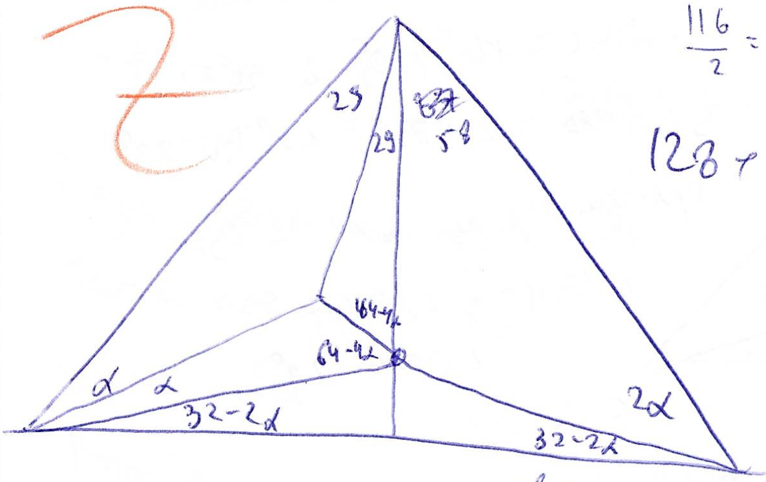
$\frown A_1B_1 + AD + \frown D_1E_1 + BE = \boxed{\frac{11}{3}\pi + 6\sqrt{3}}$

Ответ:

Черновик

$\frac{116}{2} = 58$

$128 + 58 = 186^\circ$



abc
012

№1

$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) + 8 = 2026$

a - нечетн
b - чет
c - чет

$a \vdots 4$
$b \vdots 2$
$c \vdots 2$

$2034 \quad 2026 = 1013 \cdot 2$

$(1-a)(1-b)(1-c)$

$(2-a)(2-b)(2-c)$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034$

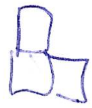
$1017 : 3 = 339$

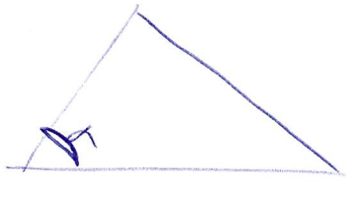
$2034 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 113$

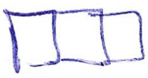
$113 \cdot 18 = 904 + 113 = 2034$

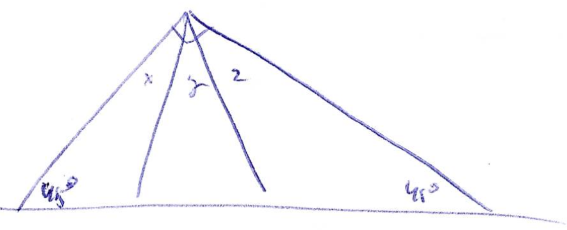
$tg\,x \cdot tg\,y + tg\,z$

$\frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$

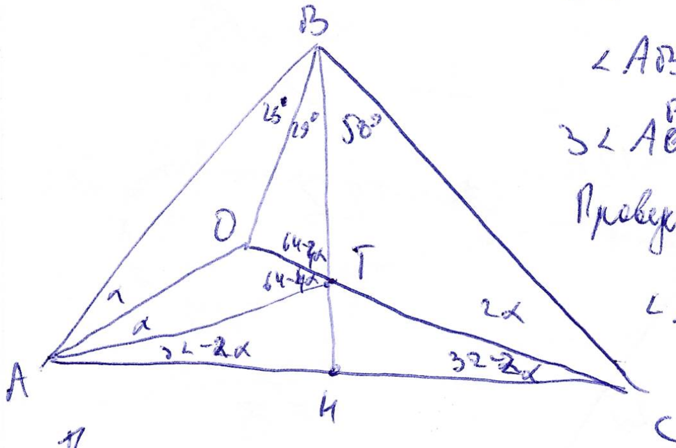








№6 Чистовик



$\angle ABC = \cancel{116}\ 180^\circ - 2\cdot 32^\circ = 116^\circ$

$3\angle A\cancel{OB}BO = \angle OBC = \angle ABO = 29^\circ$

Проведём сер пер к AC — BH.

$\angle ABH = \frac{1}{2}\angle ABC = 58 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OBH = 29^\circ$.

Пусть $\angle BAO = \alpha$, а $\angle BCO = 2\alpha$; ~~проводя~~ отложим от AO прямую под углом α, она пересечёт CO на BH из симметрии. ~~В~~ Пусть это точка T. В ΔABT ~~бис-са~~ O — точка пересечения бис-с $\Rightarrow$ CO — тоже бис-са.

$\angle ATO = \angle TAH + \angle TCH = 64^\circ - 4\alpha$, $\angle OTB = \angle ATO = 64^\circ - 4\alpha \Rightarrow 186^\circ - 6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 1^\circ$. $\angle BOA = 150^\circ$.

Ответ: в 150 раз

№1 Чистовик

Пусть ширина, высота и длина призмы — a, b, c.

Тогда объем призмы: abc

Полная площадь: $2(ab+bc+ac)$

Сумма ребер: $4(a+b+c)$

~~Вто~~ Тогда: $abc+2(ab+bc+ac)+4(a+b+c)\underbrace{+8} = 2026\underbrace{+8} = 2034$

Или $(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 113$

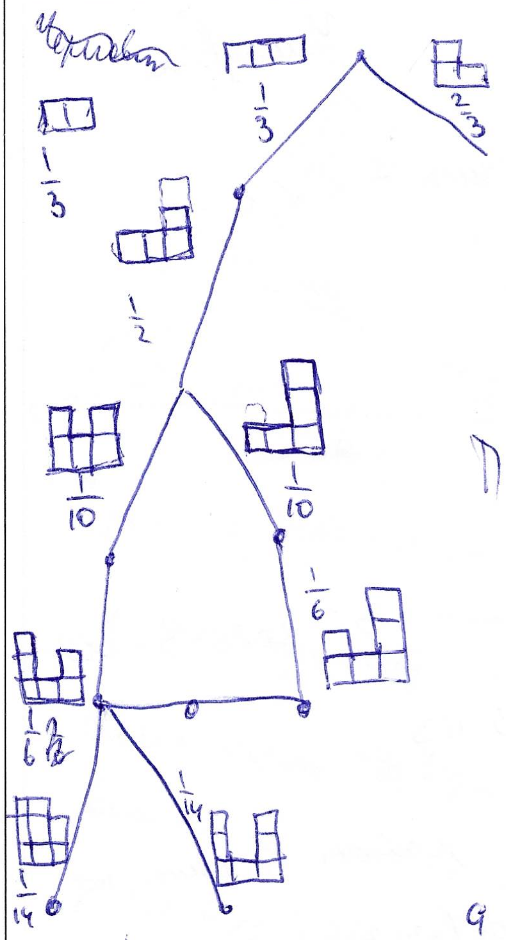
$a+2,\ b+2,\ c+2 \geq 3$, т.к. эти числа равны в каком-то порядке либо $(\cancel{2}\ 3, 6, 113)$, либо $(3, 3, 226)$

приводит два одинаковых, противоречие.

Значит, $\{a, b, c\} = \{1, 4, 111\} \Rightarrow$

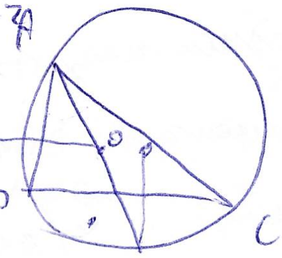
$\Rightarrow abc = 4\cdot 111 = 444$.

Ответ: 444

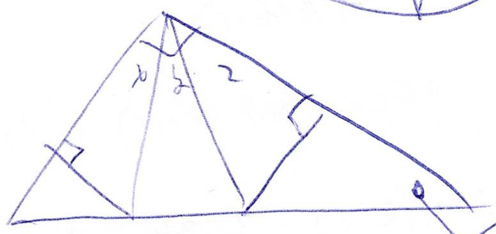


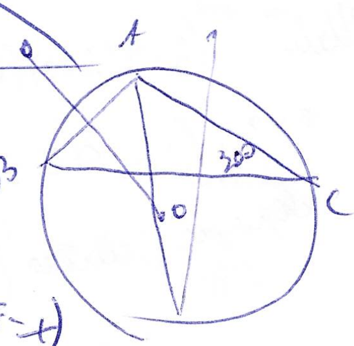
Чиловки

$$\frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z}$$



П



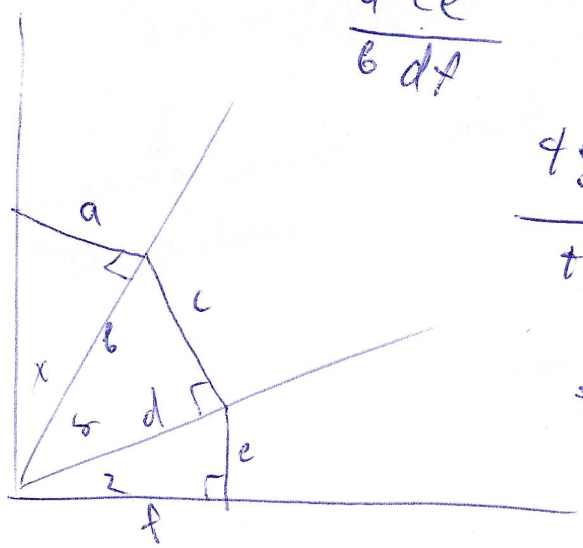


$tg\, x \cdot tg\, 5$

$tg\, x \cdot tg(5 - x)$

$$\frac{a\, c\, e}{b\, d\, f}$$

$tg' x$



$$\frac{tg\, x + tg\, y}{tg(x+y)}$$

$$\frac{-tg^2 x + tg\, y}{tg\, x + tg^2 x \cdot tg\, y}$$

~~tg x~~

$tg\, 6 -$

$tg($

$tg\, x \cdot tg\, y \cdot tg(90° - x$

~~tg(~~

$tg(x) \cdot tg(5 - x)$

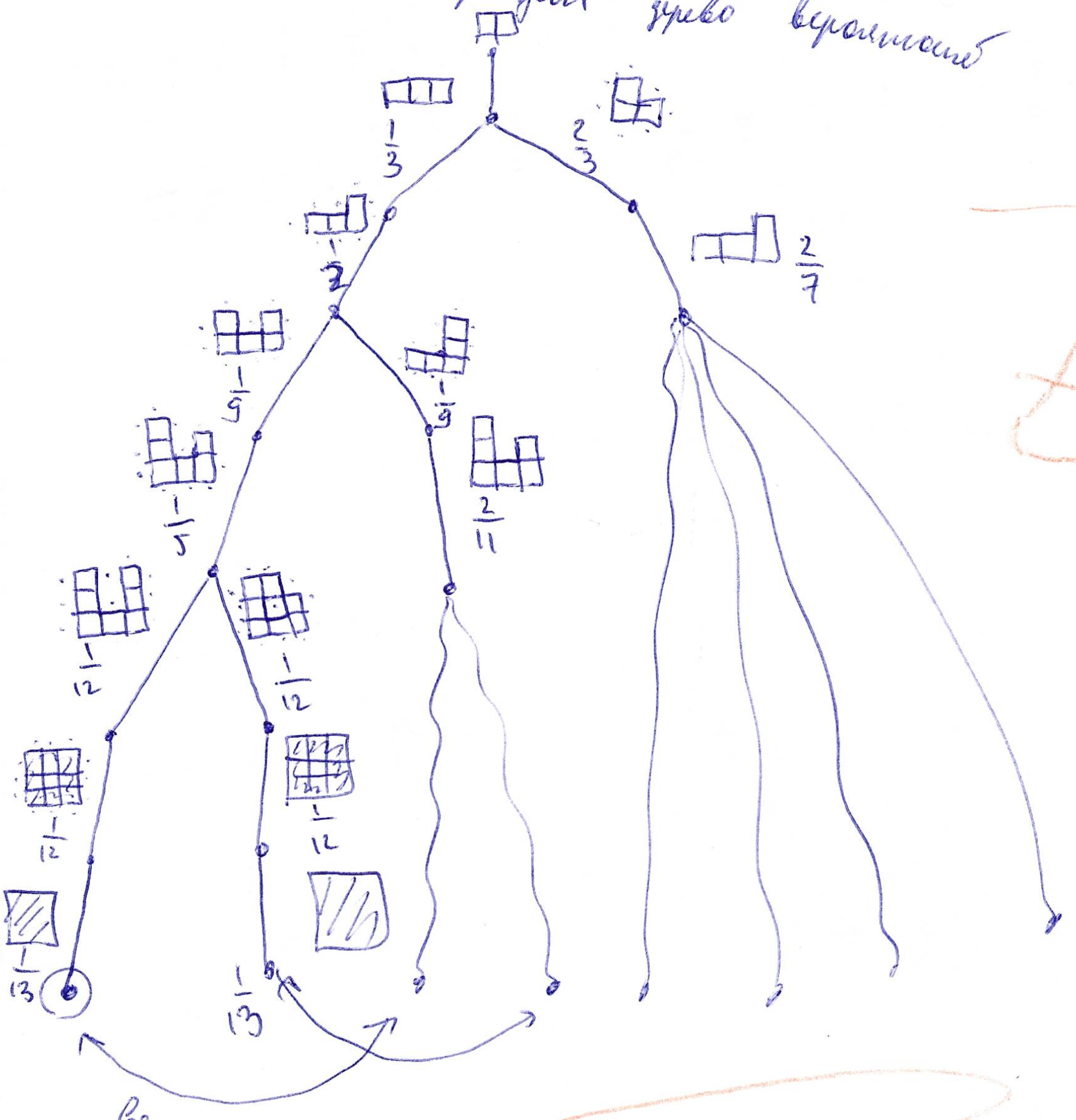
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$ctg\, x = -tg\, x$

$$\frac{tg\, 5 - tg\, x}{1 + tg\, x \cdot tg\, 5} \cdot tg\, 6$$

№8 Иштовин

Первое будем называть фигуру хорошей, если из нее можно сделать квадрат, причем неважно где будет в центре. Как бы ни ходил Казимир, первым ходом может ее получить хорошую фигуру. Нарисуем дерево вероятностей



Ветки одинаковы

Как строить дерево вариантов? Если мы на какой-то вершине, то мы смотрим какие хорошие фигуры что можем получить и считаем вер-ть их получения.

Посчитаем ответ ↓

№8 (продолжение)

Ответ: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}\cdot$

$\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+$

$+\cancel{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+$

$+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}=$

$+$

11-48-37-73 (123.11)

Идея решения: $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ №5 Чистовик.

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. Же Нам достаточно

Найти максимум $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(c-\alpha)$, при фиксированном c.

Это можно сделать, взяв производную и найдя ее нуль.

Тогда получим выражение от c, ~~како~~ максимум которого нужно найти.