0 156012 220001

15-60-12-22
(124.4)

Время выхода: 12:53.
Время возвр: 12:59.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

дишифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Свищевой Софии Вячеславовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

100 (сто) Анулировать

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

Чистовик

15-60-12-22 (124.4)

Задача 1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

$\sin x \geq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$6\cdot(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \quad |:2$

$3 - 3tg^2x = 8\sin^2x$

$3\cdot(1-tg^2x) = 8\sin^2x \quad |:3$

$1 - tg^2x = \frac{8}{3}\sin^2 x$

$s^2 + c^2 = 1$

$-tg^2x = \frac{8}{3}\sin^2x - 1$

$-tg^2x = \frac{8}{3}\sin^2x - (\sin^2x + \cos^2x)$ $\quad \frac{8}{3} - \frac{3}{3}$

$-tg^2x = \frac{8}{3}\sin^2x - \sin^2x - \cos^2x$

$-tg^2x = \frac{5}{3}\sin^2x - \cos^2x$

$-\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x} = \frac{5}{3}\sin^2x - \cos^2x \quad |: \cos^2x \neq 0$

$\cancel{\frac{5}{3}\sin^2x = -\cos^2x - \frac{1}{\cos^2x}}$

$-\frac{1}{\cos^2x} + 1 = \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\cos^2x \Rightarrow -\frac{1}{\cos^2x} = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\cos^2x$

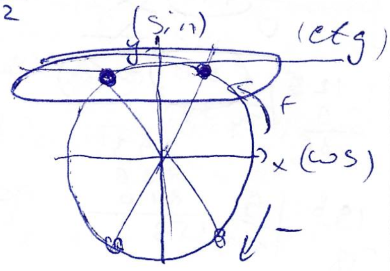
$\cos^2x = u^2 \quad -\frac{1}{u^2} = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}u^2$

$8u^4 - 2u^2 - 3 = 0$

$p = u^2 \quad p_{1,2} = \frac{2\pm10}{16} \quad p_1 < 0$ не подх

$p_2 = \frac{3}{4}$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

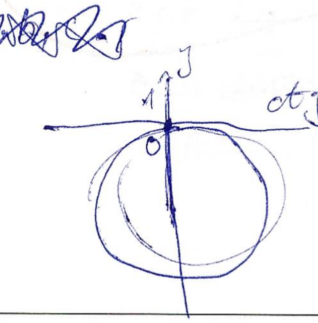


~~ответ~~:

ответ:

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$



~~Т. Ферма~~

~~для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых ненулевых числах a, b, c~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Дано: Задача 2 ~~черновик~~ Чистовик

n n n n n ... n n n n n - A множество

$A \in N$ nnn - число nn - число все эти числа натуральные

~~n+n...+n~~ числа · A : $\underbrace{n+n\ldots+n}_{\text{сумма цифр в числе}} = B \vdots 9$ B - целое число

Найти: n n n ← все трехзнач. числа вход. в A

все трёхзначные числа, которые входят в множество A и расположить их в порядке возрастания.

сумма 2 = ? ; сумма 5 = ? ; послед сумма = ?

~~Если сумма цифр входящая в множество A~~

Если сумму цифр числа, которое находится в множестве A поделить и получить число кратное 9, то нам нужны все числа кратные 9 => $A \vdots 9$ по признаку делим на 9 => $S \vdots 9$

$\underbrace{n+b}_{\vdots 9}$

Всего цифр ~~вход~~ в трёхзначном числе 1000-1 = 999

~~18 27 36 45 54 63 72 81 99~~

~~117 126 13_ 144 153 162 171 189 198~~

~~В каждом десятке есть 1 число которое сумма цифр которого кратна 9 =>~~

~~=> всего таких чисел чья сумма будет кратна 9 = 81~~

Пусть: n = 9m · S S - сумм. цифр

$\overline{999} \vdots 9$ ✓

198 | 9
-9 | 1
28

117 | 9
-9 | 13
27
-27
0

162; 243; 324; 405; 486; ~~567~~; 648; ~~729~~; 810; ~~891~~; 972

126 | 9
-9 | 14
36

198 | 9
-18 | 22
18
18

243
+486
810
1539

сумма второго = 126 = 1+2+6 = 9

сумма пятого = 153 = 1+5+3 = 9

~~сумма последнего = 999 = 9+9+9 = 27~~

~~Ответ: 117 ...... 999 от 117 до 999~~

~~сумма второго = 9, сумма пятого = 9~~

~~сумма последнего = 27~~

Ответ: 1539

15-60-12-22
(124.4)

№8 $8^{x^2}\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

Чистовик

$a - 2x > 0$

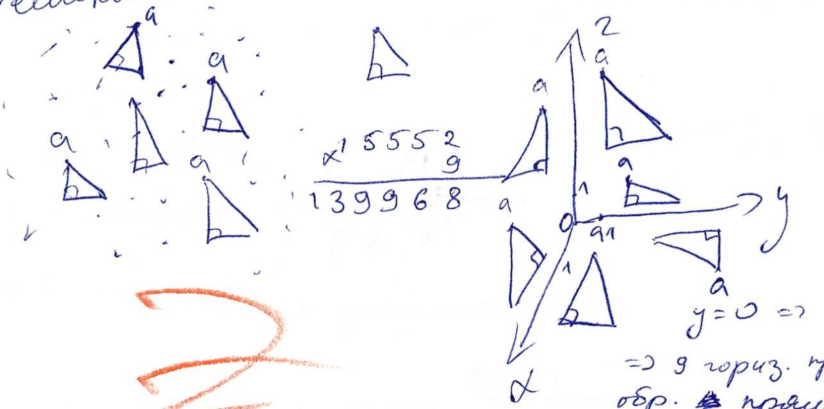
$x > 0$

Задача 3

a – точка в пространстве

Дано:
F – множество точек в пространстве
a (x; y;) с их координаты целые числа не превосходящие по модулю ч.
Найти: кол-во прямоуг. Δ все вершины которых ∈ F, каждый из катетов ∥ (паралелен) одной из трех координатных осей.

решение:



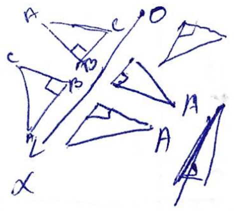
$$\begin{array}{r} 15552 \\ \times\ \ \ \ 9 \\ \hline 139968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 5184 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 15552 \end{array}$$

=> 9 гориз. прям и 9 верт. прямых обр. Δ прямоуг. В каждой мах. их будет 4

Нам нужны треугольники у которых выполняется сразу два ~~решения~~ условия: вершина ∈ F, катет ∥ Ox, Oy, Oz.

Если взяв Δ связанные с ~~один треугольник~~



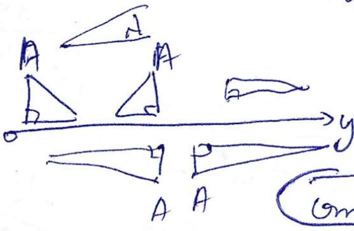
A ∈ F
A – вершина

~~То есть у нас~~ с Ox ~~связано~~,

посит как минимум 8-треугольников у которых ∥ кат. и A ∈ F

$(C_9^2) = \frac{9!}{2!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9}{1\cdot 2} = 36$

$1296 \cdot 4 = 5184 \cdot 3 = 15552$

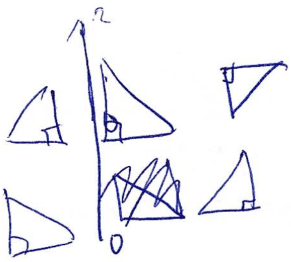


~~по оси Oy~~
~~тут тоже 8 треугольника~~
~~A – вершина ∈ F~~

Ответ: 139968

Задача 3 Чистовик

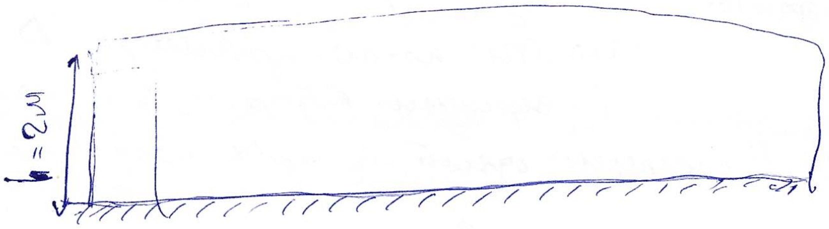
на оси Oz тоже и треугольнике с 1 стороны и с другой

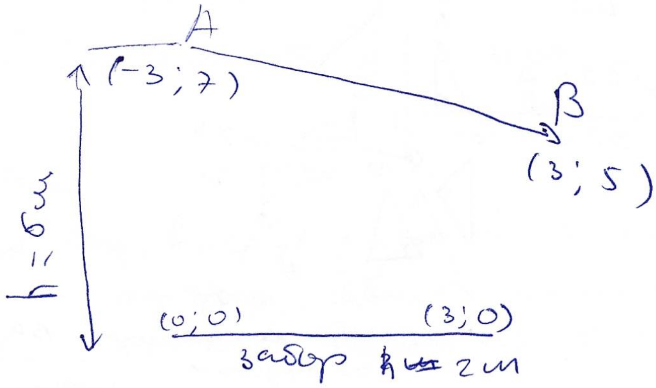


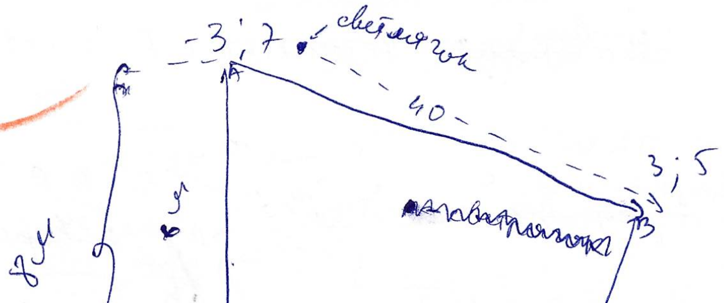
$8 \cdot 3 = 27$

Ответ: 27

Задача 6:







$|\vec{AB}| = \sqrt{(3 \cdot 3)^2 + (7 \cdot 5)^2} = \sqrt{81 + 35^2} = \sqrt{81} + \sqrt{35^2} =$

$= 9 + 35 = \cancel{40}\ 44$ – длина вектора AB

$\sqrt{(3 \cdot 3)^2 + (7 \cdot 5)^2} = \sqrt{(9)^2} + \sqrt{35^2} = \sqrt{81} + 35 =$

$= 9 + 35 = 44$

35×35: 175, 125, 1325

$15 \times 6 = 90$

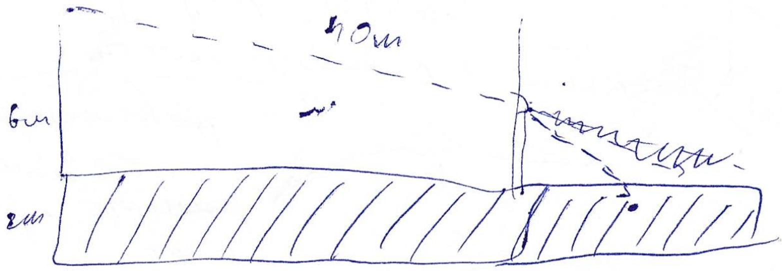
15×8: 120, −15, 105, −15

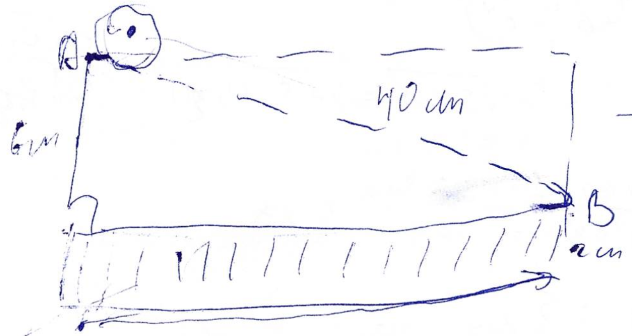
15-60-12-22 (124.4)

~~S площади фигуры, кот~~

~~Чистовик~~
~~Черновик~~
Чистовик - ?

S площади затененности пустыря.





$1600 - 36 = 1564$

$38 \cdot 38 = 1444$

Можно построить путь светлячка до забора, тогда получится прямоугольный треугольник

$39 \cdot 39 = 1521$

то можно посчитать длину вектора $\overrightarrow{AB} = 49$(м). мы узнали путь светлячка => 6^2, 49, $\sqrt{1564}$

$44 \cdot 44 = 1936$

$\sqrt{1900} = 2\sqrt{475}$ – длина забора

$1900 : 4 = 475$

S забора $= 2\sqrt{475} \cdot 2 = 4\sqrt{475}$

S всего пустыря $= 6 \cdot 2\sqrt{475} = 12\sqrt{475}$

S затененности пустыря =

$= 12\sqrt{475} - 4\sqrt{475} = 8\sqrt{475}$

$1936 - 36 = 1900$

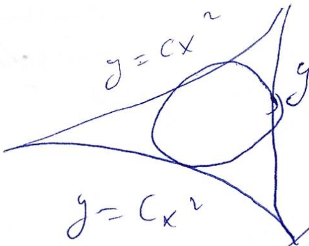
Ответ: $8\sqrt{475}$

 дешифр

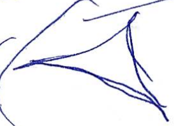
Задача 5

~~Листовик~~ Черновик

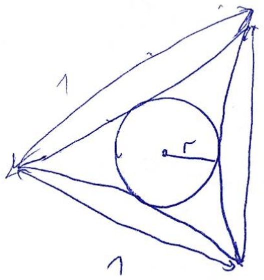
Дано:



Найти: радиус вписанной в Δ окружности



равносторонний симметричный треугольник.



$r = \sqrt{p\cdot(a^2+b^2+c^2)} =$

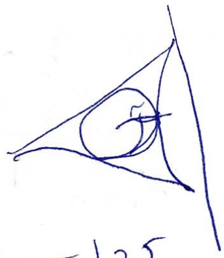
$= \sqrt{1{,}75\cdot 3} = \sqrt{5{,}25} = \sqrt{25\cdot 0{,}21} = 5\sqrt{0{,}21}$

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}75$

$1{,}75 \cdot 3 = 5{,}25$

$\times\, 1{,}75$, 3, $5{,}25$

$5{,}25 : 5 = 1{,}05$; -5, 25

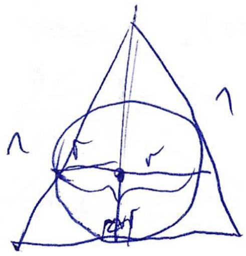


52, 25, 27

52, −50, 25

$1{,}05 : 5 = 0{,}21$; −0, 10, −10, 05, −5

$5{,}25 : 25 = 0{,}21$; −0, 52, −50, 25, −25, 0



r вписан. впр. Δ = по формуле r =

ответ: $5\sqrt{0{,}21}$

Задача 7

черновик

Дано: $y = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{Z}$

$y = -\frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} y = 1/2\, x^2 \\ y = -1/2\, x^2 + 1 + c \end{cases}$ $\quad 1/2\, x^2 = -1/2\, x^2 + 1 + c$

$\begin{cases} y = 1/2\, x^2 + 1 \\ y = -1/2\, x^2 + c \end{cases}$ $\quad 1/2\, x^2 + 1 = -1/2\, x^2 + c$

$x^2 = c - 1 \quad x_2 = \sqrt{c-1}$

$S_{наиб.}$ $\begin{cases} y = 1/2\, x^2 \\ y = 1 - 1/2\, x^2 \end{cases}$ $\quad 1/2\, x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad x^2 = 1 \quad \pm 1$

$S_4 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2 = 1$ диагонали $\perp$-ны

$x^2 = c + 1 \quad x_1 = \sqrt{c+1}$

~~[illegible]~~

$x_1 - x_2 = \frac{(\sqrt{c+1} - \sqrt{c-1})\cdot(\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1})}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}} = \frac{2}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}}$ – функ. убыв.

Пусть это t

значит $\boxed{S_{max} = 1}$

Задача 8

$\overset{>0}{8x^2} \log_a x - \log_x (a - 2x) \le 0$

a – ?

реш: полуинтервал

ОДЗ: $a > 0$, $x > 0$, $a \ne 1$, $x \ne 1$

$8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \le 0$ при $t > 0$

~~$8x^2 \cdot \log_a x$~~ > 0 $\quad 8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \ge$, при $t < 0$

$f(t) = 8a^{2t}t^2 - 2a^t t - 1 \qquad u = a^t \cdot t$

~~$\log_x(a - 2x) \le 0$~~ $|:-1$

$f(u) = 8u^2 - 2u - 1 \quad f(u) = 8(u - \frac{1}{2})\cdot(u + \frac{1}{4}) \Rightarrow$

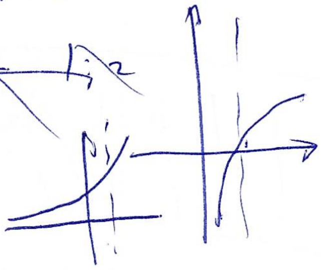
~~$\log_x (a - 2x) \ge 0$~~

$\Rightarrow f(u) = (2u-1)\cdot(4u+1) \qquad a^t \cdot t \nearrow (0;\infty)$

$(-\infty, 0)$ min в $-\frac{1}{e\ln a} \Rightarrow -\frac{1}{e\ln a}$ $\quad a^t \cdot t = \frac{1}{2}$

$\exists!$ корень $t > 0$

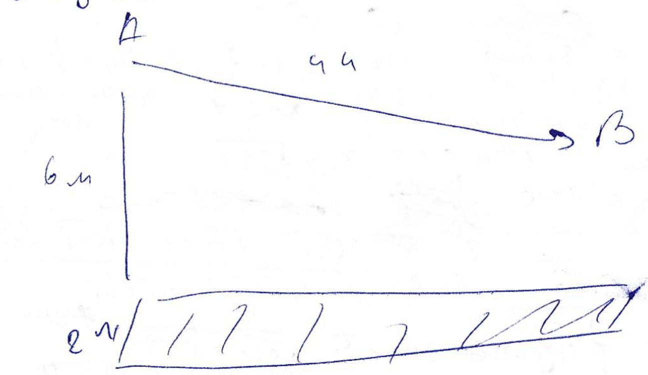
$a^t t = -\frac{1}{4} \quad e\ln a = 4 \quad \exists!$ корень



Ответ: $a = e^{4/e}$

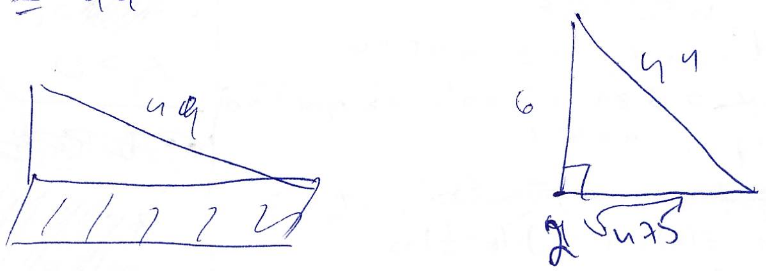
~~Будет:~~

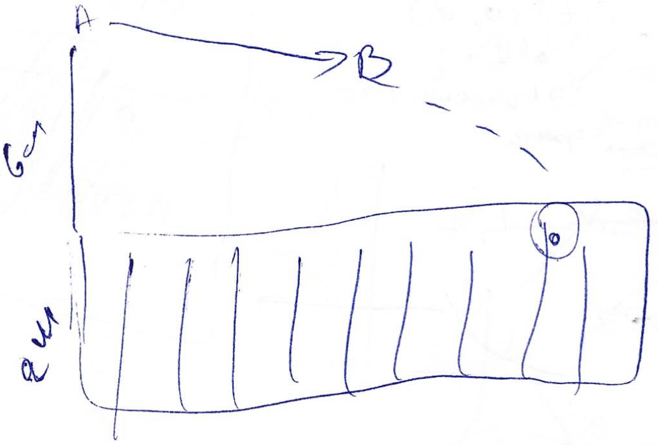
Задача 6



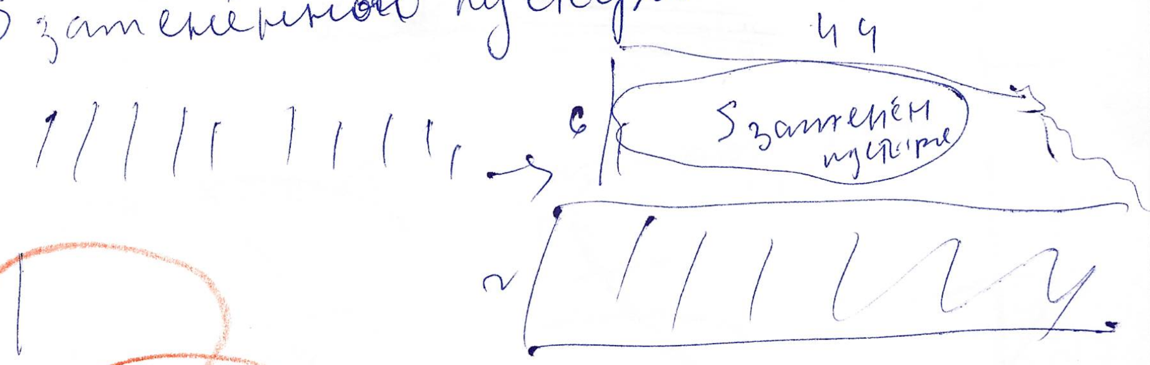
длина вектора $|AB| = \sqrt{81} + \sqrt{35^2} =$

$= 44$





S затенённого пузыря = ?



Задача 4 чистовик

Дано:

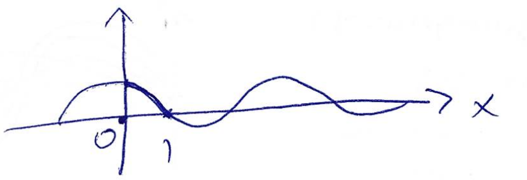
$y = \sin k\pi x$

$k \in \{13; 15; 17\}$

$\boxed{0 \le x \le 1}$

$\boxed{-1 \le y \le 1}$

sin x

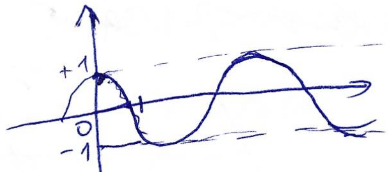


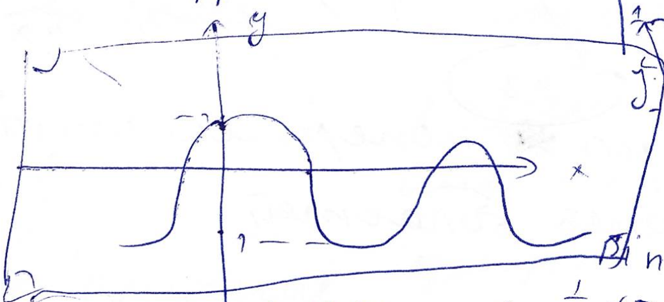
$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$2\cos(14\pi x)\sin(-\pi x) = 0$

$14x = \frac{1}{2} + \pi$ $\quad x = 0, 1$

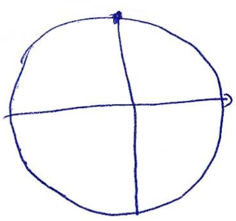
$x = \frac{\frac{1}{2} + \pi}{14} \Rightarrow 14$





sin x

sin

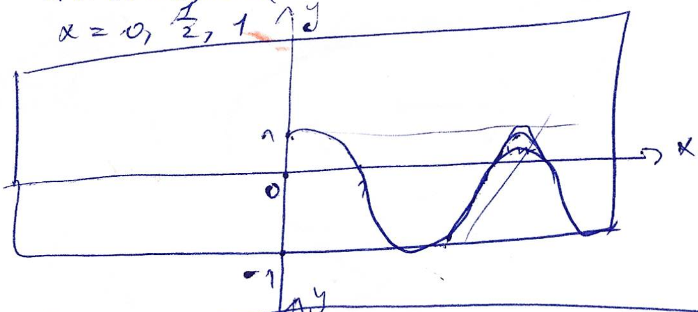


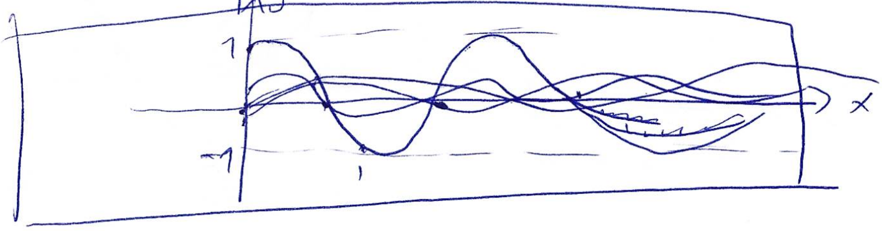
$\sin 13\pi x = \sin 17\pi x$

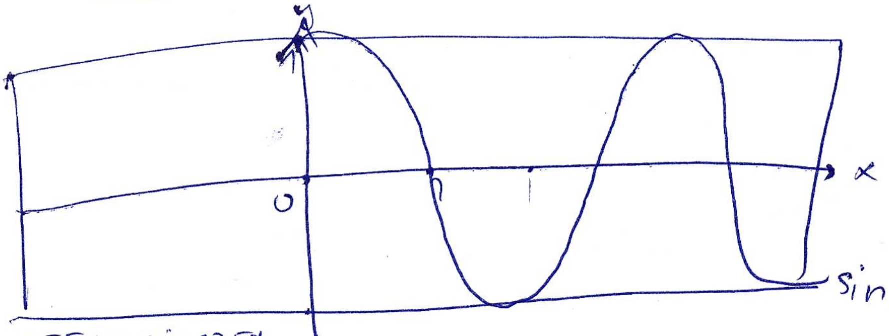
$\sin(2\pi x)\cos(15\pi x) = 0$

$x = 0, \frac{1}{2}, 1$

$x = \frac{\frac{1}{2} + \pi}{15} \Rightarrow 15$







$\sin k\pi x$

$\sin 15\pi x = \sin 17\pi x$

$\sin \pi x \cos 16\pi x = 0$

$x = 0, 1$ $\quad x = \frac{\frac{1}{2} + \pi}{16}$ $\quad \underline{16}$

$\sin 13\pi x$ $\quad \sin 17\pi x$

$\sin 15\pi x$

Если $\sin k\pi x = 1$ или -1 $x = \frac{1+4m}{2k}$ $x = \frac{4m-1}{2k}$ [illegible]

$k\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ $k\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ $k = 13 \Rightarrow 13$ $k=17 \Rightarrow 17$ $14+15+16 = 45$

$k = 15 \Rightarrow 15$

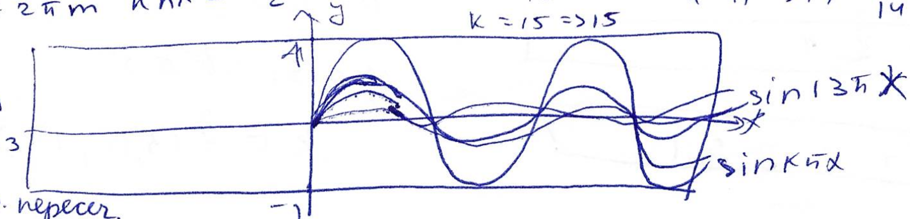
$y = -1 \Rightarrow 21$

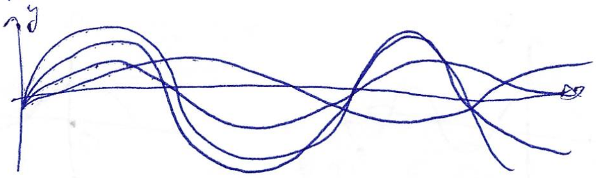
$y = +1 \Rightarrow 23$

+45 внутр. пересеч.

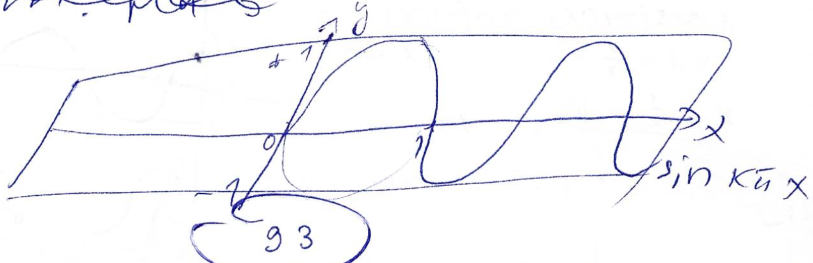
Всего суммарно 93

ответ: 93





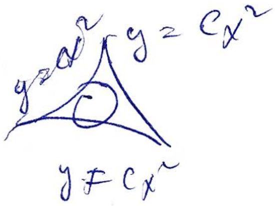
~~ответ: 1145~~

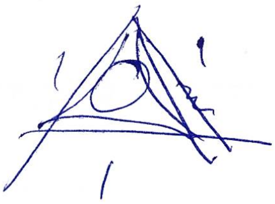


Ответ: на ~~[illegible]~~ непересекающихся ~~[illegible]~~ областей

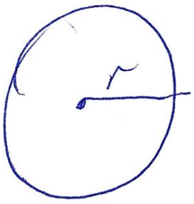
Задача 5 черновик

дано



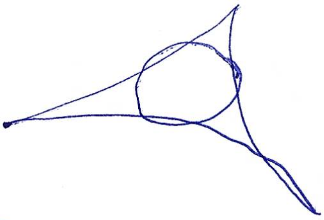


найти:



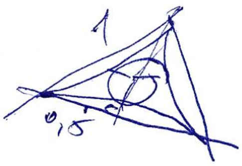
$r = ?$ впис. окр.

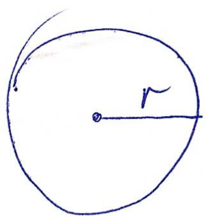
р



треугольник
с нулевыми углами
равносторонний
симметричный
треугольник

решение





$r = \sqrt{p}.$