0 693101 790002

69-31-01-79

(122.7)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сейфутдинова Айрата Рафаэлевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

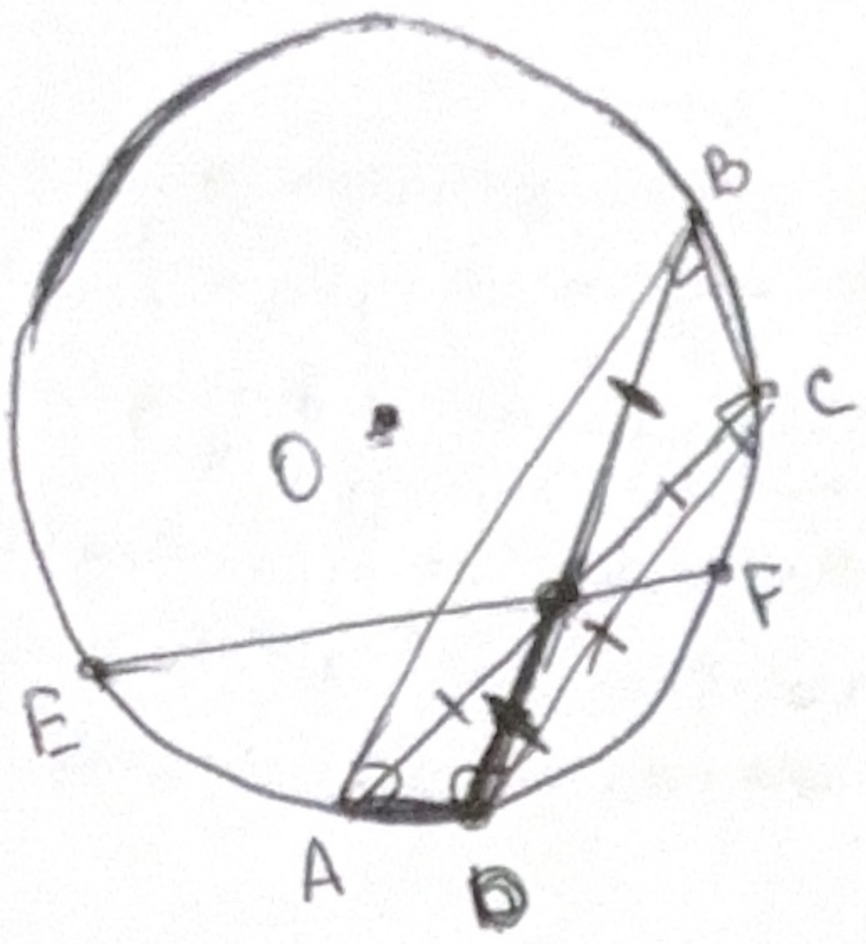
Подпись участника

Сейф

90 (Девяносто)

69-31-01-79
(122.7)

Черновик 1



$XO^2-25=-AX^2=-DX^2=-XE\cdot XF$.

$25-XO^2=AX^2=DX^2=XE\cdot XF$

$$\begin{array}{r} \times\, 81 \\ 81 \\ \hline 81 \\ +\,648 \\ \hline 6561 \end{array}$$

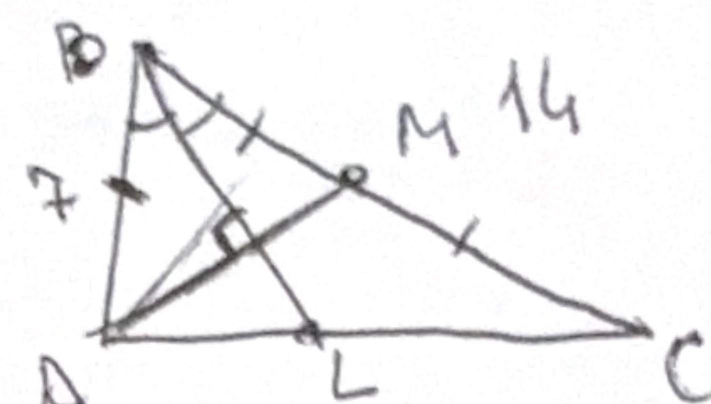
$1^2=11^2$

$1=n$

$1000^2\le n^2<10000^2$

$10^6\le n^2<10^8$

$\underbrace{1000000}_{4}\le n^2<100000000$



$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$.

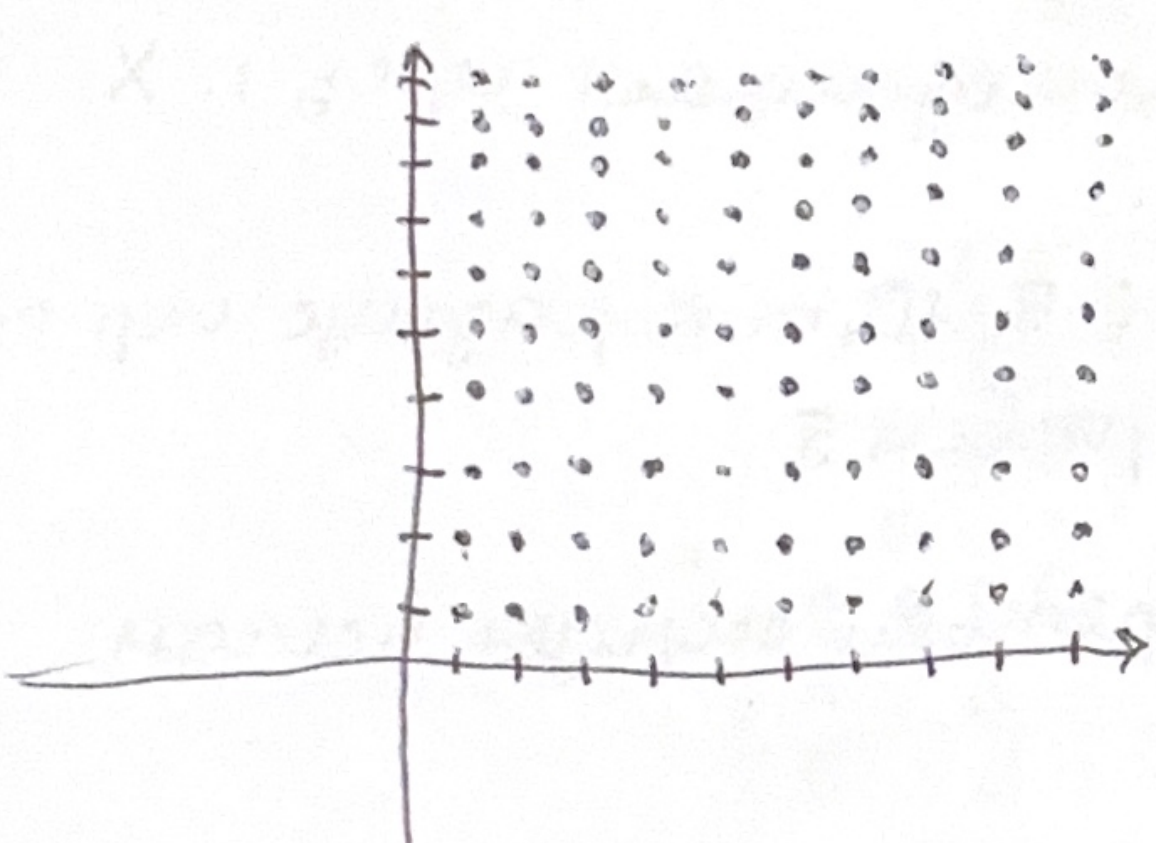
$\overline{abcd}^2=(1000a+100b+10c+d)^2=1000000a^2+10000b^2+100c^2+d^2+$

$+200000ab+20000ac+2000ad+2000bc+200d+20cd=$

$=(1000a+100b+10c+d)\cdot 1000+x$.

1000 $1000^2=1000000$

$4\cdot1\cdot1\cdot=4$.



$10\cdot10=100$

$100\cdot9\cdot9$.

$6\cdot2\cdot1$

$a^2\underset{10}{\equiv}$ $3<\sqrt{10^7}<4$

$$\begin{array}{r} \times\, abcd \\ abcd \\ \hline \end{array}$$

$a\,b\,c\,d\ldots$

$5000^2=(5\cdot10^3)^2=$

$=25\cdot10^6=25000000$

$16000000=4000^2=$

$=16\cdot10^6$

$9000000=3000^2=$

$=9\cdot10^6$

$10000000=10\cdot10^6$

$\sqrt{10^7}\cdot10^3$

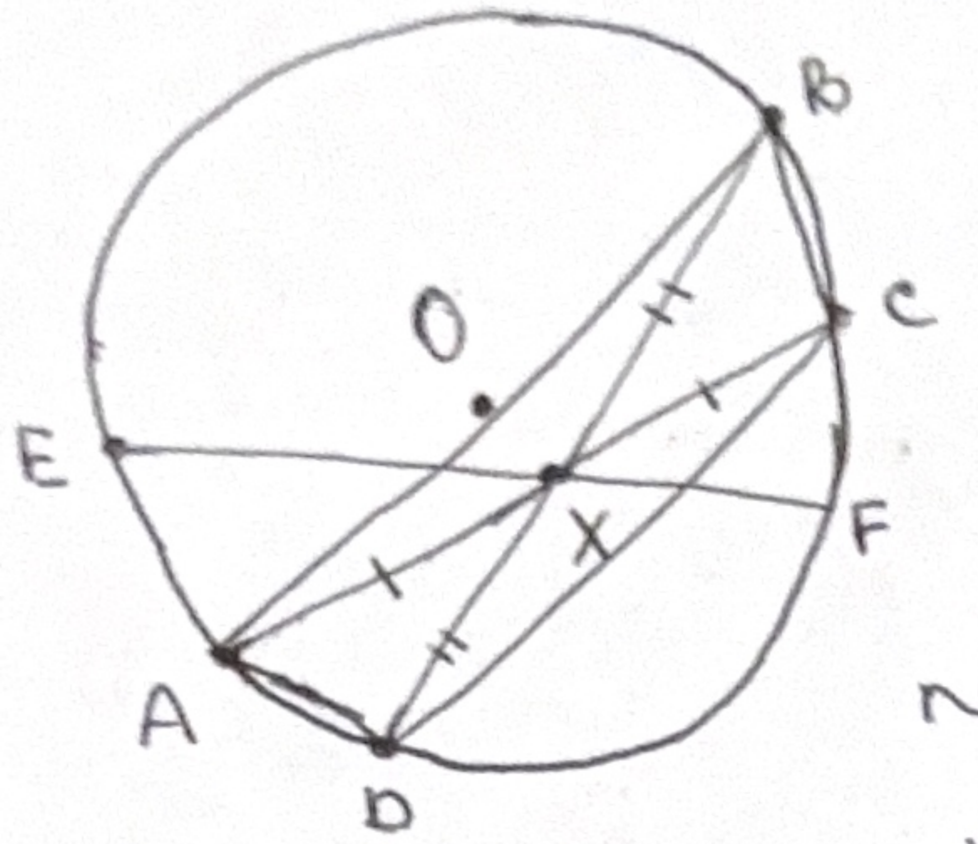
$2b\underset{10}{\equiv}b$

$a\equiv0,1,5,6$

2a	a	a^2	mod 10.	
0	0	0	0	— V
2	1	1	1	— V
4	2	4	4	— X
6	3	9	9	— X
8	4	16	6	— X
10	5	25	5	— V
12	6	36	6	— V
14	7	49	9	— X
~~16~~	~~8~~	64	4	— X
~~18~~	9	81	1	— X

Чистовик 1

№1.



1) Пусть все эти хорды пересекаются в т. X. Пусть хорды AC и BD делятся т. X пополам, EF – третья хорда, проведенная через т. X.

2) Заметим, что в четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD точкой пересечения делятся пополам

$\Downarrow$

3) Четырехугольник ABCD – параллелограмм (т.к. диагон. точкой пересеч. делятся пополам).

$\angle ABC = \angle ADC \Leftarrow$

4) Но с другой стороны ABCD – вписан.

$\Downarrow$

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$2\angle ABC = 180^\circ$, т.к. $\angle ABC = \angle ADC$.

$\angle ABC = 90^\circ = \angle ADC$

$\Downarrow$

ABCD – пар-мм с углом 90°.

$\Downarrow$

ABCD – прямоугольник

$\Downarrow$

Центр описанной окр-сти прямоугольника ABCD совпадает с точкой пересечения диагоналей, т.е. с точкой X.

$\Downarrow$

т. X – центр нашей окр-сти.

$\Downarrow$

Хорда EF, проходящая через т. X является диаметром.

$\Downarrow$

$EF = 2R = 2\cdot 5 = 10$, т.к. радиус окр-сти по условию равен 5.

$\Downarrow$

Длина третьей хорды всегда равна 10.

Ответ: 10.

№2

Пусть $n = \overline{abcd}$ $\Rightarrow$ $1000 \leq n < 10000$ $\Rightarrow$ $1000000 \leq n^2 < 100000000$

Случай 1: $1.000.000 \leq n^2 < 10.000.000$

$\Downarrow$

$a < 5$ $\Leftarrow$ $\cancel{n < 50000}$ $n < 5000$, т.к. $5000^2 = 25000000 > 10000000$

Посмотрим на получение числа n^2 умножением в столбик:

$$\begin{array}{r} \times\ \overline{abcd} \\ \overline{abcd} \\ \hline \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ +\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \ \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \ \ \ \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \ \ \ \ \ \\ \hline abcd\ldots \end{array}$$

Т.к. $1000000 \leq n^2 < 10000000$, то в числе n^2 будет 7 знаков.

см. след. стр.

Чистовик 2

Понятно, что $a \neq 0$, т.к. число не может начинаться с 0.

Если $a = 4$, то $a \cdot a = 16$ – есть переход через десяток, а у нас его не должно быть (иначе бы n^2 не начиналось с цифры a).

Если $a = 3$, то $a \cdot a = 9$, а в итоговом числе (n^2) должно получиться $a = 3$ => должен быть переход через десяток, а у нас его не должно быть.

Если $a = 2$, то $a \cdot a = 4$, а число n^2 должно начинаться с $a = 2$ => опять должен быть переход через десяток, а у нас его не может быть.

$\Downarrow$

цифры 0, 2, 3, 4 не подходят.

Если $a = 1$, то $a \cdot a = 1$ и число n^2 должно начинаться с 1.

$\Downarrow$

$a = 1$ подходит.

$\Downarrow$

$$\begin{array}{r}
\times \; \overline{1bcd} \\
\overline{1bcd} \\
\hline
\ldots \\
+ \; \ldots\;\; \\
b\,\ldots\;\;\;\; \\
1bcd\;\;\;\;\;\; \\
\hline
1bcd\ldots
\end{array}$$

$\Downarrow$

~~$b + b = 2b = b$ (10)~~

$b + b = b$, т.к. перехода через десяток не может быть, т.к. $a = 1$.

$2b = b$

$b = 0$.

$\Downarrow$

$$\begin{array}{r}
\times \; \overline{10cd} \\
\overline{10cd} \\
\hline
d0\ldots \\
+ \; c0\ldots\;\; \\
0000\;\;\;\; \\
10cd\;\;\;\;\;\; \\
\hline
10cd\ldots
\end{array}$$

$\Downarrow$

$c + c = c$ и $d + d = d$ – перехода через десяток опять не может быть, т.к. иначе бы $b \neq 0$ и $a \neq 1$.

$2c = c \qquad 2d = d$

$c = 0 \qquad d = 0$

$\Downarrow$

$\overline{abcd} = 1000$.

Случай 2: $10\,000\,000 \leq n^2 < 100\,000\,000$

$\Downarrow$

$n \geq 4000$, т.к. $4000^2 > 10000000$, а $3000^2 < 10^7$.

a $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd\ldots}$

См. след. стр.

Чистовик 3

Если $a = 4$, то $a \cdot a = 16$, а число n^2 должно начинаться с $a = 4$ $\Rightarrow$ будет переход через ~~десят~~ десяток, а его у нас не может быть.

Если $a = 5$, то $a \cdot a = 25$ - может быть

Если $a = 6$, то $a \cdot a = 36$ - может быть.

Если $a = 7$, то $a \cdot a = 49$

Если $a = 8$, то $a \cdot a = 64$

Если $a = 9$, то $a \cdot a = 81$

Если $a = 4$, то $n^2 \geq 40000000$, но $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$, где $a = 4$, будет не больше 25000000

Если $a = 5$, то $n^2 \geq 50000000$, но $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$, где $a = 5$, будет не больше 36000000

Если $a = 6$ то $n^2 \geq 60000000$, но $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$, где $a = 6$, будет не больше 49000000

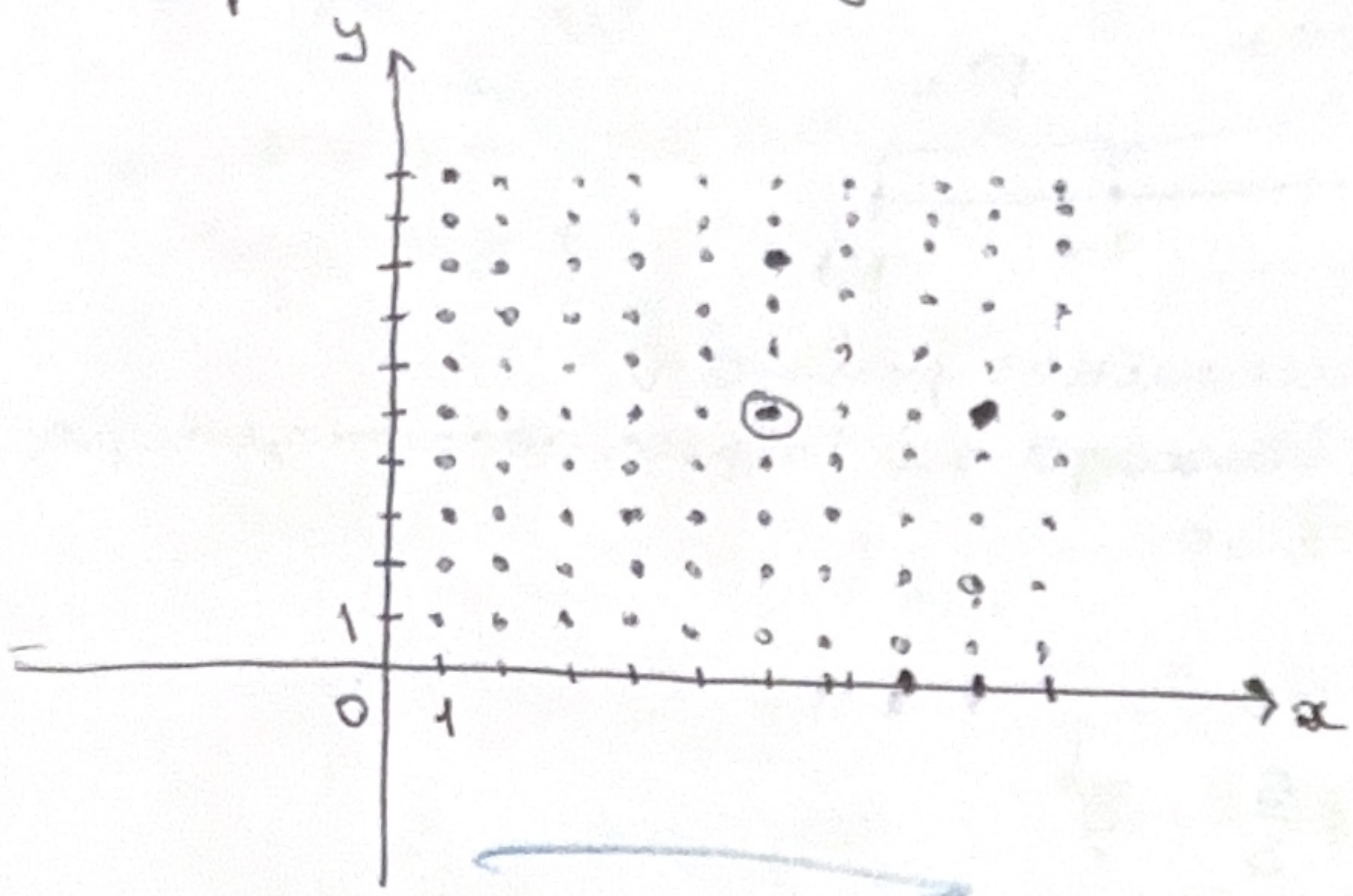
Если $a = 7$, то $n^2 \geq 70000000$, но $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$, где $a = 7$, будет не больше 64000000.

Если $a = 8$, то $n^2 \geq 80000000$, $\overline{abcd} \cdot \overline{abcd}$, где $a = 8$, не больше 81000000

Ответ: 1000.

№3. Чистовик 4

Построим на координатной плоскости мн-во F.



Всего точек $10 \cdot 10 = 100$.

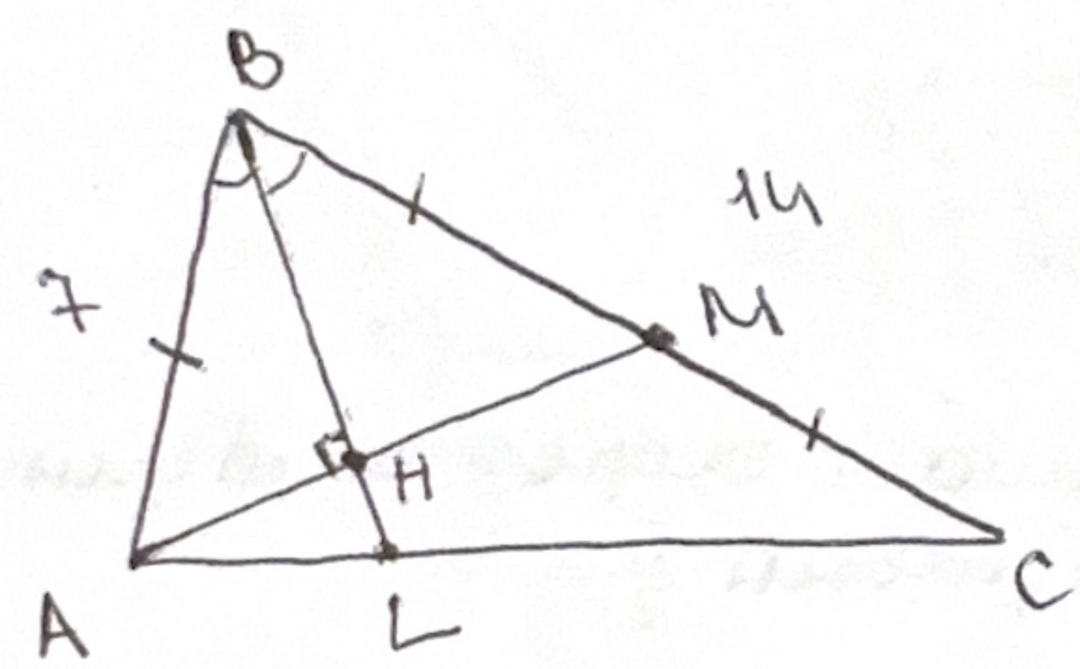
Первую точку можем выбрать 100 способами; вторую и третью точки нужно выбрать одну из того же ~~треугольни~~ столбца, что и с первой точкой, ~~втору~~ другую нужно выбрать из той же строки, что и с первой точкой - это можно сделать $(10-1)(10-1)$ способами. 81 способами.

⇓

Прямоугольн. треугольников с катетами, параллельными осям, $100 \cdot 9 \cdot 9 = 100 \cdot 81 = 8100$.

Ответ: 8100.

№4.



1) Обозначим т. пересеч. AM и BL за т. H.

2) В $\triangle ABM$ - BH - биссек. и высота, т.к. $\angle ABL = \angle CBL$ (BL - биссек. $\angle ABC$) и $BH \perp AM$.

⇓

$\triangle ABM$ - равнобед.

⇓

3) $AB = BM = 7$.

4) $BM = MC$, т.к. AM - мед.

⇓

$BC = 2BM = 14$.

5) $\triangle ABC$ треуг. не равноб. $\Rightarrow AC \neq 7$ и $AC \neq 14$.

6) По нер-ву $\triangle ABC$: $\begin{cases} AC + 7 > 14 \\ AC + 14 > 7 \\ 7 + 14 > AC \end{cases}$ $\begin{cases} AC > 7 \\ AC > -7 \\ AC < 21 \end{cases}$ $\Rightarrow AC \in \{8, 9, 10, \ldots, 19, 20\}$, и $AC \neq 14$

⇓

AC принимает 12 различ. значений

⇓

1) $P_{ABC} = 7 + 14 + 8 = 29$

2) $P_{ABC} = 7 + 14 + 9 = 30$

⋮

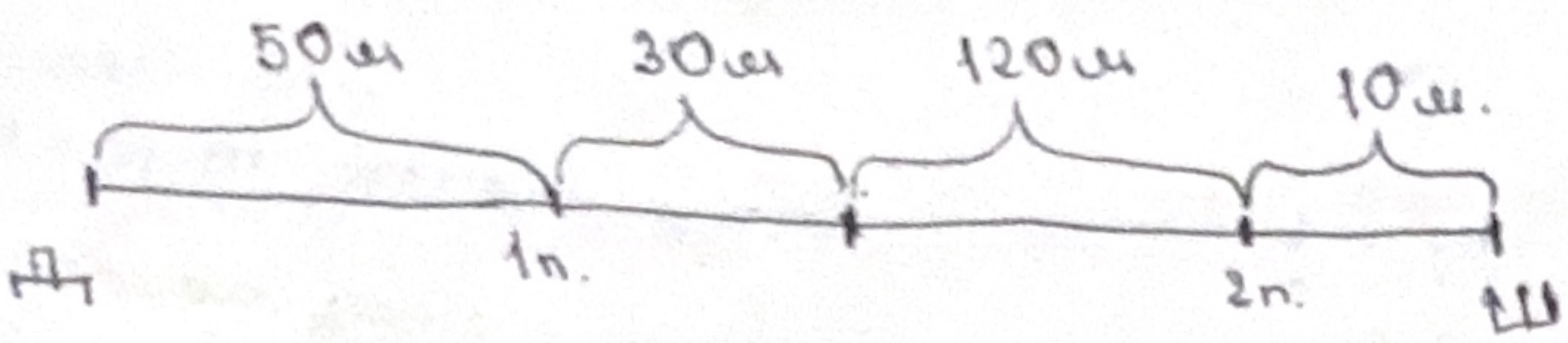
12) $P_{ABC} = 7 + 14 + 20 = 41$.

— Здесь нет $P_{ABC} = 7 + 14 + 14$, т.к. $\triangle ABC$ - неравноб.

Ответ: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41

Чистовик 5

№5



Пусть скорость Агриппины равна v.

Тогда т.к. в момент выхода на 1 перех. ~~горит~~ загорается красный, то. $\frac{50}{v} \geq 30$

$$\frac{5}{v} \geq 3.$$

$$v \leq \frac{5}{3}.$$

С другой стороны: $\frac{50+30+120}{v} \geq \cancel{60}\ 10+50$ – для 2 перех.

$\frac{200}{v} \geq 60.$ и с другой стороны:

$\frac{20}{v} \geq 6.$ $\qquad \frac{200}{v} \leq 110$

$\frac{20}{6} \geq v$ $\qquad 20 \leq 11v$

$\frac{10}{3} \geq v$ $\qquad \frac{20}{11} \leq v$

$$\frac{20}{11} \leq v \leq \frac{10}{3}.$$

$$\begin{cases} v \leq \frac{5}{3} \\ v \leq \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow v \leq \frac{5}{3}.$$

Наибольшая скорость Агриппины ~~нова~~ равна $\frac{5}{3}$.

Пример: $v = \frac{5}{3}$.

Участок до 1 перех. Агрип. ~~за~~ преодолевает за $\frac{50}{\frac{5}{3}} = \frac{150}{5} = 30с$. Когда она подъезжает к 1 переходу загорается (для пешеходов) зелёный (т.к. для машин он горит 30с). Переход Агрип. преодолевает за $\frac{30}{\frac{5}{3}} = \frac{90}{5} = \cancel{16с}\ 18с$, следоват., красный пока не успеет загореться. Участок от 1 перех. до 2 перех. Агрип. преодолеет за $\frac{120}{\frac{5}{3}} = \frac{360}{5} = 72с$. На подъезде ко 2 перех. пройдет $30+18+72 = \cancel{100с}\ 120с$, где 10с горел зелен. для пешех, 50с горел красный пеш. 50с горел зелен. для пеш. и

№6. Черновик

$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0$

$a^3+2a^2x-3ax^2\le 0.$

$-3ax^2+2a^2x+a^3\le 0.$

$b+b-2026=-\frac{2a^2}{-6a}=\frac{1}{3}a$

$b(b-2026)=\frac{a^3}{-3a}=\frac{1}{3}a^2.$

$\begin{cases}2b-2026=\frac{1}{3}a\\ b(b-2026)=\frac{1}{3}a^2.\end{cases}$

$\begin{cases}6b-6078=a\\ 3b(b-2026)=a^2.\end{cases}$

$3b^2-6078b=36b^2-12\cdot 6078b+6078^2.$

$3b^2-6078b=36b^2-72936b+36942084$

$33b^2-66858b+36942084=0$

$11b^2-22286b+12314028=0.$

$b-2026$, b

$x_1=a$

$x_2=b-2026.$

$6078\cdot 6078$: 48624, 42546, 36468; 36942084

$6078\cdot 12$: 12156, 6078; 72936

72936 − 6078 = 66858

66858 + 6078 = 72936

66858 : 3 = 22286

36942084 : 3 = 12314028

$12314028\cdot 44$: 49256112, 49256112; 541817232

$22286\cdot 22286$: 133716, 178288, 44572, 44572, 44572; 496665796

496665796 − 541817232

2026 : 4 = 506,5

$D=4a^4+12a^4=16a^4.$

$x_1=\frac{-2a^2-4a^2}{-6a}=\frac{-6a^2}{-6a}=a.$

$x_2=\frac{-2a^2+4a^2}{-6a}=\frac{2a^2}{-6a^2}=-\frac{1}{3}a.$

$506{,}5\cdot 3=1519{,}5$

$1519{,}5\cdot 3=4558{,}5$

Чистовик 6

№6.

$a \neq 0$

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \mid \cdot a^4$, $a^4 > 0$ – знак не изменится.

$a^3 + 2a^2x - 3ax^2 \leq 0$

$-3ax^2 + 2a^2x + a^3 \leq 0$.

Если ур-е $-3ax^2 + 2a^2x + a^3 = 0$ не имеет корней, то ~~ветви параболы или~~ нер-во $-3ax^2 + 2a^2x + a^3 \leq 0$ имеет мн-во решений, которое представляет собой бесконечную или 0 нулевую длину. Нам это не подходит.

$\Downarrow$

Ур-е $-3ax^2 + 2a^2x + a^3 = 0$, должно иметь 2 корня, которые будут отличаться на 2026

$x_1 \quad x_2 \quad x$

т.к. мн-во решений это отрезок, то $x \in [x_1; x_2]$

$\Downarrow$

$x_2 = x_1 + 2026$.

$-3ax^2 + 2a^2x + a^3 = 0$.

$D = 4a^4 + 12a^4 = 16a^4$.

$x_1 = \frac{-2a^2 - 4a^2}{-6a} = a$.

$x_2 = \frac{-2a^2 + 4a^2}{-6a} = \frac{2a^2}{-6a} = -\frac{1}{3}a$.

1) $a = -\frac{1}{3}a + 2026$.

$\frac{4}{3}a = 2026$.

$a = \frac{2026 \cdot 3}{4}$

$a = 1519,5$

$-\frac{1}{3}a = -506,5$

2) $-\frac{1}{3}a = a + 2026$.

$-\frac{4}{3}a = 2026$.

$a = -\frac{2026 \cdot 3}{4}$.

$a = -1519,5$

$-\frac{1}{3}a = 506,5$

$\Downarrow$

$-3ax^2 + 2a^2x + a^3 = 0$

$-3a(x-a)(x+\frac{1}{3}a) = 0$.

$-(x-a)(3ax + a^2) = 0$.

1) $-(x - 1519,5)(4558,5x + 1519,5^2) \leq 0$

$(x - 1519,5)(4558,5x + 1519,5^2) > 0$

$- \quad -506,5 \quad + \quad 1519,5 \quad - \quad x$

$x \in (-506,5; 1519,5)$ – подходит.

~~$x \in (-\infty; -506,5) \cup (1519,5; +\infty)$ – не подходит.~~

2) $(x + 1519,5)(4558,5x + 1519,5^2) > 0$.

~~$-506,5 \quad x$~~

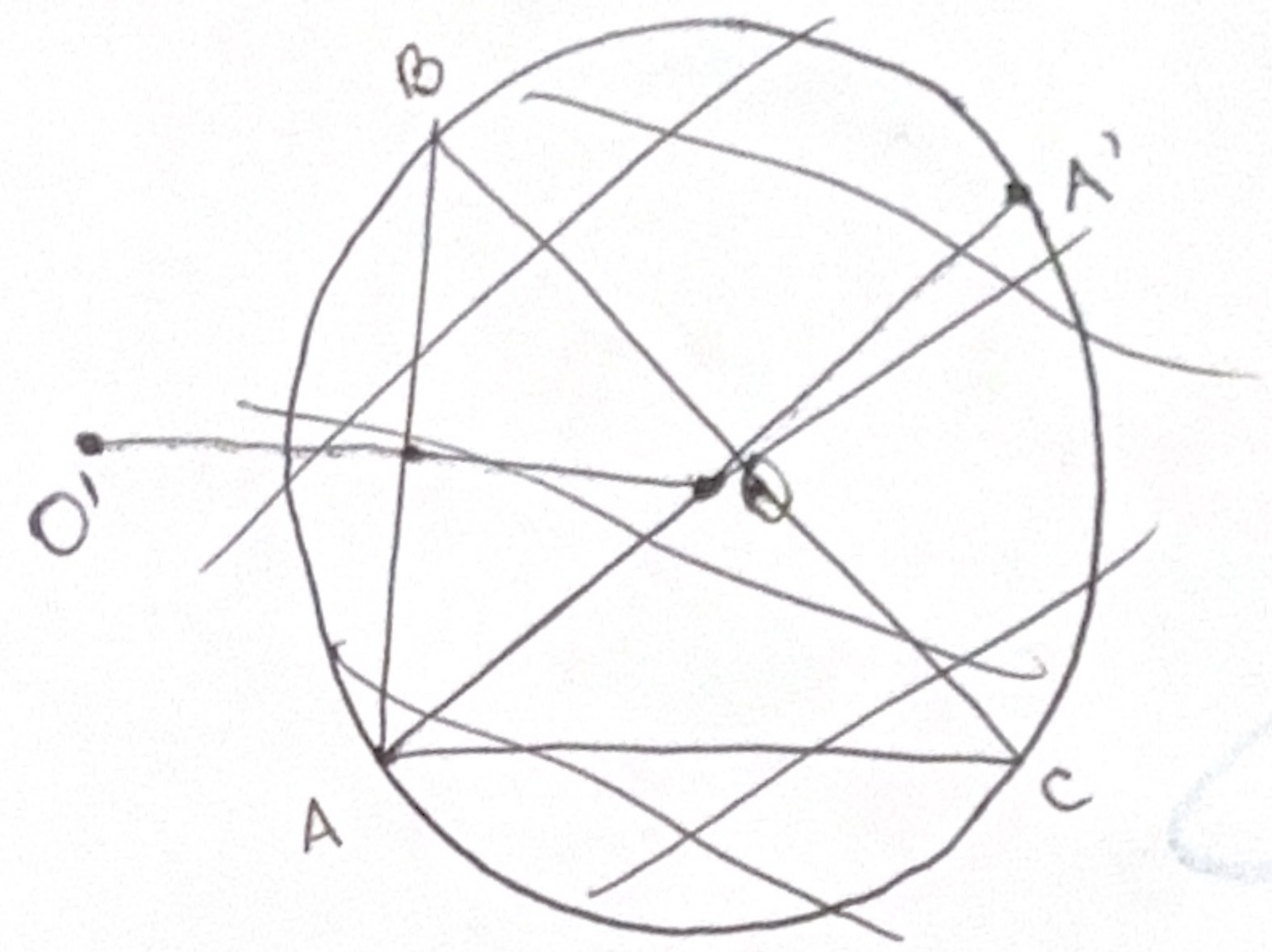
$- \quad -1519,5 \quad + \quad 506,5 \quad - \quad x$

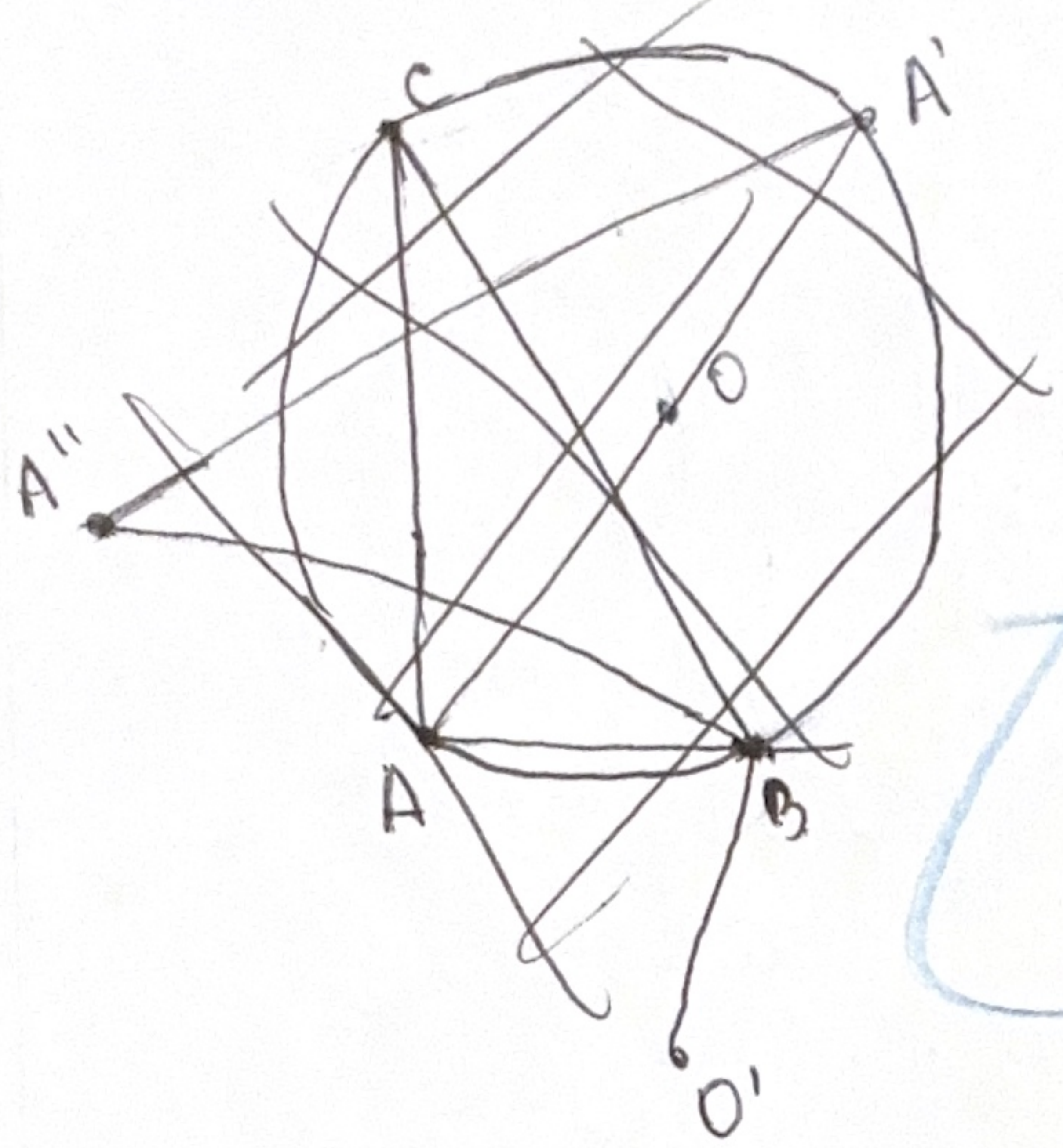
$x \in (-1519,5; 506,5)$ – подходит.

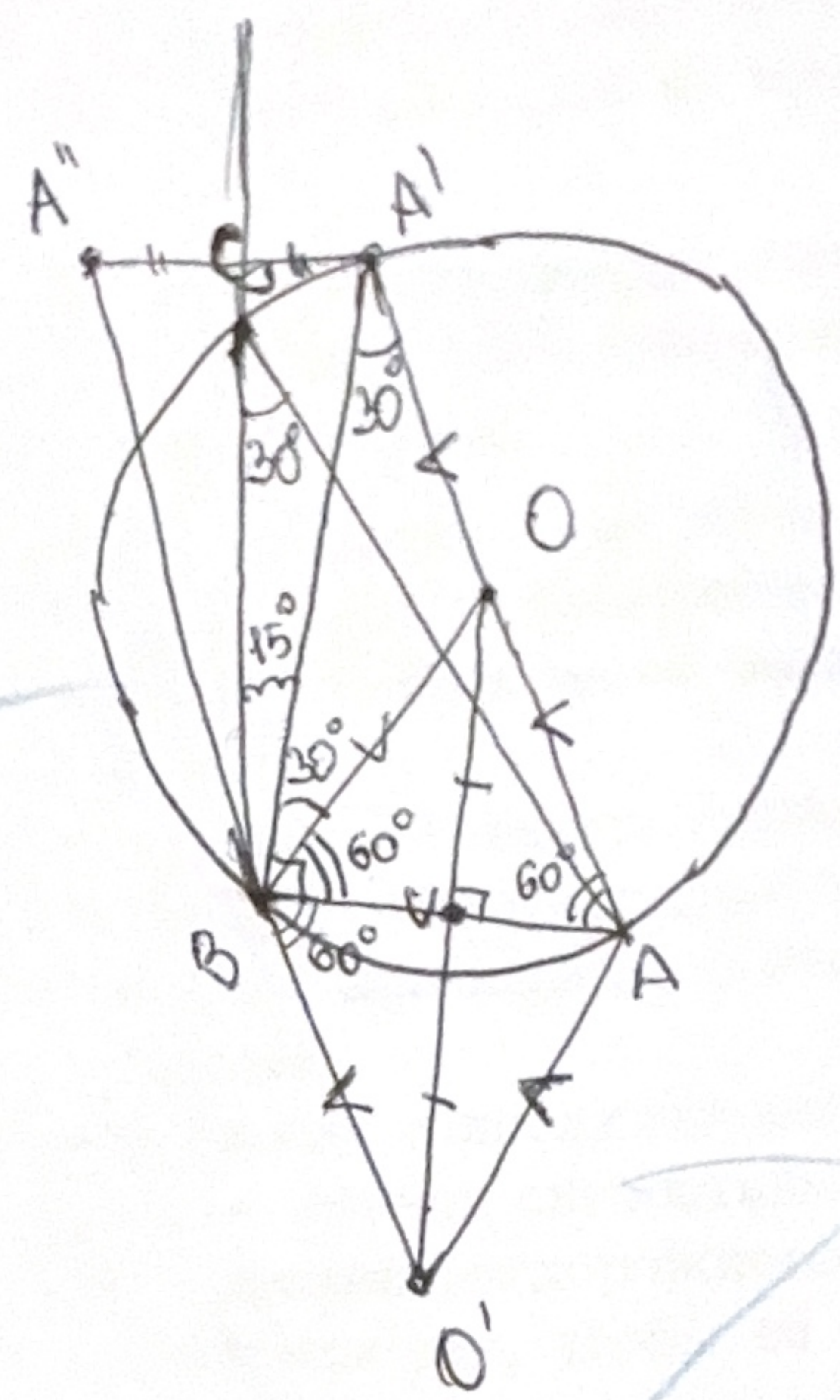
Ответ: $a = 1519,5$ или $a = -1519,5$.

Чистовик 7

№7.







Решение:

1) т. A' – т. диам. противопол. т. A.

2) ~~∠A~~ ∠BA'A = 30° и ∠A'BA = 90°

т.к. ∠BCA = ∠BA'A = 30°. т.к. A'A – диам

$\Downarrow$

ΔBA'A – прямоуг. с ∠ 30°

$\Downarrow$

AA' = 2AB; ∠BAA' = 60°

~~3)~~

$\Downarrow$

OA = OB = AB = OA' (OB = OA = OA' – мед., проведен. к гипот.).

4) т. O и O' симметр. относ. AB

$\Downarrow$

∠OBA = ∠O'BA = 60°.

5) ∠A'BO = 90° − 60° = 30°.

6) ∠A''BA' = 180° − ∠OBO' − ∠A'BO = 180° − 60° − 60° − 30° = 30°.

7) т. A'' и A' симметрич. относит. BC

$\Downarrow$

∠A''BC = ∠A'BC = $\frac{∠A''BA'}{2}$ = 15°

см. след. стр.

Чистовик. 8.

8) $\angle ABC = \angle ABA' + \angle A'BC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$.

Ответ: $\angle ABC = 105^\circ$.