



70-65-71-78
(129.14)



Время выноса: 13:35
Время возвращения: 13:40

Выход: 13:45
Возвращение: 13:55!

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант № 2 11

Место проведения КРАСНОДАР
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сергей Екстеричев Александрович
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника
[Подпись]

70-65-71-78
(129.14)

Числовое

№ 2

анализируй;

75 (Семьдесят пять)

Целое N именованное трехзначное натуральное число, а S - сумма его цифр. По условию N при делении на S даёт целое число, кратное 9. Значим $\frac{N}{S} = 9K$, где K - натуральное число. Получим: $N = 9K \cdot S$. Поскольку N содержит множитель 9, само число N кратно 9. По признаку делимости на 9 сумма его цифр S также должна быть кратно 9. Для любого трехзначного числа сумма его цифр не может превышать 27 ($9+9+9=27$). Таким образом S может принимать только одно из трех значений: $9, 18, 27$. Рассмотрим первой случаем, $S=9$: подставим S в формулу $N = 9 \cdot K \cdot 9 = 81K$. Выпишем все трехзначные числа, кратные 81 : $162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972$.

Проверим сумму цифр каждого из этих чисел. Условию $S=9$ удовлетворяют только числа: $162, 243, 324, 405, 810$.

Рассмотрим второй случай, $S=18$: подставим S в формулу $N = 9 \cdot K \cdot 18 = 162K$. Выпишем все трехзначные числа, кратные 162 : $162, 324, 486, 648, 810, 972$. Проверим сумму цифр, условию $S=18$ удовлетворяют только числа $486, 648$ и 972 .

Рассмотрим третий случай, $S=27$: подставим S в формулу $N = 9 \cdot K \cdot 27 = 243K$. Выпишем все трехзначные числа, кратные 243 : $243, 486, 729, 972$. - ни одно из этих чисел с суммой цифр 27 .

~~Введем все найденные числа, проверяя~~

Число $N = 2$

Зведем все найден. числа, входящие в множ-ва A и расписавшие их в порядке возрастания.

162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972.

Сумма первого, ~~и~~ шестого и последнего:

$$162 + 648 + 972 = 1782$$

Ответ: 1782

№ 1

$$\text{ОДЗ} \quad \sqrt{3(1-\tan^2 x)} = 2\sqrt{2} \sin x$$

Область допустимых значений:

1) $\tan x$ определен, значит $\cos x \neq 0$

$$4) 3(1-\tan^2 x) \geq 0$$

3) левая часть неотрицательна \Rightarrow и правая часть неотрицательна, откуда $\sin x \geq 0$

Возведем ур-е в квадрат:

$$3(1-\tan^2 x) = 8 \sin^2 x$$

$$\text{Подставим } \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} : 3\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 8 \sin^2 x$$

$$\frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x} = 8 \sin^2 x$$

$3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$. Обозначим $t = \sin^2 x$, тогда $\cos^2 x = 1 - t$. Получим:

$$3(1 - 2t) = 8t \cdot (1 - t)$$

$$8t^2 - 14t + 3 = 0$$

$$D = 196 - 96 = 100$$

$$t = \frac{14 \pm 10}{16}; \text{ Отсюда } t_1 = \frac{3}{2}; t_2 = \frac{1}{4}$$

$t = \frac{3}{2}$ невозможно, т.к. $t = \sin^2 x \leq 1$. Значит $\sin^2 x = \frac{1}{4}$. Тогда $\sin^2 x = \sin x = \pm \frac{1}{2}$.

Но из ОДЗ $\sin x \geq 0$. Значит $\sin x = \frac{1}{2}$

Отсюда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Число

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

№ 3

Пусть z — такое z такого треугольника
 вершина прямого угла определяется
 однозначно, зафиксируем вершину прямого
 угла P . Катеты длины x и y вдоль
 двух различных координатных осей. Пары
 осей можно выбрать тремя способами.
 x и y ; x и z ; z и y . Теперь для каждой
 выбранной оси надо выбрать катет
 катета. Если одна координата точки P
 фиксирована, то по данной z вдоль данной
 оси можно перейти в любую другую
 точку с координатой от -6 до 6 ,
 кроме исходной. Таких возможностей
 $13 - 1 = 12$. Значит для фиксированной
 вершины P и фиксированной пары осей
 число треугольников равно $12 \cdot 12 = 144$
 Так пар осей 3, то для одной вершины P
 получаем $3 \cdot 144 = 432$ пар треугольников.
 Остаётся посчитать число возможных
 точек P . Каждая координата принимает
 13 значений от -6 до 6 . Поэтому получим
 $13^3 = 2197$. \Rightarrow общее число исковых
 треугольников равно $2197 \cdot 432 = 949104$

Ответ: 949104

~~на~~ грани $U=1$ и при $U=1$ $S=4$

на границе $U=1$ и при $U=1$. Тотому
 и все внутренние точки 12.

Для пары 13 и 15 получаем 14 точек.

Тройных внутренних пересечений нет.

Итого внутренних вершин $12+12+14=38$

Складываем все найденные вершины.

$$V = 4 + 2 + 21 + 17 + 38 = 82$$

Теперь найдем число ребер. Будем это
 считать левей, соединяем соседние верши-
 ны. Левая и правая стороны прямизу-
 гельтия точками $(0;0)$ и $(1;0)$ на два
 отрезка каждая. Итого: 4 ребра на
 обоих границах.

Верхняя сторона прямоугольника делится
 21 точкой касания на 22 отрезка.

Нижняя сторона прямизу-
 гельтия делится на
 17-ью точками касания на 18 отрезков.

Каждая кривая разбивается линиями
 на кривые вершинами на дуги (число дуг
 на 1 меньше числа точек.) На кривой
 $K=11$ лежат две граничные точки, 6
 максимумов; 5 минимумов (включая $x=\frac{1}{2}$),
 12 пересечений с $K=13$ и 12 пересечений с
 $K=15$. Всего $2+6+5+12+12 = 37$ точек. Они
 делят кривую на 36 дуг. На кривой $K=13$
 лежат две граничные, 7 макс максимумов,
 6 минимумов, 12 пересечений с $K=11$, 14
 пересечений с $K=15$. Итого 41 точка. Это
 40 дуг.

На кривой $K=15$ лежат две граничные, ⁸
 максимумов, ~~свое~~ 7 минимумов (включая
 $x=\frac{1}{2}$), 12 пересечений с $K=11$, 14 с $K=13$.

Итого 43 точки. Это 42 дуги дуги.
 Складываем все ребра:

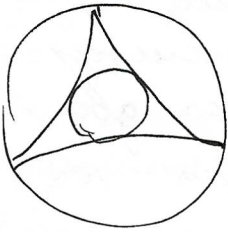
$$E = 4 + 22 + 18 + 36 + 40 + 42 = 162.$$

Улитка №4

~~Вычислим какое-то значение, $F=fz$
 $= 1 \cdot 1 =$~~

Ответ: 162

$S = 5.$



~~$2R = 2r + h \Rightarrow 2r = 2h \Rightarrow$~~

~~$r = \frac{2h}{2}$~~

~~$2R = 2$~~

Ответ: ~~$R = \frac{cy}{2}$~~



№ 8

Числовые

$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

~~Обозначим x~~

$$y = x^{\log_a x} \quad 3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} \leq 2x$$

$$\frac{3x^2 (\log_a x)^2 - 1}{\log_a x} \leq 2x$$

Замена: $\log_a x = t, t \neq 0$

$$\frac{3x^2 t^2 - 1}{t} \leq 2x$$

$$\frac{(\sqrt{3xt-1})(\sqrt{3xt+1})}{t} \leq 2x$$

$$x = a^t$$

$$\frac{(\sqrt{3xt-1})(\sqrt{3xt+1})}{t} - 2x \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{3xt-1})(\sqrt{3xt+1}) - 2xt}{t} \leq 0$$

$$\text{Инвариант: } a = e^{\frac{t}{x}} \quad a = e^{\frac{t}{x}}$$

$$\frac{(\sqrt{3xt-1})(\sqrt{3xt+1})}{t} - 2x \stackrel{!}{\leq} 0$$

Чернышев

$$\frac{(\sqrt{3xt-1})(\sqrt{3xt+1}) - 2xt}{t} \leq 0$$



Черновик

$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

$$3x^2 \log_a x - \log_x a \leq 2x$$

$$\log_a x \cdot 3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} \leq 2x$$

$$\frac{3x^2 (\log_a x)^2 - 1}{\log_a x} \leq 2x$$

~~$$\sqrt{3(1-\tan^2 x)} = 2\sqrt{2} \sin x$$~~
~~$$\sqrt{3-3\tan^2 x} = 2\sqrt{2} \sin x$$~~

№ 2) 10

№ 3)

$$\begin{array}{r} 2194 \\ \times 432 \\ \hline 14394 \\ 6591 \\ 8788 \\ \hline 949104 \end{array}$$

№ 4) $0 < x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

$$\log_a x \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ a > 0 \ a \neq 1 \end{array}$$

$$y = \log$$

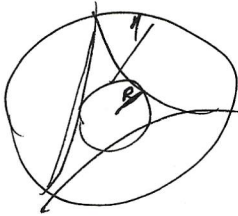
$$a = e^{\frac{3}{x}}$$

$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

$$\log_a x (3x^2 - 1) - 2x \leq 0$$

$$\log_a x (3x^2 - 1) \leq 2x$$

$$\log_a x (3x^2 - 1) \leq \log_a 2x$$



$$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$$

$$3x^2 \log_a x - \log_x a \leq 2x$$

$$a \neq 1; \ a \geq 0$$

$$a > 0$$

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$$

$$\log_a x \cdot 3x^2 \log_a x - \frac{1}{\log_a x} \leq 2x \Rightarrow \frac{3x^2 (\log_a x)^2 - 1}{\log_a x} \leq 2x$$

$$a \neq 1$$

Замечка: $\log_a x = y, y \neq 0$

$$\frac{3x^2 \cdot y^2 - 1}{y} \leq 2x$$

$$\frac{(\sqrt{3xy-1})(\sqrt{3xy+1})}{y} \leq 2x$$

$$\begin{array}{l} x = a^y \\ a = e^{\frac{3}{x}} \end{array}$$

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему

от участницы заключительного этапа
по профилю «математика»
Сердюк Екатерины Александровны

Апелляция

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат
заключительного этапа, а именно 50 баллов, поскольку считаю, что мои решения по
задачам 1, 2, 3 и 4 были оценены некорректно.

По задаче 1 мое решение было доведено до полного ответа. Сначала в работе была
выписана область допустимых значений: я учла, что $\operatorname{tg} x$ определен только при $\cos x$
не равно 0, что подкоренное выражение должно быть неотрицательно, а также что
левая часть исходного уравнения неотрицательна, следовательно, правая часть тоже
должна быть неотрицательна, откуда следует условие $\sin x$ больше либо равно 0.
После этого я возвела уравнение в квадрат, выразила $\operatorname{tg}^2 x$ через $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$, а
затем сделала замену $t = \sin^2 x$, сведя задачу к квадратному уравнению. Полученное
квадратное уравнение было решено верно: его корни $t = 3/2$ и $t = 1/4$, причем значение
 $t = 3/2$ было обоснованно отброшено как невозможное, поскольку $t = \sin^2 x$ и не может
быть больше 1. Далее из $t = 1/4$ я получила $\sin x =$ плюс-минус $1/2$, после чего с учетом
ранее установленного ограничения $\sin x$ больше либо равно 0 оставила только $\sin x =$
 $1/2$. В результате был записан полный ответ: $x = \pi/6 + 2\pi n$ и $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, где n
целое. Этот ответ полностью совпадает с официальным ответом для задачи 1,
вариант 4. Согласно критериям, снижение по задаче 1 возможно, если в целом верное
решение испорчено арифметической ошибкой при решении квадратного уравнения,
либо если учтены ограничения, но допущена ошибка при решении
тригонометрического уравнения. В моем решении ни одной из этих ошибок нет.
Поэтому прошу пересмотреть оценку за задачу 1 и засчитать решение как верное.

По задаче 2 мое решение было доведено до полного ответа. Сначала я обозначила
через n искомое трехзначное натуральное число, а через s сумму его цифр. Из
условия я получила, что $n / s = 9k$, где k натуральное число, откуда следует равенство
 $n = 9ks$. Далее я обосновала, что число n кратно 9, а значит, по признаку делимости на
9 сумма его цифр s тоже кратна 9. Так как n трехзначное, сумма его цифр не
превосходит 27, поэтому я отдельно рассмотрела все возможные случаи: $s = 9$, $s = 18$,
 $s = 27$. В каждом из этих случаев я не просто выписала числа, кратные 81, 162 или
243, а дополнительно проверила сумму цифр и оставила только те числа, которые
действительно удовлетворяют исходному условию задачи. В результате были
получены числа 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972, после чего я нашла требуемую
сумму первого, шестого и последнего числа: $162 + 648 + 972 = 1782$. Этот ответ
полностью совпадает с официальным ответом для задачи 2, вариант 1. Согласно
критериям, снижение по задаче 2 возможно либо в случае арифметической ошибки в
целом верном решении, либо если в обосновании есть содержательный изъян,

Повысить оценку
на 25 баллов
(старая оценка - 50 баллов
новая оценка - 75 баллов)

[Handwritten signatures]

например когда после вывода о кратности 81 во множество включаются вообще все кратные 81 числа. В моем решении такого изъяна нет. Поэтому прошу пересмотреть оценку за задачу 2 и зачесть решение как верное.

По задаче 3 мое решение было доведено до полного ответа. В работе я использовала корректный комбинаторный способ подсчета. Сначала я отметила, что у каждого такого прямоугольного треугольника вершина прямого угла определяется однозначно, и зафиксировала эту вершину. Далее я рассмотрела выбор двух координатных осей, вдоль которых идут катеты. Такую пару осей можно выбрать тремя способами: x и y , x и z , y и z . После этого для каждой из двух выбранных осей я подсчитала число возможных концов катета. Так как координаты точек являются целыми числами от минус 6 до 6, то вдоль каждой оси из фиксированной вершины можно перейти в любую другую допустимую точку, кроме исходной, то есть двенадцатью способами. Следовательно, для фиксированной вершины прямого угла и фиксированной пары осей получается 12 умножить на 12, то есть 144 треугольника. Так как пар осей три, то для одной фиксированной вершины получается 432 треугольника. Далее я подсчитала число всех возможных вершин прямого угла: каждая координата принимает 13 значений, значит всего таких точек 13 в кубе, то есть 2197. Поэтому общее число искомых треугольников равно 2197 умножить на 432, то есть 949104. Этот ответ полностью совпадает с официальным ответом для задачи 3, вариант 2. Согласно критериям, снижение по задаче 3 возможно либо в случае арифметической ошибки в целом верном решении, либо если высказана идея рассматривать треугольники в разных плоскостях, но сам комбинаторный подсчет выполнен неверно. В моем решении арифметической ошибки нет, итоговый ответ верен, а сам подсчет выполнен последовательно и без пропусков. Поэтому прошу пересмотреть оценку за задачу 3 и зачесть решение как верное.

По задаче 4 в моей работе было приведено фактически полное решение, доведенное до последнего вычисления. Я решала задачу альтернативным корректным способом, через формулу Эйлера для планарного графа. В работе были последовательно подсчитаны все вершины графа: отдельно учтены вершины прямоугольника, точки $(0,0)$ и $(1,0)$, точки касания с верхней и нижней границей, а также внутренние точки пересечения графиков. При этом я специально учла совпадающие точки, в частности общую точку при $x = 1/2$, $y = -1$ для графиков с $k = 11$ и $k = 15$, и отдельно отметила, что тройных внутренних пересечений нет. В результате было получено число вершин $V = 82$. Далее в работе было подсчитано число ребер графа. Я отдельно рассмотрела разбиение боковых сторон прямоугольника, верхней и нижней границ, а также каждой из трех синусоид на дуги между соседними вершинами. В результате было получено число ребер $E = 162$. После этого искомое число областей уже однозначно находится по формуле Эйлера и равно 81. Именно эта последняя строка с окончательным арифметическим действием не была мною дописана, хотя все необходимые для ответа величины в работе уже были найдены. Официальный ответ для задачи 4, вариант 3, также равен 81. Согласно критериям, для задачи 4 существенным является наличие верной связи между числом пересечений и числом областей, а также учет одновременных пересечений. В моем решении это реально проведено в полном подсчете: совпадающие точки были учтены, двойного счета не возникло, все основные элементы графа были найдены. Таким образом, в работе присутствует полное содержательное решение задачи, а недостающей оказалась только заключительная

техническая строка. Поэтому прошу пересмотреть оценку за задачу 4 и зачесть решение как верное.

Подтверждаю, что я ознакомлена с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников «Ломоносов» и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменен, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

23.04.2026  / Сердюк Е.А.