0 398422 700005

39-84-22-70
(124.18)

дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Время вых: 12:58. ~~Чел~~

Время возврата: 13:02.

Вариант 11 класс

Место проведения "Москва"
город

+1 ~~8~~ +1 ~~Чел~~

дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

~~по~~ "

по математике
профиль олимпиады

Сидорова Тимофея Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29». 03. 2026 года

Подпись участника

 75 (семьдесят пять) Агурова [illegible]

39-84-22-70 (124.18)

№1 Чистовик

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$

ОДЗ:
$\sin x > 0$
$\cos x \neq 0$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x$

$6\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 16\sin^2 x \quad | \cdot \cos^2 x$

$6\cos 2x = 4 \cdot \sin^2 2x$

$6\cos 2x = 4 - 4\cos^2 2x$

$4\cos^2 2x + 6\cos 2x - 4 = 0$

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$

$(2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -2 \text{ - не уд. ОЗФ} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$

вспомним об ОДЗ:

$\sin x > 0 \Rightarrow 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$

и при этом: $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\}$

№1 (прод.) Чистовик.

• $\cancel{x = \frac{\pi}{6}} - 2\pi k < \frac{\pi}{6} + 2\pi k < \pi + 2\pi k$
верно

• $\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2\pi k$ $\varnothing$ - не подходит

• $-\pi + 2\pi k < -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < 2\pi k$ $\varnothing$
не подходит

• $2\pi k < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < \pi + 2\pi k$ - верно

$\Rightarrow \cancel{x \in \frac{\pi}{6}}$

Ответ: $x \in \{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\}$

№2 Рассмотрим: $\overline{abc}$ - произвольное 3-х значное число $\in A$, тогда

$\boxed{\varphi}$ $\overline{abc} \equiv_9 a+b+c$

$\Rightarrow \frac{\overline{abc}}{a+b+c} \vdots 9$, то $V_3\left(\frac{\overline{abc}}{a+b+c}\right) \geq 2$

$\Rightarrow V_3(\overline{abc}) - V_3(a+b+c) \geq 2$

при $V_3(a+b+c) < 2$, $V_3(\overline{abc}) = V_3(a+b+c)$

- следствие из $\boxed{\varphi}$

Черновик:

a_1, a_2: $\frac{abc}{a+b+c} : 9$ ~~abc~~

$8x^2 \cdot \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1$

$\frac{8t^2-2t-1}{\log_a x} \le 0$

81 27

729

~~77~~

2187

64

8748

13120

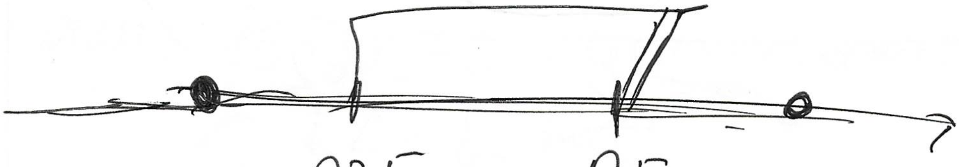
139968

$\frac{(4t+1)(2t-1)}{\log_a x} \le 0$

$2t \le 0$

$t \ge -\frac{1}{4}$

$x \cdot \log_a x <$



№3 (чистовик

$\Rightarrow V_3(\overline{abc}) \geq 4$

$\Rightarrow \overline{abc} \vdots 81$

проверим все 3-х значные числа $\vdots 81$

1) $162 \vdots (1+6+2) = 18 \vdots 9$ - подходит

2) $243 \vdots \overset{(2+4+3)}{(9)} = 27 \vdots 9$ подходит

3) $324 \vdots \overset{3+2+4}{(9)} = 36 \vdots 9$ подходит

4) $405 \vdots (4+5) = 45 \vdots 9$ - подходит

5) $486 \vdots (\cancel{18}\ 4+8+6) = 27 \vdots 9$ - подходит

$567 \vdots (5+6+7) \notin \mathbb{Z}$ - не подходит

6) $648 \vdots \overset{(6+4+8)}{18} = 36 \vdots 9$ - подходит

$729 \vdots \overset{(7+2+9)}{18} \notin \mathbb{Z}$ - не подходит

7) $810 \vdots (8+1) = 90 \vdots 9$ - подходит

$891 \vdots \overset{8+9+1}{(18)} \notin \mathbb{Z}$ - не подходит

8) $972 \vdots (9+7+2) = 27 \vdots 9$ - подходит

Ответ: $\{162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972\}$,

искомая сумма $243 + 486 + 810 =$

$= 810 + 729 = 1539$

39-84-22-70
(124.18)

№8 (чистовик)

ОДЗ:
$a \neq 1$
$x \neq 1$
$a \geq 0$
$x \geq 0$

$$8x^2 \cdot \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0.$$

$$\frac{8x^2 \cdot \log_a^2 x - 2x \cdot \log_a x - 1}{\log_a x} \leq 0$$

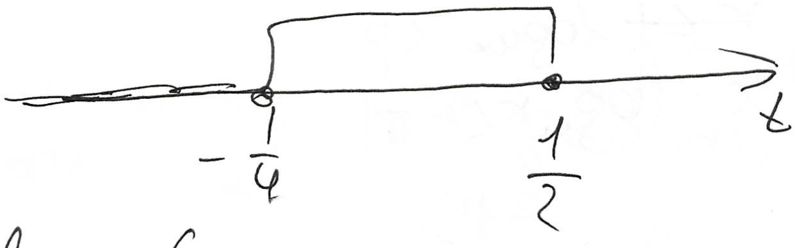
$$\frac{(2(x \cdot \log_a x) - 1)(4 \cdot (x \cdot \log_a x) + 1)}{\log_a x} \leq 0.$$

Замена:

$x \cdot \log_a x = t$ – ~~Замены~~; $f(x) = x \cdot \log_a x$ – ~~непрерывная~~ разрывная.

$$\frac{(2t-1)(4 \cdot t+1)}{\log_a x} \leq 0.$$

$$(2t-1)(4 \cdot t+1) \leq 0$$



~~① $\log_a$ Согласно одз:~~

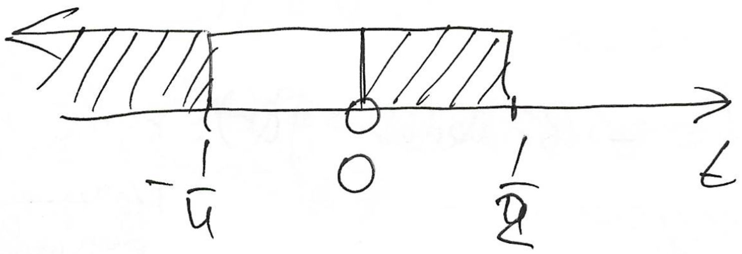
~~ели. $\log_a x = 0$ – достигается при $t < -\frac{1}{4}$, то.~~

№8 (прод.) Черновик

Заметим:

$\log_a x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \log_a x = 0$. – не уд. ОДЗ.

$\Rightarrow$ решениями уже итогового неравенства будут:



т.к. при $\log_a x < 0$, $x \cdot \log_a x < 0$ тоже в силу ОДЗ: $x > 0$

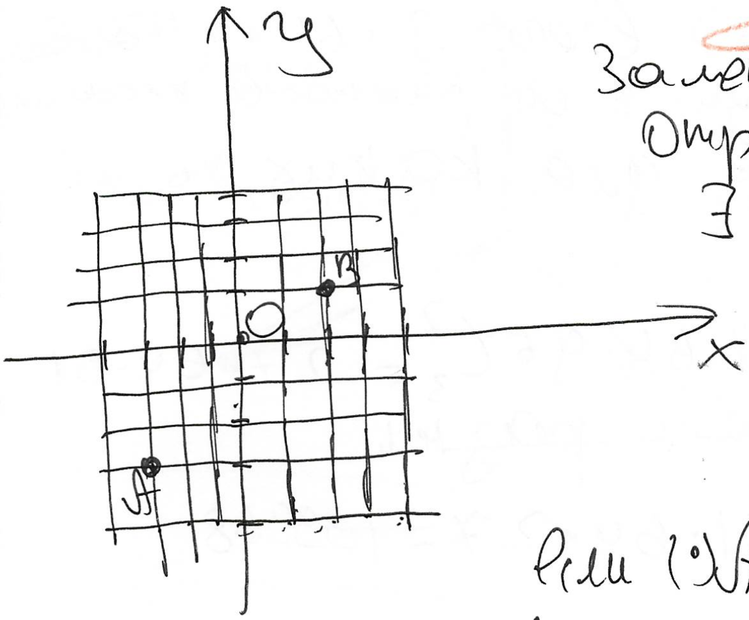
Теперь рассмотрим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \cdot \log_a x < \frac{1}{2} \\ \cancel{x > 1}\ \log_a x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cancel{x < 1}\ \log_a x < 0 \\ x \cdot \log_a x < -\frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \cdot \log_a x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \cdot \log_a x < -\frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \cdot \log_a x < -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \cdot \log_a x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

№3 чистовик

Рассмотрим сначала в двухмерном пространстве:



Заметим: для каждого отрезка AB ∃ ровно 2 прямоуг. Δ, в которых катеты идут по сторонам клеток.

Если (·)A и (·)B не лежат на прямой ∥ Ox или Oy

=> общее кол-во выбрать

(·)A − $9 \cdot 9 - (8 \cdot 2 + 1)$ − кол-во точек на нужных прямых

общее кол-во точек

(·)B − $9 \cdot 9 - (8 \cdot 2 + 1)$ − 17 − кол-во точек: AB ∥ Ox, Oy, а $AB = \frac{(9 \cdot 9 - 17) \cdot (9 \cdot 9)}{2}$

чтобы не считать AB и BA − дважды

тогда кол-во прямоуг. Δ − $(9 \cdot 9 - 17)(9 \cdot 9) = (81 - 17) \cdot 81 = 81 \cdot 64$

теперь ~~заметим~~ перейдём снова к OXYZ

∃ катеты ∥ Ox и Oy тогда они ⊥ OZ => все точки, лежащие

№3 (прод.) чистовик

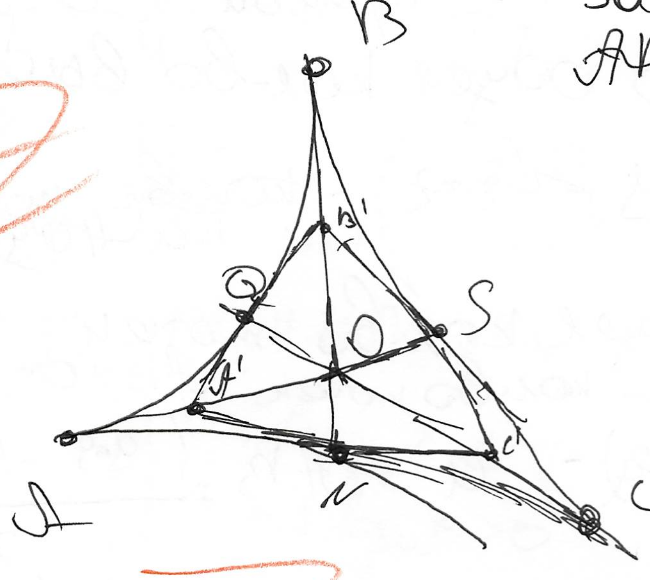
имеют одну координату z, причём она может принимать 9 значений => всего $81 \cdot 64 \cdot 9$ (~~кол-во~~ ($\triangle$ в одной плоскости - $81 \cdot 64$ • на кол-во плоскостей) кол-во треугольников для каких-то 2-х осей.

теперь: $81 \cdot 64 \cdot 9 \cdot C_3^2 = 27 \cdot 64 \cdot 81$

~~никакие 2 $\triangle$ с разн.~~

=> Ответ: $81 \cdot 64 \cdot 27 = 139968$

№5



Заметим: полученная фигура ABC симметрична => если проведём (O - касающуюся AC и BC ("биссектрису"), то C Q • вершина AB, и самая ближняя точка к C, аналогично получаем

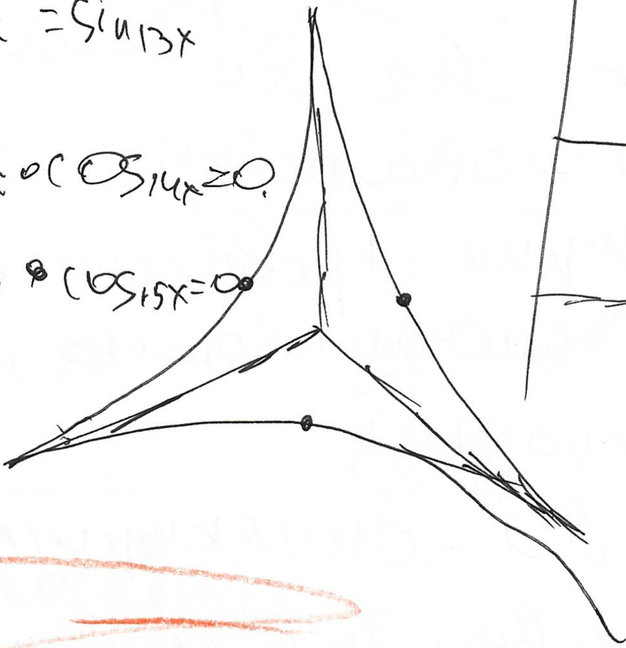
(•) S и (•) N тогда вся фигура симметрична => заметим вписанное окружность тоже => O её центр должен $\in$ осям симметрии всей фигуры - AS, CQ, BN => $O = CQ \cap BN \cap AS$

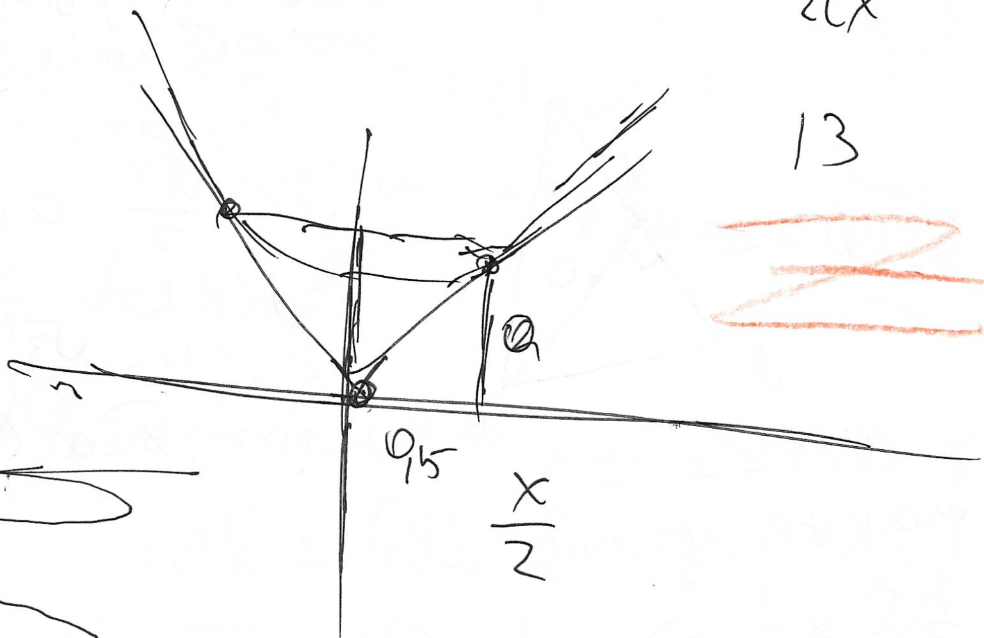
черновик

$\sin 15x = \sin 13x$

$\sin x \cdot \cos 14x = 0.$

$\sin 2x \cdot \cos 15x = 0$

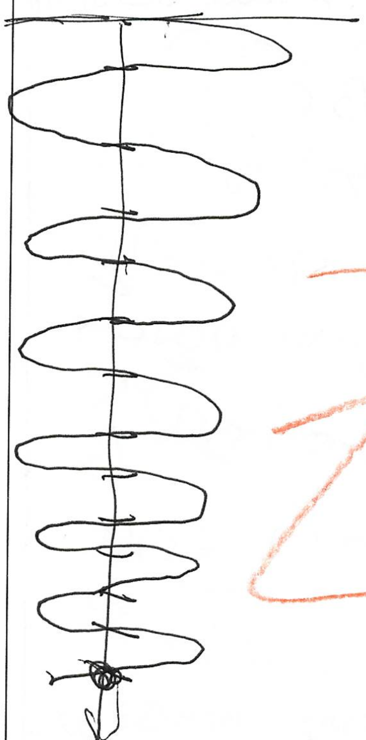


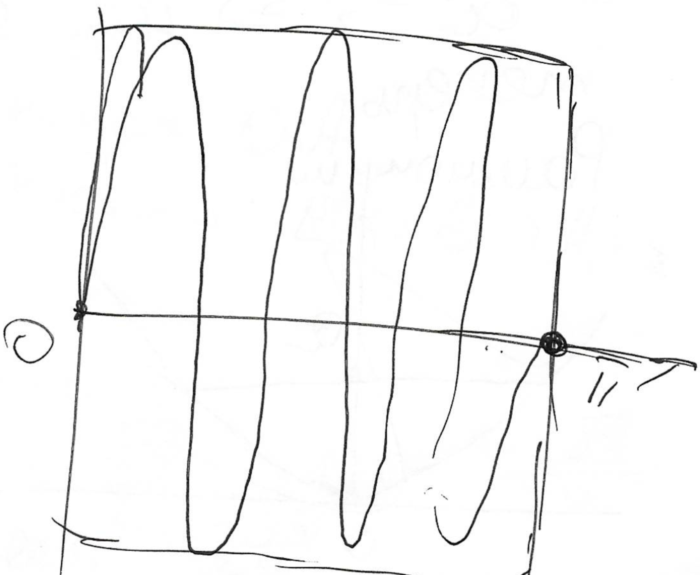


2CX

13

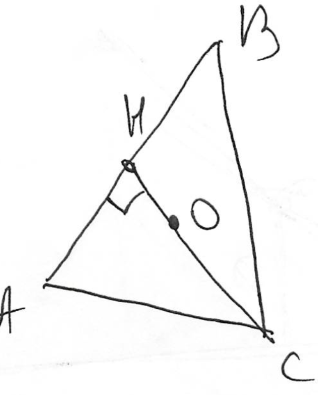
$\frac{x}{2}$





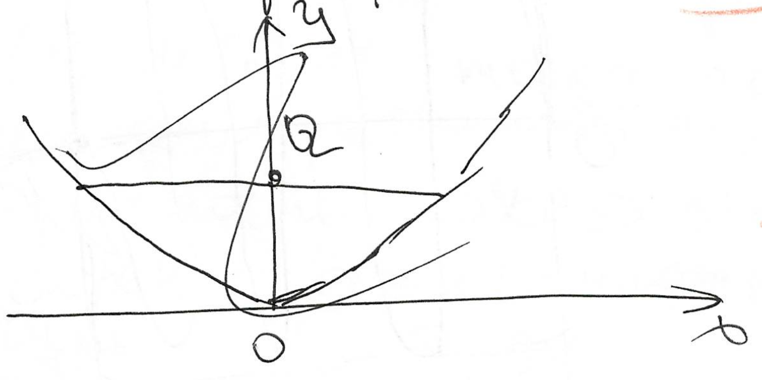
№5 (продл)

$\Rightarrow$ O – центр искомой окр-ти.
и более того; все оси.
BO, CO; AO – аналогично
оси симметрии правильного
$\triangle ABC$ (уже смотру стороны не
кривые, а отрезки)
$\Rightarrow$ BO, CO; AO – биссектрисы
$\triangle ABC$. и высота и медиана
по св-ву прав. $\triangle$
тогда найду
его высоту – CH



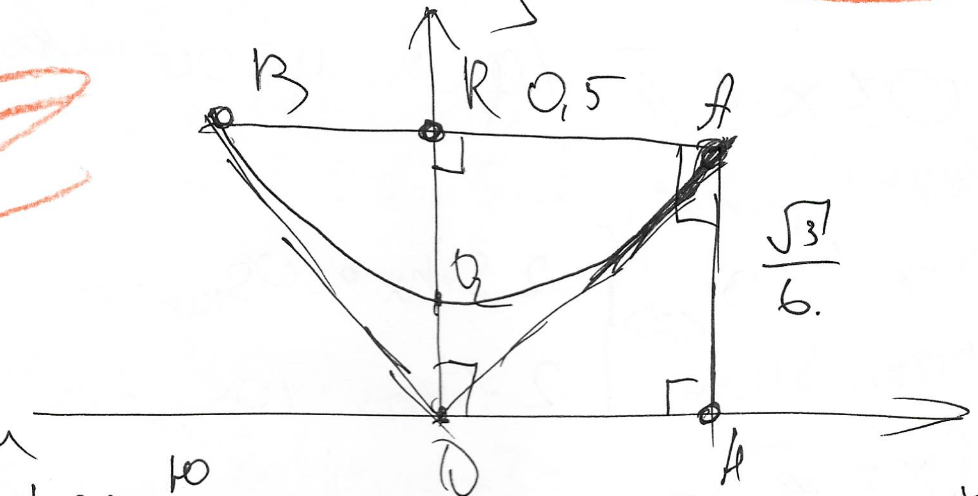
$AH = \frac{AB}{2} = 0{,}5$
$AC = 1$
$\Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$
по т. Пиф. в $\triangle ACH$

O – также центр. масс $\triangle ABC$
$\Rightarrow \frac{HO}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = \frac{CH}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
теперь
Рассмотрим:



№5 (продолжение) чистовик.

Рассмотрим параболу $f(x)=cx^2+QO$.



OB и OA касаются $f(x)$ —

$\angle BOA=120°$ — угол между бис-сами в прав. Δ (св-во прав Δ)

OQ — ось симметрии $\Rightarrow \angle QOA=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \angle AOH=\frac{\pi}{6}$.

OQ — ось симметрии $\Rightarrow BR=RA=\frac{AB}{2}=$
$=0,5=OH$ (OHAR — прямоуг.)

$\Rightarrow AH=OH\cdot tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

$g(x)=0,5x$ — функция OA,

тогда т.к $g(x)$ касается $f(x)$ в (.) A, то

$g'(0,5)=f'(0,5)$

$0,5=2c\cdot 0,5 \Rightarrow c=0,5$

$\Rightarrow f(0,5)=\frac{1}{8}+QO=\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow QO=\frac{3-2\sqrt{3}}{24}$ —

— искомый радиус. Ответ: $\frac{3-2\sqrt{3}}{24}$.

№4 Чистовик

Замену πx на x

итогда

$0 \le x \le \pi$ (для удобства)

Проверим:

$$\begin{cases} \sin_{15x} = \sin_{13x} \\ \sin_{17x} = \sin_{13x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin_x \cdot \cos_{14x} = 0 \\ 2 \cdot \sin_{2x} \cdot \cos_{15x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi k_1 \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k_2}{14} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k_3}{2} \\ x = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k_4}{15} \end{array} \right. \end{cases}$$

поищем совпадения между двумя совокупностями.

$x \in (0; \pi)$

$\pi k_1 = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k_4}{15}$ $\varnothing$

$\pi k_1 = \frac{\pi k_3}{2}$ $\varnothing$

$\frac{\pi k_3}{2} = \frac{\pi + 2\pi k_2}{28}$ $\varnothing$ т.к

$\pi + 2\pi k \not\vdots 2\pi$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k_2}{14} = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k_4}{15}$$

$$\frac{\pi}{15 \cdot 28} = \frac{\pi(14k_4 - 15k_2)}{15 \cdot 14}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi(14k_4 - 15k_2)}{1}$$

$1 = 28k_4 - 30k_2$ $\varnothing$ т.к. $28k_4 - 30k_2 \vdots 2$

$1 \not\vdots 2$

$\Rightarrow$ все три графика не могут пересечься при $x \in (0; \pi)$

39-84-22-70
(124,18)

Черновик)

170
340

57
34

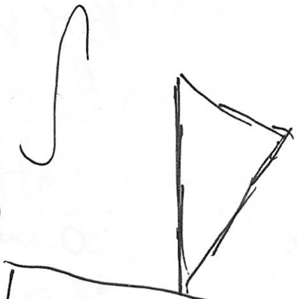
0

19380

$a < 1$

$f(x) = -\frac{1}{3}x + 6$

$y + \frac{1}{3}x - 6 = 0$



$\frac{6}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{18}{\sqrt{10}}$

133
133
399
399
133
17689 0

19380
17689
1691

~~24~~
24
12

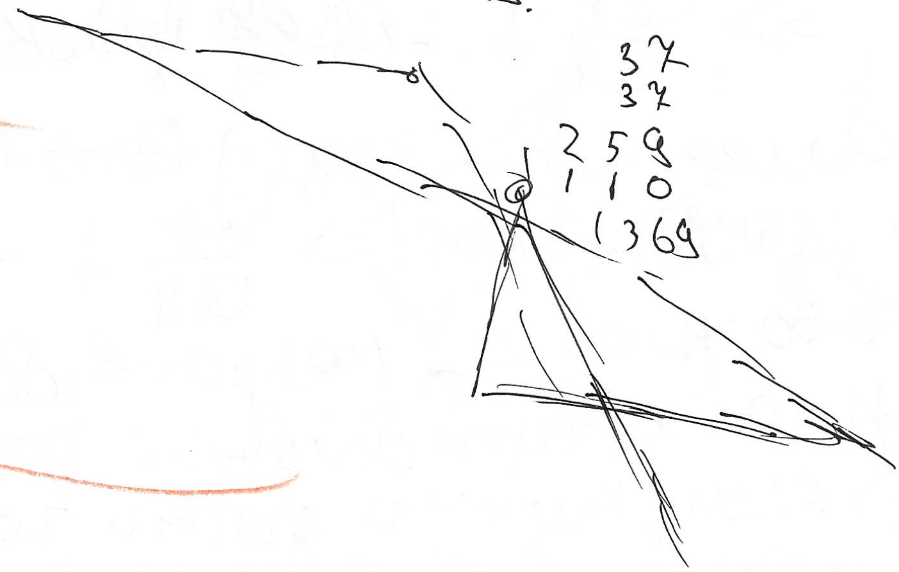
30

48
6

96
3

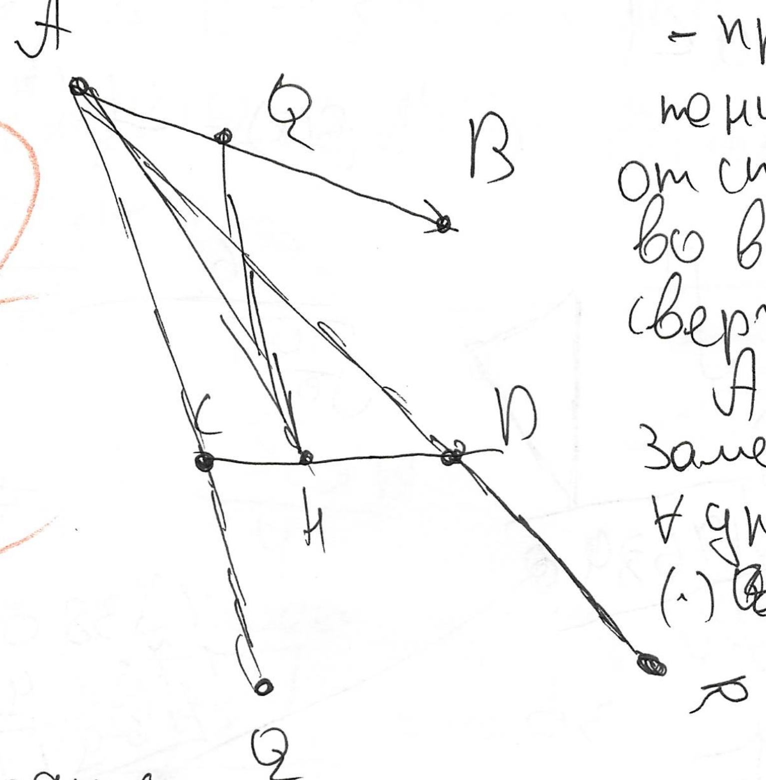
~~288030~~
3

$\frac{3640}{1369} = 2.71$



37
37
259
110
1369

№ 6 (чистовик.)



QR DC – проекция тени. от стены во время (вершина в(·) A

Заметим ∀ другой (·) Q ∈ AB

её расстояние до CD и любой её точке меньше чем расстояние от этой точки до A

∃ это не так для какой-то (·) H.

QH > AH заметим: при:

H → C ∠AQH ↓, ∠QAH ↑

=> $\frac{AH}{QH}$ ↓ – св-во углов △.

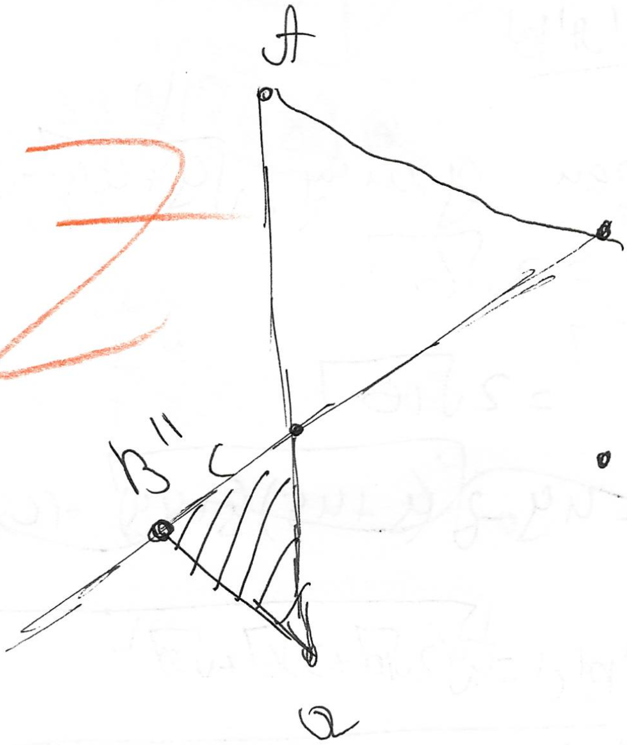
Более того при (·) Q → B, ∠AQH ↓, ∠QAH – const => $\frac{AH}{QH}$ ↓ – аналогичное св-во углов △ (напротив большего угла лежит больший угол)

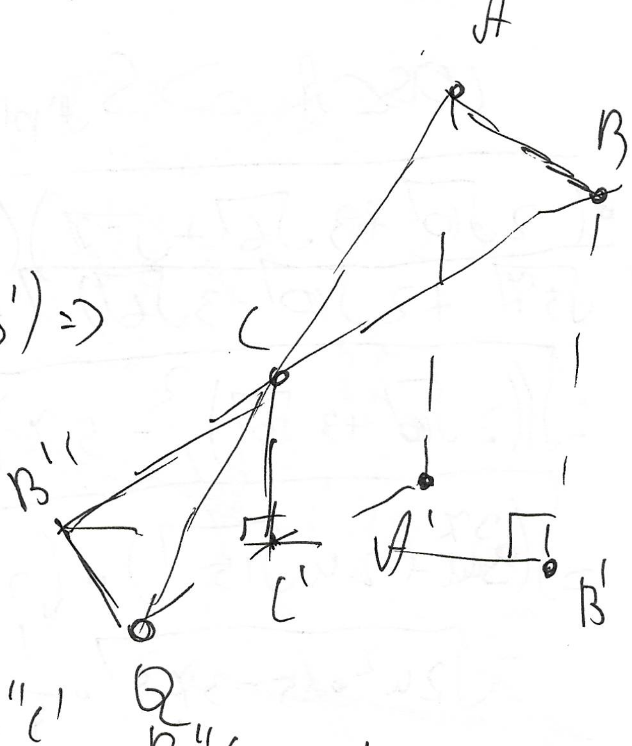
=> если max и достигается, то при: Q = B, H = C проверим:

№6 (чистовик) продолжение

Д. инверсии: $AC = \sqrt{4+49}$, $BC = \sqrt{9+45}$

$BC < AC \Rightarrow$ утверждение верно. Тогда увеличение тени каждыми след. точками проходит именно за счёт ~~проекции~~ тени от столбика CD. Рассмотрим эту фигуру в объеме.





$$\frac{B''C}{B''B} = \frac{CC'}{BB'} \quad (CC' \parallel BB') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle B''C'C \sim \triangle B''B'B$$

$$\Rightarrow \frac{B''C}{B''B} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{B''C}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{B''C'}{C'B'} = \frac{B''C}{CB} = \frac{1}{2}$$

аналогично: $\frac{QC'}{C'A'} = \frac{C'C}{AA' - C'C} = \frac{1}{2} \Rightarrow QC' = \frac{C'A'}{2}$

№6 (прод.) чистовик.

тогда $\triangle B''C'Q \sim \triangle C'A'B'$

т.к. $\angle B''C'Q = \angle A'C'B'$ — вертик.

$\frac{B''C'}{C'B'}$ ~~$= C'B'$~~ $= \frac{QC'}{C'A'}$

$\Rightarrow S_{B''C'Q} = \frac{S_{C'A'B'}}{4}$

Проекция: A' имеет длину: $\sqrt{9+49} = \sqrt{57}$,

$B($ $-\sqrt{9+45} = 3\sqrt{6}$

$AB - \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

~~$A'B'^2 = 18+45+49-2\sqrt{(9+45)(9+49)} \cdot \cos\angle A'$~~

~~$\cos\angle A$~~ $\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}\sqrt{(2\sqrt{10}+3\sqrt{6}+\sqrt{57})\cdot}$

$\overline{\cdot(2\sqrt{10}+3\sqrt{6}-\sqrt{57})(+3\sqrt{6}+\sqrt{57}-2\sqrt{10})(}$

$\overline{(\sqrt{57}+2\sqrt{10}-3\sqrt{6}))} =$

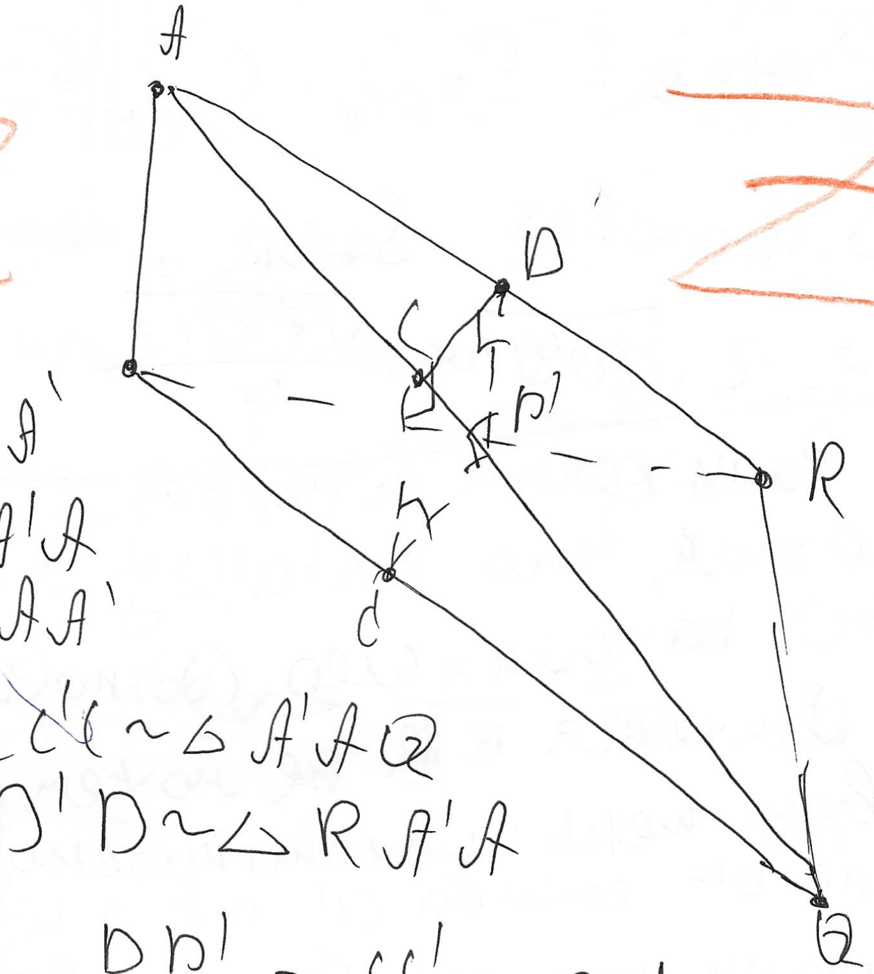
$= \sqrt{((2\sqrt{10}+3\sqrt{6})^2-57)(57-(3\sqrt{6}-2\sqrt{10})^2} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \sqrt{(37+24\sqrt{15})\cdot(24\sqrt{15}-37)} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \sqrt{24^2 \cdot 15 - 37^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{7271}}{4}$

39-84-22-70
(124.18)

~~теперь най~~ № 6 (прод.) чигновик.
теперь найдём ~~тоже~~ тень
от светлячка в (·) A



$C' \in A'A$
$DD' \parallel AA'$
$\Rightarrow \triangle QCC' \sim \triangle A'AQ$
$\triangle RD'D \sim \triangle RA'A$

$$\frac{RD'}{A'R} = \frac{DD'}{AA'} = \frac{CC'}{A'A} = \frac{QC'}{A'Q} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{A'D'}{A'R} = \frac{A'C'}{A'Q} = \frac{2}{3}.$$

$A'C' = \sqrt{9+49}$, $A'D' = \sqrt{36+49}$, $C'D' =$
$= CD = 3$ найдём ~~по гер-ле~~
по ф-ле Герона.

$S_{A'C'D'} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{57}+\sqrt{85}+3)(\sqrt{57}+\sqrt{85}-3)(3^2-(\sqrt{57}-\sqrt{85})^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{(133+2\sqrt{57\cdot85})(2\sqrt{57\cdot85}-133)} =$
$= \frac{1}{4}\sqrt{4\cdot57\cdot85-133^2} = \frac{\sqrt{1691}}{4}$

№6 (прод.) чистовик.

2) итоговая $S_{A'C'D'} = $ ~~$\sqrt{1691} + 7271$~~

=> $S_{D'D'RQ} = S_{A'RQ} - S_{A'C'D'} = S_{A'C'D'} \cdot 8$

2). Итоговая $S_{\text{тени}} =$

$$= 2\sqrt{1691} + \frac{\sqrt{7271}}{4}$$

NB! Рассуждение построено на том, что поскольку я доказал, что каждая след. (·) по мере приближения к B ~~не~~ может добавить новую тень только проекцией тени от столба CC', то я ищу сумму так теней от A и всех теней от CC'

№4 (прод.)

Заметим:

$\sin(15x)$ пересекает OX – в 16 точках, $\sin(13x)$ – в 14 точках, $\sin 17x$ – в 18 точках, поскольку $0 \leq kx \leq \pi k$, т.к. kx – неразрывная ф-я, то принимает все значения $0 \ldots \pi k$ => значения вида $\pi k'$, где $k' \in \mathbb{Z}$ принимает $k+1$ раз.

~~№ 4 (прод.)~~ № 8 (прод.)

1

1.1 $\left[\begin{cases} x \geq 1 \\ x \cdot \log_a x \leq \frac{1}{2} \end{cases}\right.$

1.2 $\begin{cases} x \cdot \log_a x \leq -\frac{1}{4} \\ x < 1 \end{cases}$

не пересекающиеся по x в-ны.

=> чтобы у нас был полуинтервал и (.), но: 1.1 или 1.2 имели по 1-му решению

$f(x) = x \cdot \log_a x$

$f'(x) = \log_a x + \frac{x}{\ln x}$ =