0 237673 540001

23-76-73-54
(129.11)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11кл 2

Место проведения г. Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сироха Арсения Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

85 (Восемьдесят пять)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик.

№3

Заметим, что F — это куб размеров $9\times 9\times 9$.

Допустим, что A — вершина прямого угла, то есть рассматриваем трёхгранник, где прямой угол в точке A. Тогда A фиксировано. Остается $8\times 8\times 3$, так как у нас есть 3 способа выбрать, какими будут оси и 8×8 способов выбрать вершины, чтобы катеты были направлены по разным фиксированным осям.

Способов зафиксировать A у нас $9\times 9\times 9$, следовательно, всего треугольников $9^3\cdot 8^2\cdot 3 = 139968$.

Ответ: $9^3\cdot 8^2\cdot 3 = 139968$.

~~№1~~

$$\cancel{\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin^2 x}$$

~~Решим систему (ОДЗ):~~

$$\cancel{\begin{cases} 1-tg^2x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg^2x \leq 1 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |tg\,x| \leq 1 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}}$$

~~Решение уравнения~~

$$\cancel{\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin^2 x}$$

$$\cancel{3(1-tg^2x) = 8\sin^4 x}$$

Чистовик.

№2

Обозначим число за N. Сумма цифр числа N – S. Если $(N : S) \vdots 9$, то значит, что $N \vdots 9$. Раз $N \vdots 9$, то по признаку делимости на 9 $S \vdots 9$. Значит $N \vdots 81$. Рассмотрим числа, кратные 81: $N_1 = 81 \cdot 2 = 162$. $1+6+2 = 9 \Rightarrow$ подходит.

$N_2 = 81 \cdot 3 = 243$. $S_2 = 2+4+3 = 9 \Rightarrow N_2 \in A$

$N_3 = 81 \cdot 4 = 324$. $S_3 = 3+2+4 = 9 \Rightarrow N_3 \in A$

$N_4 = 81 \cdot 5 = 405$. $S_4 = 4+5 = 9 \Rightarrow N_4 \in A$

$N_5 = 81 \cdot 6 = 486$. $S_5 = 4+8+6 = 18$, $N_5 : S_5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_5 \in A$

$N_6 = 81 \cdot 7 = 567$. $S_6 = 18$, $N_6 : S_6 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow N_6 \notin A$

$N_7 = 81 \cdot 8 = 648$, $S_7 = 18$. $N_7 : S_7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_7 \in A$

$N_8 = 81 \cdot 9 = 729$, $S_8 = 18$. $N_8 : S_8 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow N_8 \notin A$

$N_9 = 81 \cdot 10 = 810$, $S_9 = 9$. $N_9 : S_9 \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_9 \in A$

$N_{10} = 81 \cdot 11 = 891$. $S_{10} = 18$. $N_{10} : S_{10} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow N_{10} \notin A$

$N_{11} = 81 \cdot 12 = 972$, $S_{11} = 18$. $N_{11} : S_{11} \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_{11} \in A$

Тогда A – это: $\{162; 243; 324; 405; 486; 648; 810; 972\}$

Искомая сумма:

$162 + 648 + 972 = 1782$

Ответ: 1782

Чистовик

№1

$$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$$

Решение:

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 1-tg^2x \geq 0 \Rightarrow tg^2x \leq 1 \Rightarrow |tg x| \leq 1 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$$

$$3(1-tg^2x) = 8\sin^2x$$

$$3\left(1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\right) = 8\sin^2x$$

$$3\left(\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}\right) = 8\sin^2x$$

Подставим $\cos^2x = 1-\sin^2x$:

$$3\left(\frac{1-2\sin^2x}{1-\sin^2x}\right) = 8\sin^2x$$

Обозначим $t = \sin^2x$. Получим дробь $\frac{3-6t}{1-t} = 8t$

$3-6t = 8t-8t^2$

$8t^2-14t+3=0$

$D = 14^2-4\cdot8\cdot3 = 100$

$t = \frac{14\pm10}{16}$

$t_1 = \frac{3}{2}$

$t_2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow t_1$ не подходит, т.к. $|\sin^2x| \leq 1$

$\sin^2x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ не попадает в ОДЗ, ведь по условию $\sin x \geq 0$.

$\cancel{\Rightarrow \begin{cases}\sin^2x = \frac{3}{2} \\ \sin^2x = \frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases}\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \pm\frac{1}{2}\end{cases}}$

$\sin x = \frac{1}{2}$. Проверим, что $|tg x| \leq 1$: $tg^2x = \frac{\sin^2x}{\cos^2x} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

$tg^2x = \frac{1}{3} \leq 1 \Rightarrow$ условие из ОДЗ выполняется.

Чистовик

№1 (продолжение)

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

№8

$3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

При каких a решение - полуинтервал и точка?

Решение:

$\log_a x$ и $\log_x a \Rightarrow x > 0, x \neq 1$ и $a > 0, a \neq 1$.

Подставим в неравенство $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ и $\log_x a = \frac{\ln a}{\ln x}$

Получим:

$$3x^2 \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln x} - 2x \leq 0$$

$$\frac{3x^2 \cdot \ln^2 x - \ln^2 a - 2x \ln x \ln a}{\ln x \cdot \ln a} \leq 0$$

Рассмотрим числитель как квадратный трехчлен относительно $x \cdot \ln x$.

$3(x\ln x)^2 - 2\ln a(x\ln x) - \ln^2 a$; $D = 16\ln^2 a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3(-\ln a + x\ln x)(x\ln x + \frac{\ln a}{3})}{\ln x \ \ln a} \leq 0$$

Черновик.

№8 (продолжение)

Пусть $a \in (0;1)$:

$$\frac{3(x\ln x - \ln a)(x\ln x + \frac{\ln a}{3})}{\ln x} \geq 0$$

Пусть $x \in (0;1)$: $\Rightarrow 3(x\ln x - \ln a)(x\ln x + \frac{\ln a}{3}) \leq 0$

Получим:

$x\ln x \geq \ln a$; $x\ln x \leq -\frac{\ln a}{3}$

$x \in (0;1) \Rightarrow x\ln x \in [\frac{-1}{e}; 0)$

$a \in (0;1) \Rightarrow \ln a \in (-\infty; 0)$ и $-\frac{\ln a}{3} \in (0; +\infty)$

Получим, что $x\ln x \leq -\frac{\ln a}{3}$ всегда верно. ~~если~~ $\ln a \leq \frac{-1}{e}$,

что ~~верно для всех условие верно для всех~~

Если $\ln a \leq \frac{-1}{e}$, условие верно для всех $x \in (0;1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в ответе получим целый интервал.

Если $\ln a > \frac{-1}{e}$, то получим в качестве решения 2 интервала, симметричные ~~относительно~~ относительно ~~вершины~~ точки минимума $x\ln x$ при $x \in (0;1)$ в ответе не получим точку вне полуинтервала

Пусть $x \in (1; +\infty) \Rightarrow 3(x\ln x - \ln a)(x\ln x + \frac{\ln a}{3}) > 0$

При $x > 1$ $x\ln x > 0 \Rightarrow x\ln x - \ln a > 0 \Rightarrow x\ln x + \frac{\ln a}{3} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\ln x \geq -\frac{\ln a}{3}$

$x\ln x$ монотонно возрастает на $(1; +\infty) \Rightarrow$ Ответ всегда будет лучом вида $[x_1; +\infty)$, где x_1 - корень $x\ln x = -\frac{\ln a}{3}$.

Опять не получим точку вне полуинтервала $\Rightarrow a \in (0;1)$ не подходит.

Чистовик

№8 (продолжение)

Пусть $a \in (1; +\infty) \Rightarrow \ln a \in (0; +\infty)$

$$\frac{3(x\ln x - \ln a)(x\ln x + \frac{\ln a}{3})}{\ln x} \leq 0$$

Пусть $x \in (1; +\infty)$:

$(x\ln x - \ln a)(x\ln x + \frac{\ln a}{3}) \leq 0$

$x\ln x \in (0; +\infty)$ при $x > 1$ ~~возрастает~~

Т.к. $\ln a \in (0; +\infty)$, получим:

$(x\ln x + \frac{\ln a}{3}) \geq 0$, значит $x\ln x \leq \ln a$. Получим получим промежуток вида: $(1; x_0]$, где $x_0 \ln x_0 = \ln a$.

Пусть $x \in (0; 1)$:

$(x\ln x - \ln a)(x\ln x + \frac{\ln a}{3}) \geq 0$

$x\ln x \in [-\frac{1}{e}; 0)$ и $\ln a > 0$

$x\ln x - \ln a < 0$ всегда, значит, $x\ln x + \frac{\ln a}{3} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\ln x \leq -\frac{\ln a}{3}$. Чтобы решением была 1 точка, необходимо, чтобы $\frac{-\ln a}{3} = -\frac{1}{e}$, иначе получим хотя бы один интервал. $\ln a = \frac{3}{e} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ - решение.

Получим, что лишь в случае $a = e^{\frac{3}{e}}$ условие задачи удовлетворяется, получим решения $x = \{\frac{1}{e}\} \cup (1; x_0]$, где $x_0 \ln x_0 = \frac{3}{e}$

Ответ: $a = e^{\frac{3}{e}}$.

Черновик.

№7.

$y = \pm 2x^2 + c$; 210×297 мм

Прямоугольник ограничен $2x^2+c_1$; $2x^2+c_1+1$; $-2x^2+c_2$; $-2x^2+c_2+1$; $c_2 \geq c_1$, иначе параболы не имеют общих точек

Обозначим $k = c_2 - c_1$. Точки пересечения $y = 2x^2+c_1$ и $y = 2x^2+c_2$, $x = \pm\sqrt{\frac{k}{2}}$. Сетка симметрична относительно Oy, поэтому ~~надо~~ даёт рассмотреть ~~2 вида клеток~~ 2 вида клеток: которые содержат Oy и которые полностью лежат в правой полуплоскости

Если в правой полуплоскости, то по координатам Ox — это $\sqrt{\frac{k-1}{2}}$; $\sqrt{\frac{k}{2}}$; $\sqrt{\frac{k+1}{2}}$, причём разность $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ строго убывает, когда разность по Y фикс. отн. k. Тогда давайте считать $k=1$; $c_1=0$; $c_2=1$. Образуют ромб: $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2};1)$; $(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$; $(0;1)$. Размер этого ромба равен $1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Случай ~~пересечения~~ пересечения Oy — случай $k=0$, $c_1=0$; $c_2=0$. Тогда координаты точек $(0;0)$; $(0;3)$; $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, а площадь — $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ см^2

~~Ответ: $\frac{1}{2}$ см^2~~ Ответ: $\frac{1}{2}$ см^2

Черновик

№5

Пусть уравнение нижн. параболы $y = ax^2+b$ вершины

у фигур лежат на окр. которая делена 3 дуги по $120°$

Если верхняя вершина имеет координаты $(0;1)$, то координаты нижних имеют поворот на $\pm120°$:

~~sin 210°~~ $(\cos 210°; \sin 210°)$ $(\sin 330°; \cos 330°)$

~~(sin 210; sin 330~~ что дает нам координаты

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ с учетом длины вектора, равного 1.

„Нулевые углы" означают, что параболы касаются друг друга в верхних точках, чтобы они не пересекали друг друга и сох. симметрия отн. центра. И общ. касательная была лучом из начала корд.

Угл коэф каной кас в т. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ равен $k = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$= \frac{-1}{\sqrt{3}}$ Осталось найти параметры через геом. смысл производной и через подстановку точек:

$y' = 2ax \Rightarrow 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + b \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$

R впис $= |b| = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

~~[illegible]~~ Чистовик

№4

$0 \le x \le 1$

$-1 \le y \le 1$; $y = \sin k\pi x$; $k \in \{11; 13; 15\}$

Решение

$\sin 11\pi x$; $\sin 13\pi x$; $\sin 15\pi x$ проходят через

$M(0;0)$ $N(1;0)$

Посчитаем кол-во точек

Черновик

$\sqrt{3(1-tg^2x)} = 2\sqrt{2}\sin x$

$3(1-tg^2x) = 8\sin^2 x$

$3 - 3\frac{\sin^2x}{\cos^2x} = 8\sin^2x \;\Big|\cdot\cos^2x$

$3\cos^2x - 3\sin^2x = 8\sin^2x\cos^2x$

$3\cos^2x - 3\sin^2x - 8\sin^2x\cos^2x = 0$

$3\cos^2x - 3\sin^2x - 2\sin^2 2x = 0$

$3\cos^2 2x - 2\sin^2 2x = 0$

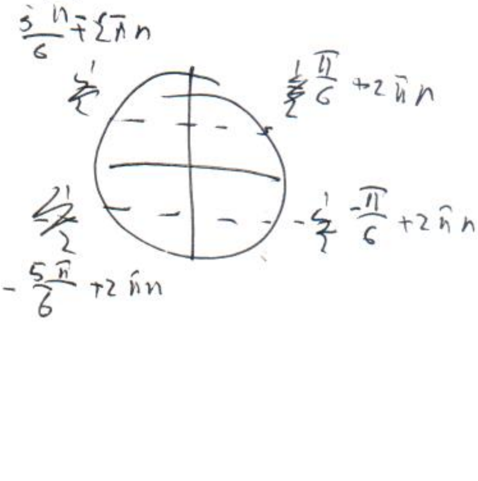
$(\sqrt3\cos2x - \sqrt2\sin2x)(\sqrt3\cos2x+\sqrt2\sin2x)=0$

$\sqrt3\cos2x - \sqrt2\sin2x = 0$ или $\sqrt3\cos2x+\sqrt2\sin2x=0$

$\sqrt3\cos2x = \sqrt2\sin2x$ -

tg $\quad \sin^2 x = \frac{3}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{3}{2}$

$\sin^2x=\frac14 \qquad \sin^2x=\frac14$



$|\sin x| = \pm\frac12$

$\sin x = \pm\frac12$