0 614649 040008

61-46-49-04
(124.22)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Смирнова Ильи Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29». 03. 2026 года

Подпись участника

Ив

 100 (сто)

ЧИСТОВИК

1. (вариант 61). $\sqrt{6(1-ctg^2x)} = 4\cos x$

$$\sqrt{6\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)} = 4\cos x$$

$$\sqrt{\frac{6\sin^2 x - 6\cos^2 x}{\sin^2 x}} = 4\cos x$$

$$\sqrt{\frac{6\sin^2 x - 6 + 6\sin^2 x}{\sin^2 x}} = 4\cos x$$

$$\sqrt{\frac{12\sin^2 x - 6}{\sin^2 x}} = 4\cos x$$

$\Downarrow$ неравносильный переход, нужен отбор корней

$$\frac{12\sin^2 x - 6}{\sin^2 x} = 16\cos^2 x$$

$$12\sin^2 x - 6 = \sin^2 x(16 - 16\sin^2 x)$$

$t = \sin^2 x,\ 0 \le t \le 1$

$$12t - 6 = t(16 - \cancel{t} - 16t)$$

$\cancel{12t - 6 = 16t - t^2}$ $\quad 12t - 6 = 16t - 16t^2$

$\cancel{t^2 - 4t - 6 = 0}$ $\quad 16t^2 - 4t - 6 = 0$

$\cancel{D = 16 + 24 = 40}$ $\quad D = 16 + 384 = 400$

$\cancel{t_1 = \frac{4-\sqrt{40}}{2}}$ $\quad t_1 = \frac{4-20}{32} = -\frac{1}{2}$ (посm.)

$$t_2 = \frac{4+20}{32} = \frac{3}{4}.$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$\sin x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\qquad \sin x = +\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$: $\sqrt{6(1-\frac{1}{3})} = 4\cdot\frac{1}{2}$ – верно

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$: $\sqrt{6(1-\frac{1}{3})} = 4\cdot\frac{-1}{2}$ – неверно

$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$: $\sqrt{6(1-\frac{1}{3})} = 4\cdot\frac{-1}{2}$ – неверно

$x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$: $\sqrt{6(1-\frac{1}{3})} = 4\cdot\frac{1}{2}$ – верно.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

8 ЧИСТОВИК

2(в.6). Если A при делении на сумму своих цифр кратно 9, то A, очевидно, кратно 9, а значит и его сумма кратна 9, значит, A кратно $9 \cdot 9 = 81$.

Переберём все трёхзначные числа, кратные 81:

$162 : (1+6+2) = 18 \vdots 9$

$243 : (2+4+3) = 27 \vdots 9$

$324 : (3+2+4) = 36 \vdots 9$

$405 : (4+0+5) = 45 \vdots 9$

$486 : (4+8+6) = 27 \vdots 9$

$567 : (5+6+7) = 31{,}5$

$648 : (6+4+8) = 36 \vdots 9$

$729 : (7+2+9) = 40{,}5$

$810 : (8+1+0) = 81 \vdots 9$

$891 : (8+9+1) = 49{,}5$

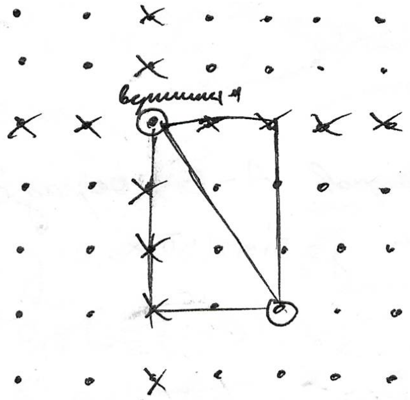
$972 : (9+7+2) = 54 \vdots 9$

A принадлежат 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810 и 972. Значит, искомая сумма $- 162+648+972 = 810+972 = 1782$.

Ответ: 1782.

чистовик

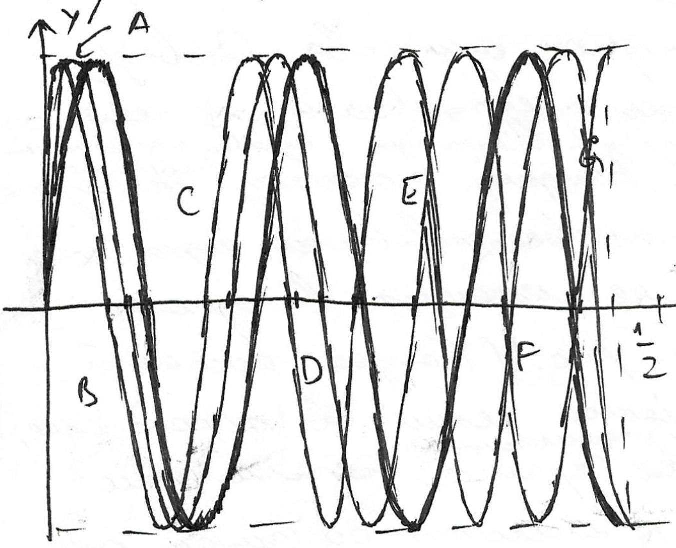
3. Назовём „слоем" ~~...~~ подмножество точек из F,
(в.6) одна из координат которых одинакова. Очевидно, что каждый слой будет представлять из себя 7 столбцов из 7 точек, параллельные или совпадающие с одной из координатных плоскостей. Каждому искомому прямоугольному треугольнику будет соответствовать пара точек (вершин при гипотенузе), не лежащих в одном столбце или строке (см. рис.)(Каждый искомый треугольник лежит в таком слое, т.к. две пересекающиеся прямые, параллельные одной ~~из~~ плоскости, образуют другую, параллельную данной). Т.к. каждой паре будет соответствовать 2 треугольника, но порядок точек в паре неважен, число треугольников в одном слое — $49 \cdot 36 \cdot 2 : 2 = 49 \cdot 36 = 1764$. Значит, т.к. общее число слоёв $7 \cdot 3 = 21$, общее число искомых треугольников — $1764 \cdot 21 = 37044$.



Ответ: 37044.

$$\begin{array}{r} 1764 \\ \times\ 21 \\ \hline 1764 \\ 3528 \\ \hline 37044 \end{array}$$

4. (вариант 6). ЧИСТОВИК



Рассмотрим отдельно каждый из секторов A – G, образованных прямыми $y = \pm 1$ и графиком $y = \sin 11\pi x$.

Точки пересечения графиков:

$\sin k_1 \pi x = \sin k_2 \pi x$

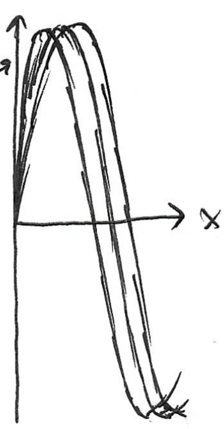
$k_1 \pi x = k_2 \pi x + 2\pi k, k \in Z$ $\qquad$ $k_1 \pi x = k_2 \pi x + \pi + 2\pi k, k \in Z$

$(k_1 - k_2)x = 2k, k \in Z$ $\qquad$ $(k_1 + k_2)x = 1 + 2k, k \in Z$

$x = \frac{2k}{k_1 - k_2}, k \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{1+2k}{k_1 + k_2}, k \in Z$

Сектор A: 3 пересечения графиков друг с другом ($x = \frac{1}{28}$, $x = \frac{1}{26}$, $x = \frac{1}{24}$), 3 пересечения с прямой $y = 1$, создаётся 6 секторов.

Сектор B: также 3 пересечения графиков ($x = \frac{3}{28}$, $x = \frac{3}{26}$, $x = \frac{3}{24}$), 3 пересечения с прямой $y = -1$, итого 6 секторов.



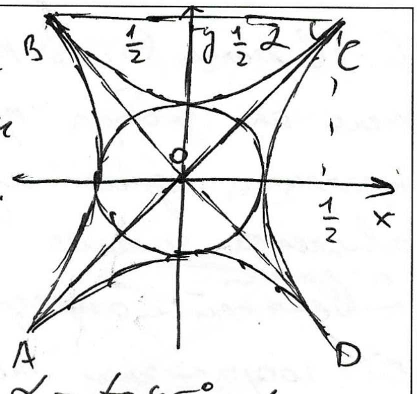
(Аналогично для секторов C, D, E, F.)

Сектор G: при $x = \frac{\pi}{2}$, пересекаются ~~x=~~ $y = -1$, $y = \sin 11\pi x$ и $y = \sin 15\pi x$. Вручную можно посчитать 5 секторов, из которых 1 пересекает $x = \frac{1}{2}$ (т.к. $\sin k\pi x = \sin k\pi(1-x)$, $x = \frac{1}{2}$ – ось симметрии). Так, всего в полосе $(6+6+6+6+6+6+4) \cdot 2n + 1 = 81$ сектор.

Ответ: 81.

61-46-49-04
(124.22)

чистовик



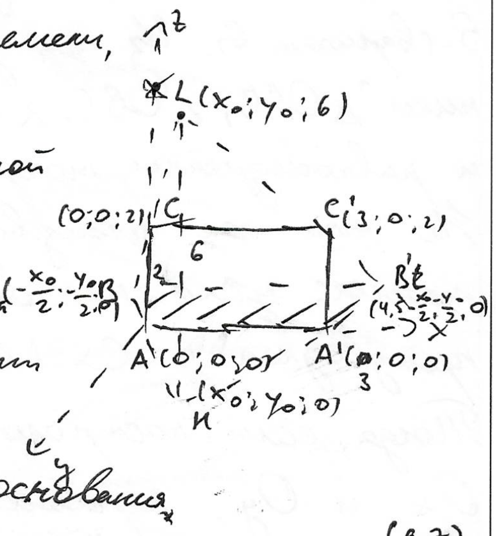
5. (вариант 6). Из ~~ус~~ условия, "треугольники" $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ равны и равнобедренны; тогда $\alpha = 45^\circ$ (см. рис.).
Но так как производная функции — тангенс угла наклона касательной, производная $y = Cx^2 + A$ в точке C — $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,45^\circ = 1$.
Тогда, если построить систему координат с осями Ox и Oy, параллельными BC и AB (см. рис.), верно:

$$\begin{cases} y'(0{,}5) = 1 \\ y(0{,}5) = 0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5C = 1 \Rightarrow C = 2 \\ C \cdot 0{,}5^2 + A = 0{,}5 \Rightarrow A = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25. \end{cases}$$

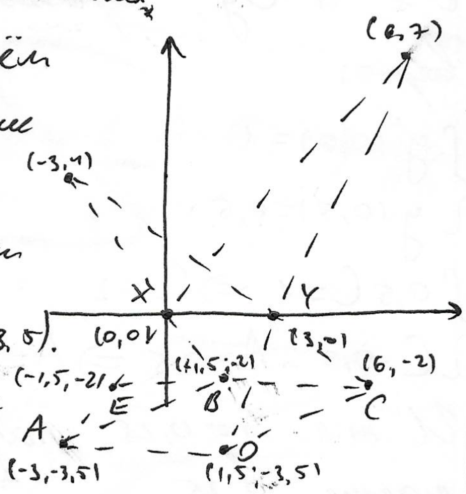
И т.к. $A = 0{,}25$, радиус вписанной окружности — равен $0{,}25$.

Ответ: 0,25



6. (вариант 6). В каждый момент времени, тень от забора представляет собой трапецию, одним из оснований которой является нижняя сторона забора, ~~а верхней~~ а другим — отрезок BB', параллельный ей (координаты точек можно найти из подобия $\triangle LHB$ и $\triangle CAB$, $k=3$).

Зная координаты точек нижнего основания $\left(-\frac{x_0}{2}, -\frac{y_0}{2}, 0\right)$ и $\left(4{,}5-\frac{x_0}{2}, -\frac{y_0}{2}, 0\right)$, найдём все точки на земле, где это основание было. Эти точки представляют собой параллелограмм с вершинами $A(-3, -3{,}5)$, $B(1{,}5; -2)$, $C(6; -2)$, $D(1{,}5; -3{,}5)$.



В каждый момент времени, нижнее основание тени было отрезком, вершины которого лежали на AB и CD и которое было параллельно AD. Тогда затенённая область совпадает с пятиугольником $AXYCD$ ($XYBC$ точки внутри был освещён в начале пути, $XYAD$ — в конце, $ABCD$ было краем тени, т.е. затенены, т.е. все точки внутри были в тени). Площадь $AXYCD = S_{XYBC} + S_{ABCD} + S_{ABX}$; $S_{XYBC} = \frac{(3-0)+(6-1{,}5)}{2}\cdot(2-0) = \frac{3+4{,}5}{2}\cdot 2 = 7{,}5$, $S_{ABCD} = \frac{(6-1{,}5)+(1{,}5+3)}{2}\cdot(3{,}5-2) = 4{,}5\cdot 1{,}5 = 6{,}75$, $S_{ABX} = S_{ABE} + S_{BEX}$; $S_{ABE} = (3{,}5-2)\cdot 3/2 = 2{,}25$, $S_{EBX} = 3\cdot 2/2 = 3$, т.е. $S_{AXYCD} = 7{,}5+6{,}75+2{,}25+3 = 19{,}5$.

Ответ: $S=19{,}5$.

чистовик

8. (вариант 6). $3x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \le 0$ ОДЗ: ~~a>0~~, $x>0$, ~~a≠1~~, $x \ne 1$.

$t = \log_x a$

$\frac{3x^2}{t} - t - 2x \le 0$

$3x^2 - t^2 - 2xt \le 0$

$3x^2 - 2xt - t^2 \le 0$

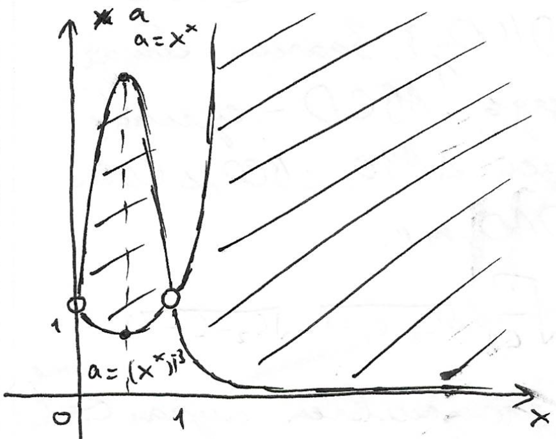
$D = 4t^2 + 12t^2 = 16t^2$

$x_1 = \frac{2t - 4t}{6} = -\frac{1}{3}t$

$x_2 = \frac{2t + 4t}{6} = t$. $(x \in [-\frac{t}{3}; t])$.

① $\log_x a = t = -3x$ ② $\log_x a = x$.

$a = (x^{-3x}) = (x^x)^{-3}$ $a = x^x$.



(Точки внутри заштрихованной области – решения неравенства). Найдём координаты выделенных точек:

$(x^x)' = 0$

$(e^{x \cdot \ln x})' = 0$

$e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = 0$

$\ln x + 1 = 0$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

В таком случае, условие задачи соблюдается при $a = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$ и $a = ((\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}})^{-3} = (e^{-\frac{1}{e}})^{-3} = e^{\frac{3}{e}}$.

Ответ: $a \in \{e^{-\frac{1}{e}}; e^{\frac{3}{e}}\}$.

ЧИСТОВИК

7. Пересечения возникают при:

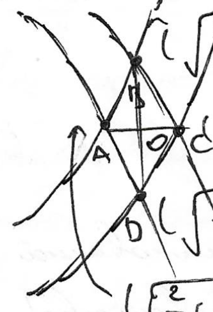
$\frac{3x^2}{4}+C_1=-\frac{3x^2}{4}+C_2$ (примем $C_2>C_1$).

$\frac{3x^2}{2}=(C_2-C_1)$

$x=\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1)}$.

$y=\frac{3}{4}x^2+C_1=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}(C_2-C_1)\right)+C_1=\frac{C_1+C_2}{2}$.

Рассмотрим один из четырёхугольников: ($C_2-C_1>1$)



$\left(\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1)};\ \frac{C_1+C_2+2}{2}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1+1)};\ \frac{C_1+C_2+1}{2}\right)$

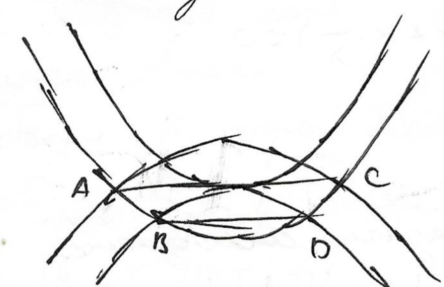
$\left(\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1)};\ \frac{C_1+C_2}{2}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1-1)};\ \frac{C_1+C_2+1}{2}\right)$.

Нетрудно заметить, что координаты по оси y у A и C совпадают, т.е. $AC \parallel Ox$, и $BD \parallel Oy$. Значит, общая площадь $ABCD$ — сумма площадей $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$, т.е.:

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1+1)}-\sqrt{\frac{2}{3}(C_2-C_1-1)}\right)\cdot\frac{2}{2}}{2}=\sqrt{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{C_2-C_1+1}-\sqrt{C_2-C_1-1}\right)$$

(~~Если~~ Здесь особого внимания заслуживает случай ниже: если x двух точек отличается знаком, то получившийся четырёхугольник будет пересекать параболы, т.е. он не может быть искомым).



Найдём такое $x=C_2-C_1>0$, $x\in\mathbb{N}$, что $\sqrt{C_2-C_1+1}-\sqrt{C_2-C_1-1}$ $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$ максимально:

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

(очевиден минимум при $x=1$).

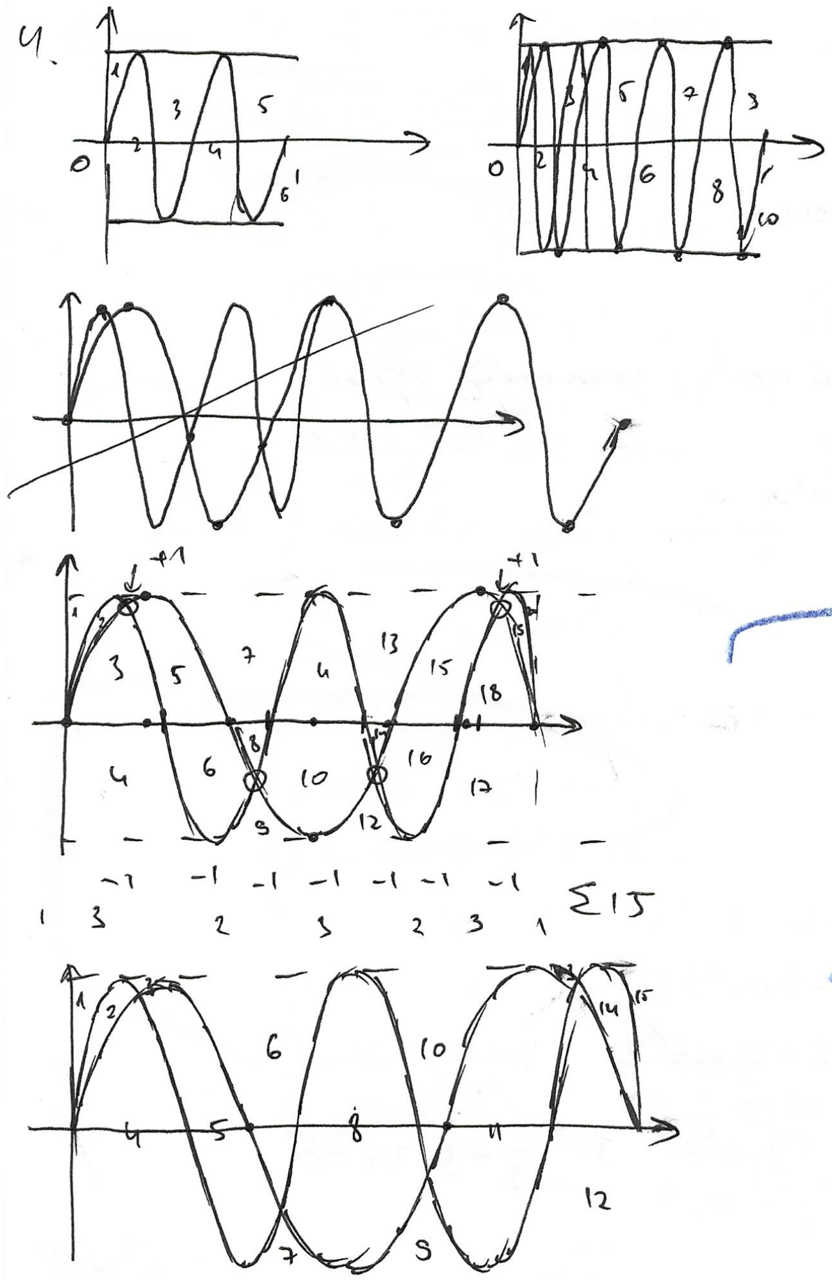
Значит, наибольшая площадь — $\sqrt{\frac{1}{6}}(\sqrt{2}-\sqrt{0})=\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\frac{2}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $S=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Стр. 8

ЧЕРНОВИК

4.



ЧЕРНОВИК

1. $\sqrt{6(1-ctg^2x)}=4\cos x$ ОДЗ: ..

$\sqrt{6(1-\frac{\cos^2x}{\sin^2x})}=4\cos x$

$\sqrt{\cancel{6+\cos^2}\ \frac{6\sin^2x-6\cos^2x}{\cancel{6}\sin^2x}}=4\cos x$

$\sqrt{\frac{6\sin^2x-6+6\sin^2x}{\sin^2x}}=4\cos x$

↓ неравносильный переход; нужен отбор корней

$12\sin^2x-6=4\cos^2x\ \sin^2x$

$12\sin^2x-6=4(1-\sin^2x)\sin^2x$

$t=\sin^2x\ (0\le t\le 1)$

$12t-6=4(1-t)t$

$12t-6=4t-4t^2$

$4t^2+8t-6=0$

$D=64+96=160$

$t_1=\frac{-8-\sqrt{160}}{8}$ (пост.)

$t_2=\frac{-8+\sqrt{160}}{8}=-1+\frac{\sqrt{10}}{2}.$

$3\cdot \cancel{x}^2{}^2\cdot(1-\frac{1}{3})+3-6$ $\cancel{3x^2\cdot\frac{-1}{3}}$

$\cancel{3\cdot 2^2\cdot =}$ $3x^2\cdot\frac{-1}{3}+3-2x=0$