0 003369 450004

00-33-69-45
(122.6)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Соколова Романа Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

13:19 – 13:22
Голубев

+1 лист

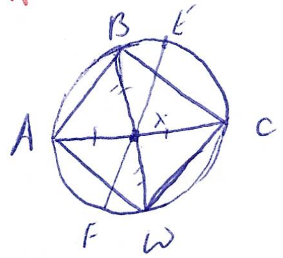
Дата
«29» марта 2025 года

Подпись участника

100(с40)

[ЧИСТОВИК | СТР. 1 из 11]

(1)



Пусть это точка X, хорды, которые делятся пополам, т. X – – хорды AC и BD, третья хорда – EF.

$AX = XC$, $BX = XD$ => в $ABCD$ диагонали делят друг друга пополам => $ABCD$ – пар-м, $\angle ABC = \angle CDA$. Но из вписанности $ABCD$ следует $\angle ABC + \angle CDA = 180°$, $2\angle ABC = 180°$,

$\angle ABC = 90°$, $ABCD$ – прямоугольник, A и C – диаметрально противоположны в окр. $(ABCD)$, B и D – диаметрально противоположны в $(ABCD)$ => т. $X = {}_{пр}AC \cap {}_{пр}BD$ = центр $(ABCD)$. ($(ABCD)$ – окр, описанная ~~в во~~ около $ABCD$). Тогда EF – диаметр (как хорда, проходящая через центр окр) => длина EF = 2·радиус окр = $= 2 \cdot 5 = 10$

Ответ: 10

(2)

n четырёхзначное => $1000 \le n < 10000$ => $10^6 \le n^2 < 10^8$ =>

=> длина n^2 – 7 или 8 ~~слов~~ цифр.

1) длина $n^2 = 7$

$n^2 = \underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{n}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$ => $n^2 = 1000n + 100a + 10b + c$

$n^2 \vdots n$, $1000n \vdots n$ => $100a + 10b + c \vdots n$

Но $100a + 10b + c \le 100 \cdot 9 + 10 \cdot 9 + 9 = 999$, а $n \ge 1000$ =>

=> $100a + 10b + c < n$ => $100a + 10b + c = 0$, $n^2 = 1000n$, $n = 1000$.

(2) (продолж.)

2) $n^2 = 8$

$n^2 = \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{n}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d} = 10000n + 1000a + 100b + 10c + d$

$n^2 \geq 10000n$

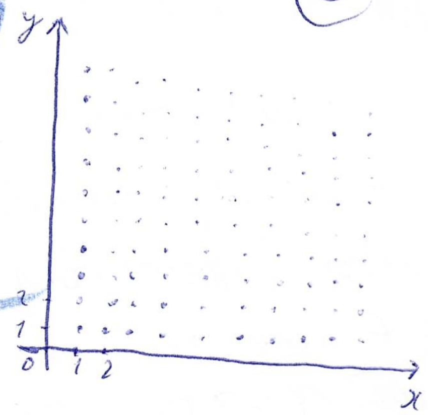
~~$n^2 \vdots n,\ 10000n \vdots n$~~ ~~$n^2 \leq 10000n$~~ (т.к. a, b, c, d – цифры, т.е. ≥ 0)

$n \geq 10000$. Но n – четырёхзначное, т.е. $n < 10000$?!

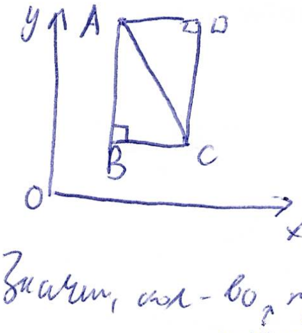
Противоречие => в этом случае решений нет.

Ответ: 1000

(3)



Пусть $\triangle ABC$ с прямым углом B удовлетворяет условию: AB и $BC \parallel$ осям координат, т.е. $\triangle ABC$ прямоугольный.
Тогда каждому такому треугольнику ~~сопс~~ однозначно ~~сопоставляется~~ сопоставляется отрезок ~~AC~~ AC, не параллельный осям координат – его гипотенуза $\triangle ABC$.
С другой стороны, каждый отрезок AC, не параллельный осям координат, является гипотенузой у 2 треугольников: $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, где $AB \parallel$ оси OY, $BC \parallel$ оси OX, $AD \parallel$ оси OX, $DC \parallel$ оси OY (т.к. катеты $\parallel$ ~~осям координат)~~ коорд. осям)!



Значит, кол-во прямоуг. ~~треух~~ треугольников с катетами, $\parallel$ коорд. осям, в 2 раза больше, чем кол-во отрезков AC, не параллельных коорд. осям.

3 (прод.)

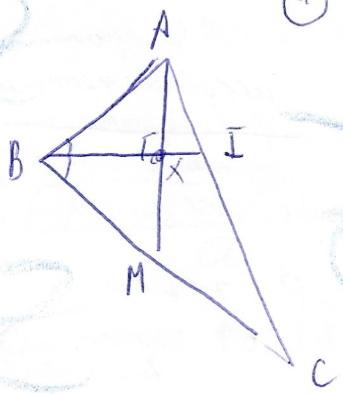
~~Посчитаем~~ кол-во способов выбрать такие отрезки.
Посчитаем

Т. А выберем произвольно. Тогда мы не можем выбрать $C=A$, не можем выбрать C в том же столбце, что и A (столбец $\parallel OY$) не можем выбрать C в той же строке, что и A (строка $\parallel OX$). Все остальные точки C подходят. Нам не подходит $1+9+9=19$ точек, $\Rightarrow$ нам подходит $100-19=81$ точка (точек всего 100, 10 столбцов $\times$ 10 строк). Значит, всего способов выбрать отр. AC $\frac{100 \cdot 81}{2}$ (деление на 2, т.к. каждый отрезок XY посчитан дважды: $X=A$, $Y=C$ и $X=C$, $Y=A$.)

Кол-во искомых треугольников $= 2 \cdot \frac{100 \cdot 81}{2} = 100 \cdot 81 = 8100$

Ответ: 8100

4



Лемма. $AM \perp BI \Leftrightarrow AB = \frac{BC}{2}$

Док-во. 1) $AM \perp BI \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$

Пусть $X = \text{т. } AM \cap \text{пр. } BI$. $\angle BXA = 90° \Rightarrow$ в $\triangle ABM$ высота и бисс. из верш. B совпадают $\Rightarrow \triangle ABM$ равнобедренный, $AB = BM$.

$BM = MC$ (т.к. AM – медиана) $\Rightarrow BC = BM + BC = 2BM = 2AB$,

$AB = \frac{BC}{2}$, ЧТД

2) $AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM \perp BI$.

Пусть $X = \text{пр. } AM \cap \text{пр. } BI$. $AB = \frac{BC}{2}$, $BM = \frac{BC}{2}$ (т.к. BM – медиана) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABM$ равнобедренный ($AB = BM$), в $\triangle ABM$ бисс. и высота из

4 (прод.)

т. B совпадают, $BX \perp AM$, $BI \perp AM$, ЧТД.

Значит, $AM \perp BI \Leftrightarrow AB = \frac{BC}{2}$, $BC = 2AB = 14$

~~Из~~ Из AB, BC, AC собирается треугольник <=>

для AB, AC, BC выполняется нер-во треугольника:

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < BC + AB \\ BC < AB + AC \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 < 14 + AC \text{ — выполняется всегда} \\ \cancel{14 < 7 + AC} \\ AC < 7 + 14 \\ 14 < 7 + AC \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC < 21 \\ AC > 7 \end{cases}$$

Т.к. длина $AC \in \mathbb{Z}$, $AC < 21$ и $AC > 7$, то AC принимает любое целое знач. из $[8, 20]$. Условие на ~~неравнобедренность~~ неравнобедренность ~~делает~~ добавляет огр. $AC \neq 7$, $AC \neq 14$

$P = AB + AC + BC = 21 + AC \Rightarrow P$ прин. любое целое знач из $[8+21, 20+21] = [29, 41]$. Т.к. $AC \neq 14$, $P \neq 21 + 14 = 35$ ($7 \notin [8, 20]$, это огр. выполняется)

Ответ: P – любое из $[29, 41]$, $P \in \mathbb{Z}$, кроме 35.

~~5~~ 6

$$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \leq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$\frac{a^2 + 2ax - 3x^2}{a^3} \leq 0$$

$$\frac{-3(x-a)(x+\frac{a}{3})}{a^3} \leq 0$$

6 (прод.)

1) $a>0$

$-3(x-a)(x+\frac{a}{3}) \le 0$ | домножим обе стороны на $a^3>0$ |

$(x-a)(x+\frac{a}{3}) \ge 0$ (делим. обе стороны на $\frac{1}{-3}<0$)

Рассм. ф-цию $f(x)=(x-a)(x+\frac{a}{3})\ge 0$, найдем ее корни:

$x=a$, $x=-\frac{a}{3}$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{a}{3} \quad a \quad x$

$(a>0>-\frac{a}{3})$

~~Ответ~~ Решение нер-ва: $x\in(-\infty,-\frac{a}{3}]\cup[a,+\infty)$ – 2 бесконечных интервала, т.е. не отрезок длины 2026, => решений нет

2) $a<0$

$-3(x-a)(x+\frac{a}{3})\ge 0$ (делим. обе стороны на $a^3<0$)

$(x-a)(x+\frac{a}{3})\le 0$ (делим. обе стороны на $\frac{1}{-3}<0$)

Рассм. ф-цию $f(x)=(x-a)(x+\frac{a}{3})$, найдем ее корни:

$x=a$, $x=-\frac{a}{3}$

$+ \quad - \quad +$

$a \quad -\frac{a}{3} \quad x$

Решение нер-ва: $x\in[a,-\frac{a}{3}]$ $(-\frac{a}{3}>0>a)$ (т.к. $a<0$)

Это должен быть отрезок длиной 2026, => $-\frac{a}{3}-a=2026$

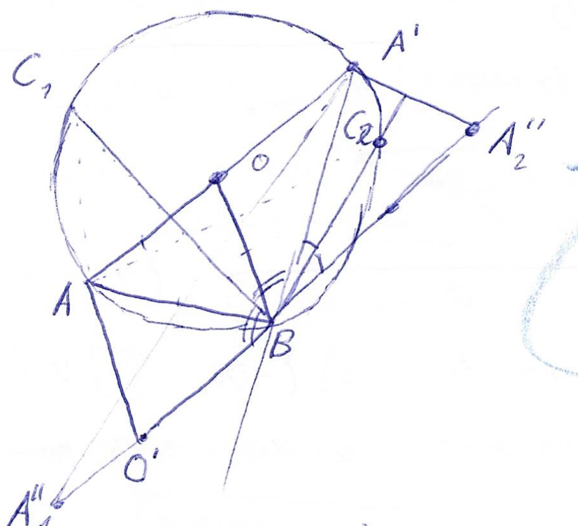
$-\frac{4a}{3}=2026$

$-4a=2026\cdot 3$

$a=\frac{-2026\cdot 3}{4}=\frac{-1013\cdot 3}{2}=-\frac{3039}{2}$ – единственный подходящий ответ

Ответ: $a=-\frac{3039}{2}$

7



Решение:

~~Как централ~~ Центральный угол в 2 р. больше вписанного, ~~вп~~ опирающегося на ту же дугу $\Rightarrow \angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$

$OA = OB$ как радиусы окр. $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA = \frac{180 - \angle AOB}{2} = \frac{180-60}{2} = 60^\circ \Rightarrow$ ($\triangle OAB$ равнобедр.)

$\Rightarrow \triangle OAB$ равносторонний, $OA = OB = AB$. ~~$\angle AO$~~ $\angle ABO' = \angle ABO$ из симметрии $= 60^\circ \Rightarrow \angle O'BO = 120^\circ$.

Пусть A' диаметрально противоположна A в (ABC). Тогда из симметрии: $A'B =$ ~~AB~~ $A''B$, $A'A'' \perp BC \Rightarrow$ т.к. BC – высота из вершины в равнобед. треуг. $A'BA'' \Rightarrow BC$ – бисс. угла между прямыми $A'B$ и $BO \Rightarrow$

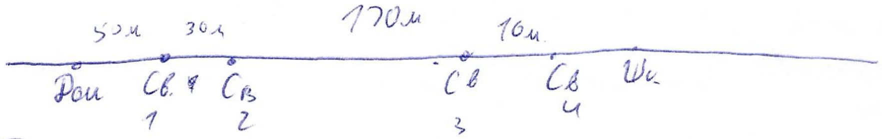
$\Rightarrow BC$ – бисс. угла между прямыми $A'B$ и BO'. (т.к. B, O', A'' на 1 прямой). Таких биссектрисс 2, на чертеже они отмечены как BC_1 и BC_2 ($C_1, C_2 \in (ABC)$), а образы A' при симметрии относ. BC_1 и BC_2 – A''_1 и A''_2 соответственно. (BC_1 – бисс. в $\triangle AA'B$, BC_2 – внешняя бисс. в $\triangle ABA'$)

$\angle ABA' = 90^\circ$ (т. A и A' диаметр. противоположны в (ABC), $B \in (ABC)$).

$\angle ABO' = 60^\circ \Rightarrow \angle O'BA' = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, $\angle C_1BA' = \frac{150}{2} = 75^\circ$, $\angle A'BA_2'' = 180^\circ - \angle A'BO' = 30^\circ$, $\angle A'BC_2 = \frac{\angle A'BA_2''}{2} = 15^\circ$. $\angle ABC_1 = \angle ABA' - \angle C_1BA' = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$; $\angle ABC_2 = \angle ABA' + \angle A'BC_2 = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ \Rightarrow$ ответ 15° или 105°

Ответ: 15° или 105°.

5



Пусть скорость Агриппины v м/мин, начальное время = 0

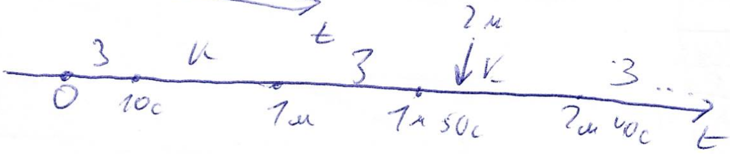
1) $v \leq 100 \frac{м}{мин}$.

Если $v > 100 \frac{м}{мин}$, то до 1 светофора она доедет за время $= \frac{50 м}{v} <$

$< \frac{50 м}{100 \frac{м}{мин}} = \frac{1}{2}$ мин, т.е. светофор для машин всё ещё будет красным.

Противоречие $\Rightarrow v \leq 100 \frac{м}{мин}$

2) Если $v \leq 100 \frac{м}{мин}$, то до 3 светофора Агриппина доедет за $t \geq 2$ мин. ($t = \frac{200}{v} \geq \frac{200}{100} = 2$) Первые 10 сек. светофор для пешеходов зелёный, потом 50с. красный, 50с. зелёный, 50с красный...



Поскольку Агриппина приезжает к 3 светофору за ≥ 2 мин, а ближайший зелёный – 2м. 40с. ~~Агриппи~~ $v \leq \frac{200 м}{2м\ 40с} =$

$= \frac{200 м}{160 с} = \frac{5}{4}$ м/с $= \frac{50 \cdot 6}{4}$ м/с $= 75$ м/с

3) Возвращаемся к первым 2 светофорам. К 1 светофору Агриппина подъедет ~~через~~ через $\frac{50}{75}$ минут $= \frac{50}{\frac{5}{4}}$ с после отъезда, т.е. через $\frac{50}{\frac{5}{4}} = 40$с, а ко 2 через $\frac{80}{75}$ минут $= \frac{80}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$ сек.
Этот светофор красный с 0 до 30 с, зелёный с 30 до 80 сек $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Агриппина проедет через него. 3 светофор она проезжает через 2 м 40с – в момент зелёного света, как доказано ранее, через 4 – через $\frac{10}{\frac{5}{4}} = 8$ сек после пересечения 3-го, т.е. через 2 м 48с.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЧИСТОВИК | СТР. 8 из 11

5 (прод)

От начала, т.к. 2 переход тоже будет работать на зелёный

Значит, ответ: 75 $\frac{м}{мин}$

Ответ: 75 $\frac{м}{мин} = \frac{5}{4}\ \frac{м}{с}$

8

Задачу можно понять ~~несколькими способами~~,

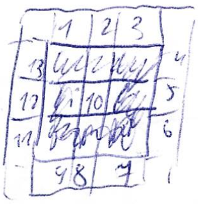
~~перед оба понимать.~~

~~1) Какова вероятность~~

~~$P(A \cap B$~~

Рассмотрим 2 вар-та ~~толкования~~ понимания вопроса

1) Какая вероятность получить квадрат при условии, что до того получено кольцо?



На чертеже были пронумерованы все клетки, на которые робот может закрасить (их 13), подходит 1 (№ 10) => вероятность $\frac{1}{13}$

1) Ответ: $\frac{1}{13}$

2) Какая вероятность того, что робот нарисует кольцо, и потом превратит его в квадрат?

В п. 1 посчитали $P(A|B)$, где A = ~~1 серва~~ (закрашен квадрат 3×3), B = (закрашено кольцо ~~за~~ первыми 8 действиями)

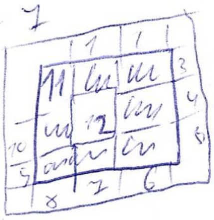
Сейчас мы ищем $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Найдём $P(B)$:

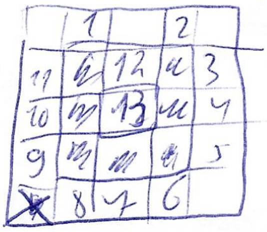
Положим, у нас уже построена связная часть кольца из n клеток. ($3 \le n < 8$). Найдём P того, что ~~n+1-я тоже попадёт на кольцо~~ кольцо будет достроено при данном условии:

(п. i. j) - пункт $n = i$, подпункт j.

$n = 7$



п. (7.1)

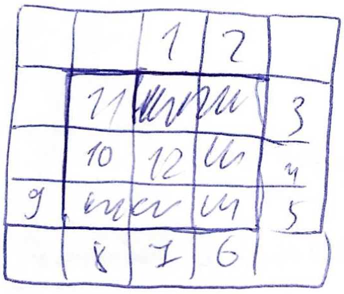


п. (7.2)

Если недост. клетка-угол, то $P = \frac{1}{12}$

Иначе $P = \frac{1}{13}$ (симметричные клетки, которые может покрасить робот)

$n = 6$



п. (6.1)

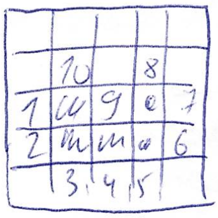
Часть кольца связна =>
=> этот вар-т единственный с точностью до поворота и симметрии!

~~…~~ С вер. $\frac{1}{12}$ закрашена будет 11 клетка и P достроения = $\frac{1}{12}$ п. (7.1), с вер. $\frac{1}{12}$ закрашена будет 10 клетка и P достроения = $\frac{1}{13}$ (по 7.2), остальные нам не подходят =>

$$=> P = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right) = a_6$$

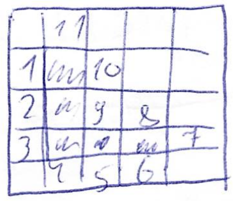
$n = 5$

$n = 5$ (8) (продолж.) Чистовик | стр. 10 из 11



(5, 1)

(5, 2)



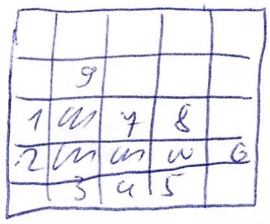
Если 2 угла ~~на~~ кольца непосредственны, ($P = \frac{2}{10}$) ~~дост~~ кольцо будет доступно до (6, 1) =>

$\Rightarrow P = \frac{1}{5} a_Б$

Иначе дост. до (6, 1) ($P = \frac{2}{11}$ =>

$\Rightarrow P = \frac{2}{11} a_Б$

$n = 4$



(4, 1)

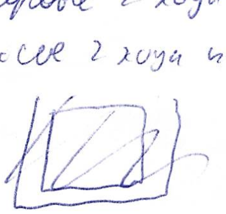
Из-за связности элементов кольца, это расположение — единственно с точностью до симметрии и поворота ($P = \frac{1}{9}$ ~~роб~~ робот достигнет кольцо до (5, 1) ($P = \frac{1}{9}$ — до 5, 2 (на 9 кл.) => (на 8 кл.)

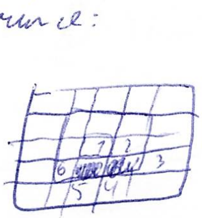
$\Rightarrow P_{дост.\ в\ 1\ сл.} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \cdot a_Б$, $P_{дост.\ во\ 2\ сл.} = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{9} \cdot a_Б \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{дост.} = a_Б \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right)$

Теперь найдём вероятность того, что робот получит из ничего (4, 1)

Первые 2 хода совпадут => с точностью до симметрии после 2 хода получится:



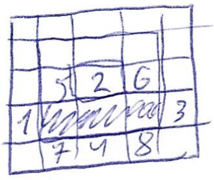


00-33-69-45
(122.6)

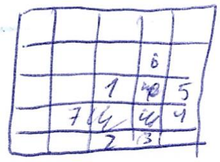
8 (прод.) ЧИСТОВИК | СТР. 11 из 11

С вер. $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ получим случай 3.1, ~~в остальных~~ выбор 6 из 3

С вер. $P = \frac{2}{3}$ 3.2 (с точностью до симметрии и поворота): 6 или 3



3.1



3.2

Достроение до (4.1) с $P = \frac{1}{3}$ (5, 6, 7 или 8 метки) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{дост_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) \cdot a_6$

Дост. до (4.1) с $P = \frac{2}{7}$ (6 или 7 метки) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{дост_2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) a_6$

Значит, P постр. кольца $= \frac{1}{3} P_{дост_1} + \frac{2}{3} P_{дост_2} =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) \cdot a_6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) a_6 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{21}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) \cdot \frac{1}{9} \cdot a_6 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{21}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right) \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= \left(\frac{7+8}{42}\right)\left(\frac{11+10}{55}\right) \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{13+12}{12 \cdot 13}\right) \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{15}{42} \cdot \frac{21}{55} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{12 \cdot 13} \cdot \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{3}{11}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{12 \cdot 13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{2 \cdot 9 \cdot 12^2 \cdot 13} = \frac{25}{18 \cdot 13 \cdot 144}\right) =$$

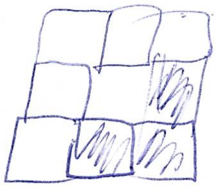
$$= \frac{25}{33696} \cdot \frac{3}{11}$$

Вот $P(B) = \frac{25}{33696} \cdot \frac{3}{11}$, $P(A|B) = \frac{1}{13} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1 \cdot 3}{13 \cdot 11} \cdot \frac{25}{33696} =$

$$= \frac{25}{438048} \cdot \frac{3}{11} = \frac{25}{1606176}$$

и) Ответ: ~~$\frac{25}{438048}$~~ $\frac{25}{1606176}$

ЧЕРНОВИК



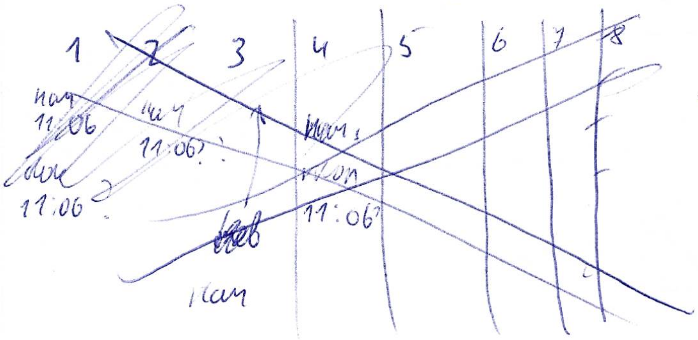
18
+13
54
+18
234
+144
936
+936
234
33696
+13
101088
+33696
438048

3 | 146016
3
15
12
18
18
0

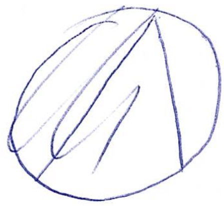
146016
11

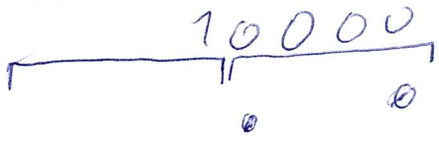
146016
+146016
1606176

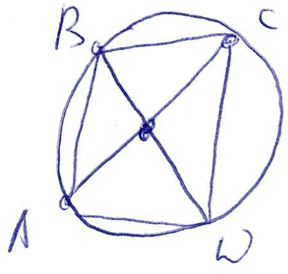
ЧЕРНОВИК



8 чело??



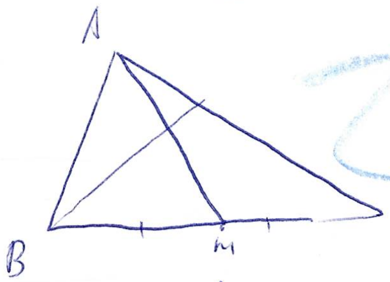


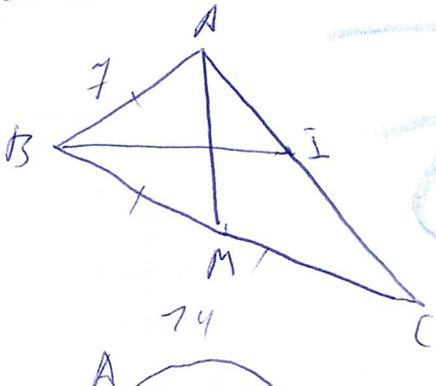


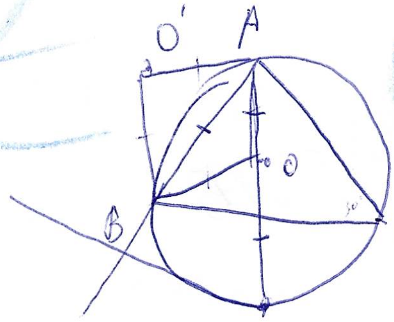
~~abcd00~~ ~~a0000~~

$$\frac{a^2+2ax-3x^2}{a^3}=$$

$$=\frac{-3(x-a)(x+\frac{a}{3})}{a^3}$$



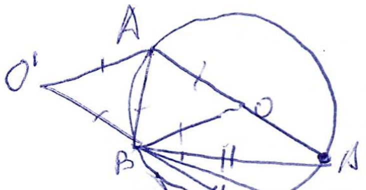




1000

$n^2=n\cdot10^d$

$n=10^d$ $d=3$



$n^2=10000n+dn$, $d\in[0,9]$

$n=10000+d$!