0 324119 400002

32-41-19-40
(124.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Солодова Дмитрия Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «29.» 03. 2026 года

Подпись участника

 100 (сто)

32-41-19-40 (124.6)

Черновик.

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$\begin{cases}\sin x>0\\ 6-6tg^2x=16\sin^2x\end{cases}$

$\frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2x=1+\frac{1}{tg^2x}=\frac{tg^2x+1}{tg^2x}$

$\sin^2x=\frac{tg^2x}{tg^2x+1}$

$\begin{cases}\sin x>0\\ \frac{\cancel{6tg^2x}+6-6tg^4x\cancel{-6tg^2x}-16tg^2x}{tg^2x+1}=0\end{cases}$

$6t_2^2+16t-6=0$

$3t^2+8t_2-3=0$

$(t^2+3)(t-\frac{1}{3})$

$\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-3=0$

$(100-x)(100-1)=$
$=1000-110+1=$
$=891$

$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}:(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{x_1x_2x_3}$
$x_1\neq 0$

$\frac{100x_1+10x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3}=9\cdot m$

$-4;4$ — 9 точек

$(x_1;y_1;z_1)$ $(x_2;y_1;z_1)$

1, 0, 1
1, 1, 0
0, 1, 1.

$9\cdot 8$ — вариантов для Ox

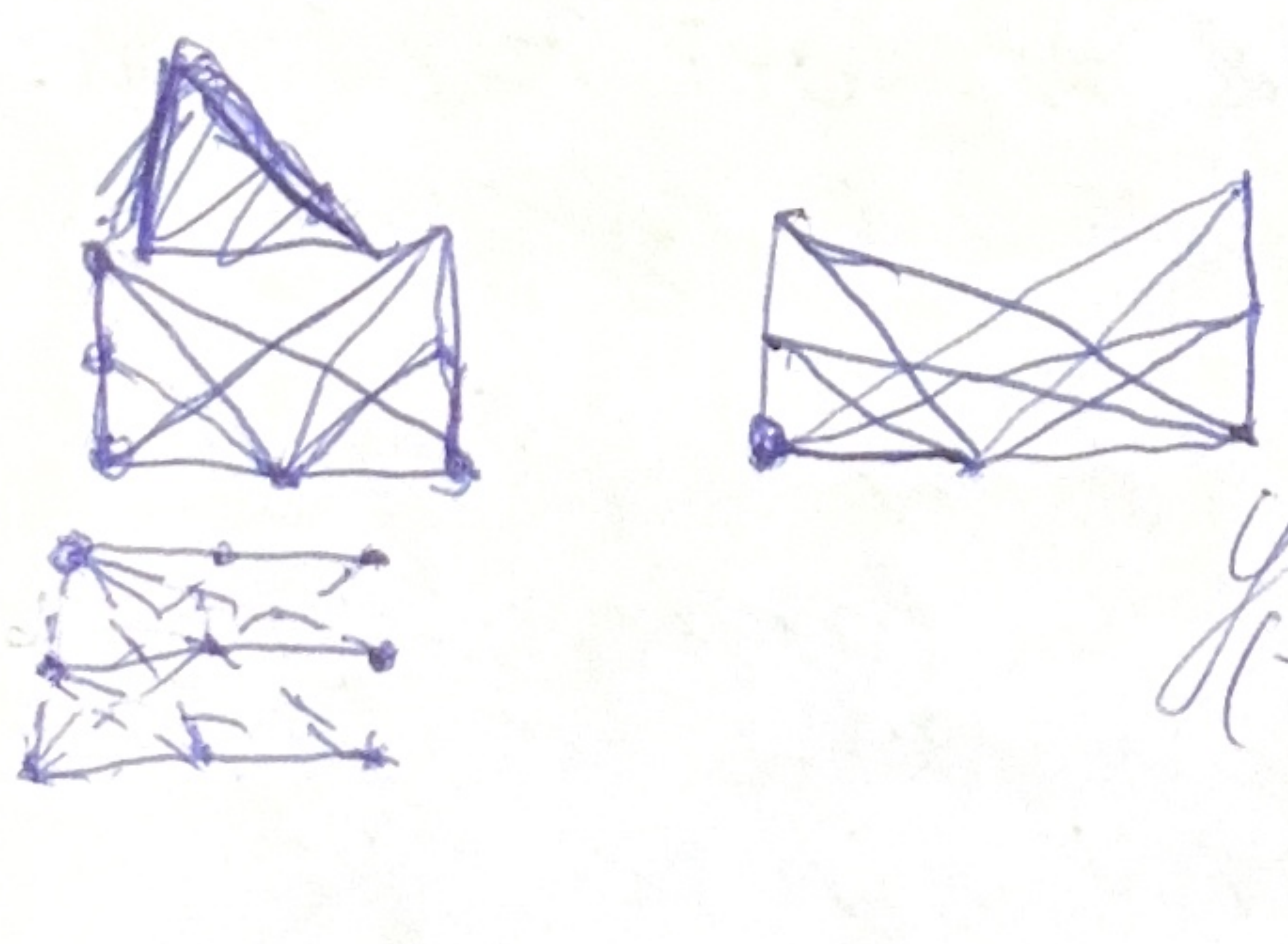
$9\cdot 8$ — вар. для Oy

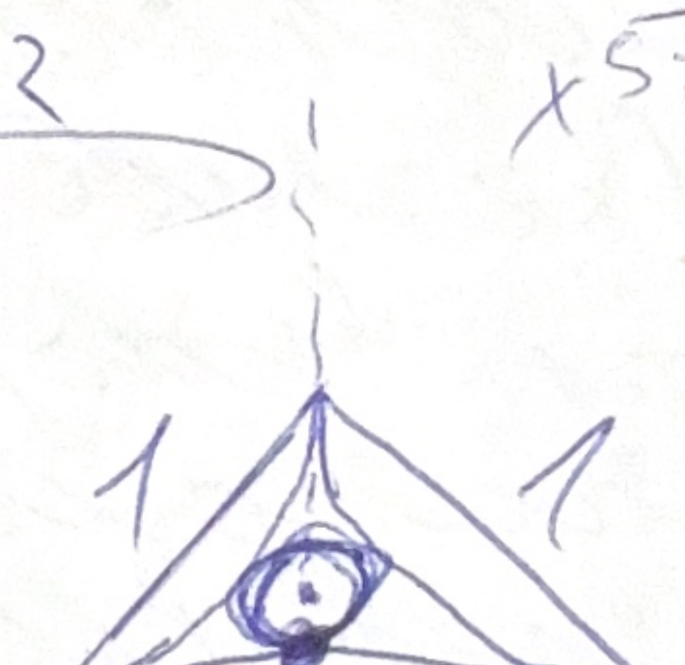
9 — вариантов расп. Oz

72×72
144
504
5184

$\times 5184$

~~$9\cdot 8\cdot 9\cdot 8\cdot 9=27\cdot 72^2$~~





$-Cx^2$

$y=0=b-Cx^2$

$(-\frac{1}{2});(\frac{1}{2})$ $b-\frac{c}{4}=0\Rightarrow\frac{c}{4}=b$

Чистовик

№1.

$\sqrt{6(1-tg^2x)}=4\sin x$

$\begin{cases} 6-6tg^2x=16\sin^2x \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{6tg^2x+6-6tg^4x-6tg^2x-16tg^2x}{tg^2x+1}=0 \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6tg^4x+16tg^2x-6=0 \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (tg^2x-\frac{1}{3})(tg^2x+3)=0 \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} tg\,x=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ tg\,x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$

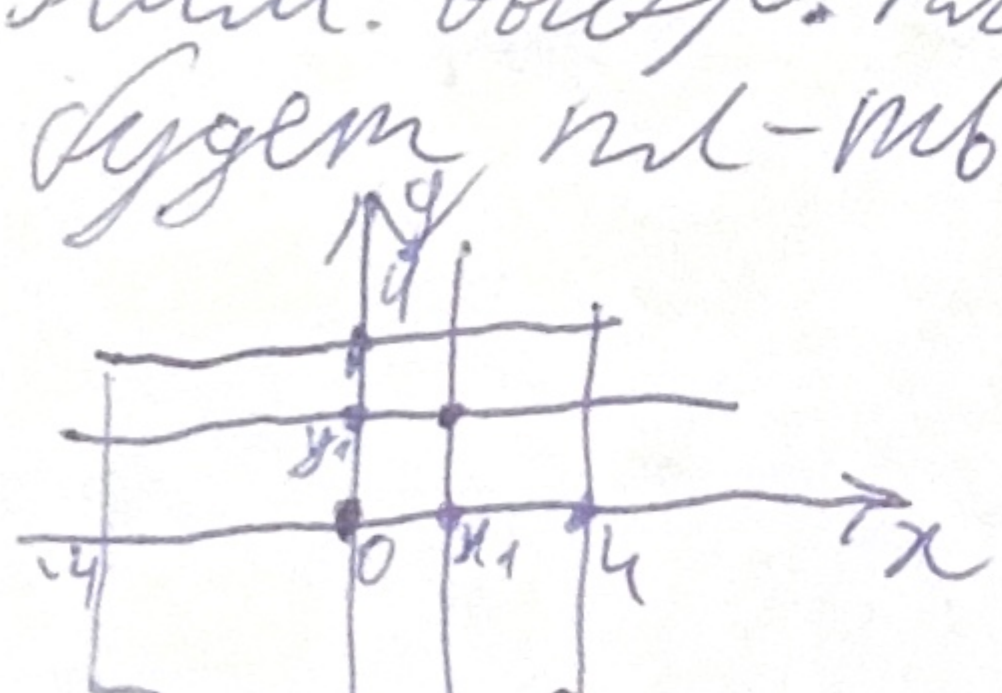
Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

№3.

Т.к. каждый из катетов пар-ен осям ко-нат, ~~по~~ значит прямоуг. треугольник будет лежать в ~~одной~~ ~~из~~ в плоскости, которая пар-на либо Oxz, либо Oxy, либо Oyz $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 вар. выбора пл-ти и 9 вариантов расположения этой пл-ти.

Т.к. выбр. плоскость б.о.о пусть будет пл-ть $\parallel Oxy$.



У нас 9 вариантов прямой $\parallel Ox$ и 9 вариантов прямой $\parallel Oy$ и удовл. мн-ву F, тогда они пересекутся

Чистовик.

№3 (продолжение)

в точке (x_1, y_1); $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ и $x_1, y_1 \in [-4; 4]$. т.к. прямые $\perp$, значит чтобы обр. прямоуг $\triangle$, надо чтоб оставшиеся точки треуг. ~~эту~~ $\in$ прямым $\parallel Ox$ и $\parallel Oy$ соотв-ветственно, таких ~~обра~~ вариантов расположений по 8 на каждую прямую.

Кол-во прямоуг. $\triangle$: $3 \cdot 9 \cdot 9^2 \cdot 8^2 = 139968$

Отв: 139968.

~~№~~ №4.

Найдем т. пересечения всех синусоид друг с другом.

$$\left[\begin{array}{l} \sin 13x = \sin 15x \ (1) \\ \sin 13x = \sin 17x \ (2) \\ \sin 15x = \sin 17x \ (3) \end{array}\right.$$

т. пересеч. в верш.

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2\left(\frac{13\pi}{30} + \frac{13\pi l}{15}\right) = 1 \\ \sin^2\left(\frac{13\pi}{28} + \frac{15\pi n}{14}\right) = 1 \\ \sin^2\left(\frac{15\pi}{32} + \frac{15\pi k}{16}\right) = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = m \\ x = \frac{1}{28} + \frac{1}{14}n \ (1) \\ x = \frac{1}{32} + \frac{1}{16}k \ (2) \\ x = \frac{1}{30} + \frac{1}{15}l \ (3) \end{array}\right. \quad m, n, k, l \in \mathbb{Z}$$

$l = 7 + 15\lambda, \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ед. $\in [0; 1]$

$15\pi \pm 14\pi = 56\pi\beta - 30\pi$ — не имеет реш. в $\mathbb{Z}$

$15\pi \pm 16\pi = 64\pi\delta - 30$ — не имеет реш. в $\mathbb{Z}$

все синусоиды пересекутся одновременно в точке $(1, 0)$ и больше таких точек нет. ~~Д.к.~~ Д.о.о.: $\frac{1}{28} + \frac{1}{14}n = \frac{1}{30} + \frac{1}{15}l \Leftrightarrow 14l - 15n = \frac{1}{2}$

(гасм.)

аналогично для остальных т. пересеч. нет реш при целых m, k, l. таким образом их пересечения при $k = 7, l = 0$ и $k, n, l = 1$ выглядит так:

~~от~~ каждое ~~пересек~~ пересечения образуют по ~~8~~ 4-ре новых плос-тва ~~с концами лентами~~, таким образо ~~[illegible]~~ будет ~~[illegible]~~ пл-тей, дальше ~~приводят~~ пересечения

Чистовик.

№4 (продолжение)

$\sin 13\pi x$ и $\sin 17\pi x$ ~~крайние~~ вт. (11), тогда будет 4-ка

при подсчете пл-тей получится

$80+7+6=93$ т.к.

последняя не 4-ка

Ответ: ~~93~~ 93

№8.

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$\frac{8x^2\log_a x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \le 0$

$\frac{(x\log_a x - \frac{1}{2})(x\log_a x + \frac{1}{4})}{\log_a x} \le 0$

~~При $a>1$~~

~~$\begin{cases} \frac{(x\log_a x - \frac{1}{2})(x\log_a x + \frac{1}{4})}{(a-1)} \le 0 \\ x>0 \end{cases}$~~

$f(t)=t\log_a t$

$f'(t) = \log_a t + \frac{1\cdot t}{\ln a\cdot t} = \log_a t + \log_a e = \log_a te$ сравним с 0.

$\begin{cases} \frac{te-1}{(a-1)} \vee 0 \\ t>0 \end{cases}$ $\frac{1}{e}$ t при $a>1$ а при $a<1$ наоборот

при $a>1$ $x\log_a x$ ↑ и непр.

$\frac{(x\log_a x - \frac{1}{2})(x\log_a x + \frac{1}{4})}{(x-1)} \le 0$ имеет реш. в виде двух полуинтервалов.

32-41-19-40 (124.6)

~~чер~~ Чистовик.

№8 (продолжение)

~~при $0<a<1$~~ ~~$x\log_a x$ ↓ и непр.:~~

~~$$\frac{(x\log_a x-\frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{x-1}\geq 0$$~~

~~~~имеет~~ при $x>1$ $x\log_a x<0$ а~~
~~значит ответом будет~~
~~половину ~~интервал~~ до реш. $x\log_a x=-\frac{1}{4}$,~~
~~и при $x<1$, $x\log_a x+\frac{1}{4}>0$, $x-1<0$~~

~~при чём при $x>1$ реш. бу~~

а значит надо чтобы точка min совпала с ~~реш.~~ $-\frac{1}{4}$.

~~$x\ln x=-\frac{1}{4}$~~ $\frac{1}{e}\cdot\log_a\frac{1}{e}=-\frac{1}{4}$

$a^{-\frac{e}{4}}=\frac{1}{e}$ $\qquad e^4 \vee 1$, $e^4>1$

$a^{\frac{e}{4}}=e$

$a=\sqrt[e]{e^4}$ подходит.

при $a<1$:

$f(x)$ ↓ и непрерывна:

$$\frac{(x\log_a x-\frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{x-1}\geq 0$$

точка max должна совпасть с ~~реш.~~ ~~$x\ln$~~ $-\frac{1}{4}$, и это $a=\sqrt[e]{e^4}$

Отв: $\sqrt[e]{e^4}$

№2

т.к $(\overline{abc}:(a+b+c)):9 \Rightarrow \overline{abc}:9 \Rightarrow (a+b+c):9$ (по признаку делимости) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{abc}:81 \Rightarrow$ надо проверить кратно ли $\overline{abc}$ сумме цифр $\Rightarrow$ числа 567, 729, 891 имеют чет. сумму, а сами нечетны, не подходят.

Ответ: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972, сумма равна 1539.
~~~~

$\frac{1}{2}\left(\frac{15-14}{15\cdot 14}\right)=$ Черновик. $\frac{\pi}{2}>1$

~~$\sin 15\pi x = \sin 13\pi x$~~

~~$15\pi x = 13\pi x$ никогда~~

~~$13\pi x = \pi - 15\pi x + 2\pi n$~~

~~$13x = 1 - 15x$~~

~~$x = \frac{1}{28} - 2m$~~

$4R^2 - R^2 = 1$

$3R^2 = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$-Cx^2 + \frac{c}{4} =$ $\frac{c}{4} + R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$2r$ r

$\frac{\pi}{26}$; $\frac{\pi}{30}$; $\frac{\pi}{34}$; $\frac{3\pi}{26}$, $\frac{3\pi}{30}$, $\frac{3\pi}{36}$

$\frac{2r}{R} = \frac{r}{\frac{c}{4}+r}$

$2r^2 + \frac{c}{2}r = Rr$

$2r + \frac{c}{2} = R$

$\left[\begin{array}{l} 15x + 2n = 13x + 2n \\ 13x = 1 - 15x + 2n \end{array}\right.$

$x = 2m$

$x = m$

$28x = 1 + 2m$

$x = \frac{1}{28} + \frac{1}{14}m$

$\frac{1}{28} + \frac{1}{14}n = \frac{1}{30} + \frac{1}{15}l$

$\frac{28}{1+2n} \leq 28$

$1 + 2n \leq 28$

$n \leq \frac{27}{2} \leq 13$

$1 + 2m < 1$

$15x = 1 - 17x$

$32x = 1$

$k \leq \frac{31}{2} \leq 15$

$l \leq \frac{29}{2}$

$l \leq 14$

$14n - 15l = 2$

$\frac{2(15-14)}{2\cdot 15\cdot 14} = \frac{14n - 15l}{15\cdot 14}$

$n = -2 + 15$, $l = -1 + 14$

$n = 13$ $\frac{1}{2}$ нет.

Черновик.

$x_1 \neq 0$

$\frac{100x_1+10x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3} = 9\cdot m$

$100x_1+10x_2+x_3 = 9mx_1+9mx_2+9mx_3$

$(100-9m)x_1+(10-9m)x_2+(1-9m)x_3=0$

№8.

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \le 0$

$8t^2-2t-1$

t^2-2t-8

$(t-4)(t+2)$

$\frac{8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1}{\log_a x} \le 0$

$\frac{8(x\log_a x - \frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{\log_a x}\le 0$

$(x\log_a x)' = 1\cdot(\log_a x) + x\cdot\log_a x' =$

$=\log_a x + \frac{1}{\ln a} = \log_a x + \log_a e$

VO

$\frac{(x-\frac{1}{2})}{a-1}$ VO

непр. ф.
принимает все отр. зн.

$a>1$ непр.

$\frac{(x\log_a x - \frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{(x-1)}\le 0$

$x>1$

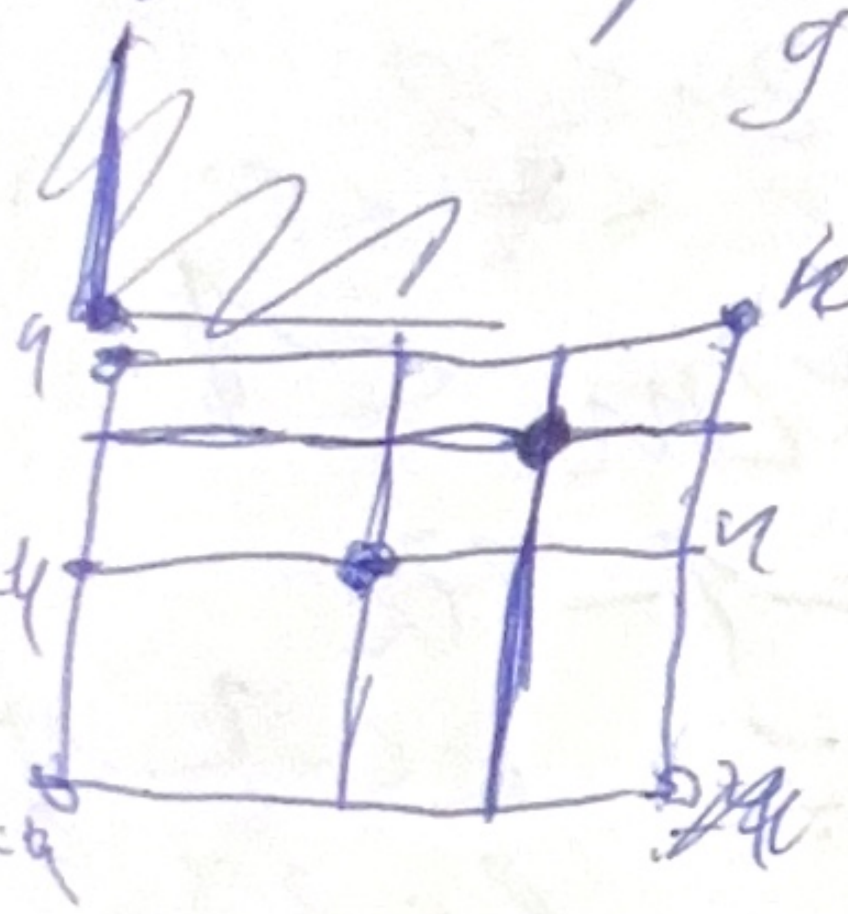
$x>0$

$x\le 1$

№3.

~~9 вар.~~ 3 вар. в какой пл-ти будет △

9 вар. расп. △ в пл-ти.



~~81 точка в кв.~~

9 вар. выбр. прям.

9 вар. выбр. прям. 2.

8 вар. выбр. т. на прям.

8 вар. выбр. т. на прям.

$72\times72 = 144,\ 504,\ 5184$

$5184\times27 = 36288,\ 10368,\ 139968$

$3\cdot 9\cdot 9^2\cdot 8^2 = 72^2\cdot 27$

$a<1$

$\frac{(x\log_a x - \frac{1}{2})(x\log_a x+\frac{1}{4})}{(x-1)} \ge 0$

$x\le 1$

$x\ge 1$