0 559715 360003

55-97-15-36
(124.23)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Соломатиной Екатерины Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29.» 03. 2026 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять)

55-97-15-36 (124.23)

№4 (продолжение)

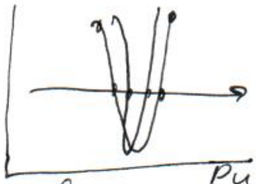


Рис.1.

для y_3 кусок фигуры вида окажется внутри y_1 дважды

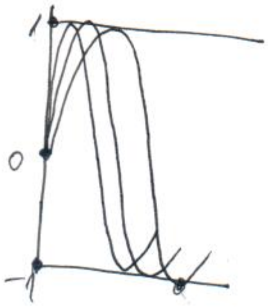
для y_2 кусок фигуры окажется внутри y_1 один раз

для y_3 кусок фигуры внутри y_2.

(Как на рис. 1)

Такое разбиение следует из принципа Дирихле.

отрезок делим на 16, 14, 12 одинак. частей, значит найдётся отрезок длины $\frac{1}{14}$ в отрезке длины $\frac{1}{12}$ один раз; $\frac{1}{16}$ в $\frac{1}{12}$ два раза и т.д.

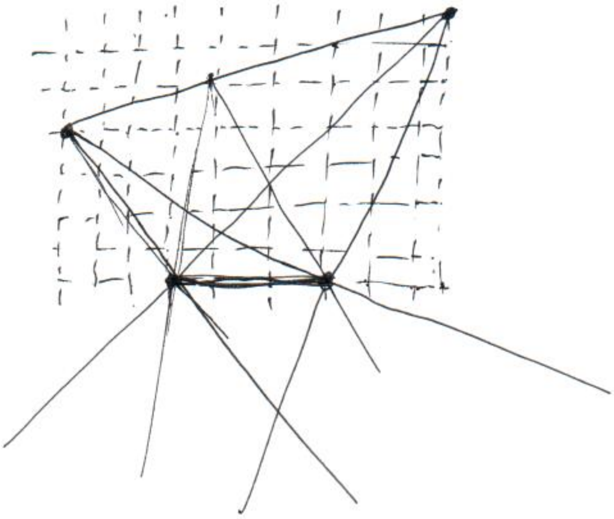


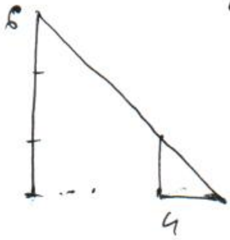
9

Назовём случай, когда отрезки длины $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{14}$; $\frac{1}{16}$ не накладываются друг в друга, классическим.

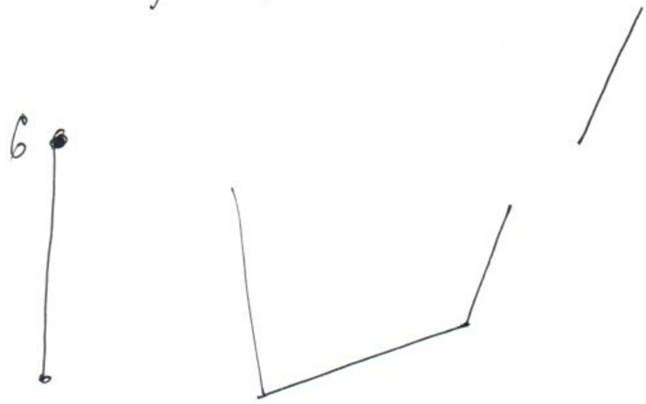
Стр. 1.

чернов





A:

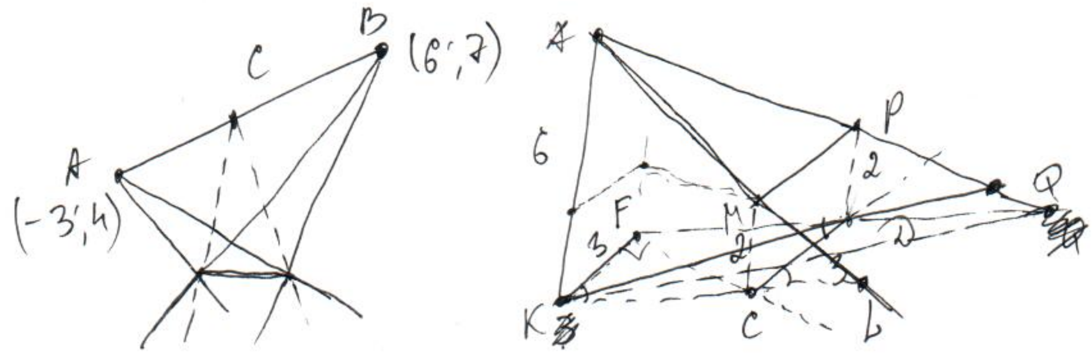


№5. (продолжение)

$-r = -\frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$

Ответ: $r = \frac{1}{4}$.

№6.



1) Затенённость достаточно посчитать в т. A и т. B, т.к. это крайние положения, и в любой т. C ~~ад~~ область затенения войдёт в область объединения от т. A и т. B.

$\overline{AM} = (3; -4; -4)$

KC – проекция AM

$\triangle AKL \sim \triangle MCL$, $k = \frac{MC}{AK} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $KC = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{CL}{KL} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3CL =$~~ $CL = \frac{KC}{2} = 1{,}5\sqrt{2}$

$\angle DCL = 45°$

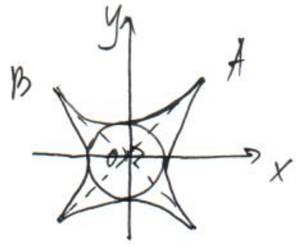
Аналогично ~~KD~~ KQ проекция AP, $\triangle AQF \sim \triangle QPD$,

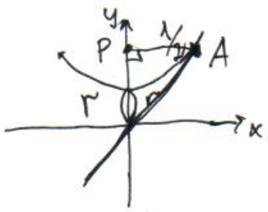
~~KQ k = PD~~ $k = \frac{DP}{AK} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ~~$\Rightarrow DQ = 1{,}5\sqrt{2}$~~

$KD =$

стр. 2

№5 (чистовик)





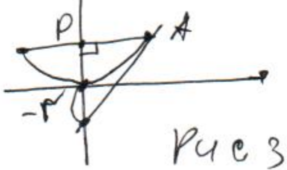


Рис 3

1. Проведём в таком „квадрате" диагонали.
Заметим, что в силу симметрии картинки относительно центра O — он же центр окр. — диагонали пер-ны.
Проведём через точку O координатную плоскость так, что $Ox \parallel$ касат. к окр., провед. в точке касания окр. параболы.
В силу симметрии диагонали будут иметь вид $y = x$; $y = -x$.
Тогда ~~это~~ „верхнюю" сторону квадрата можем описать: $f(x) = cx^2 + r$
По условию ~~квадр.~~ ~~квадра~~ угол квадрата нулевой, значит $y = r + x$ — касат. к параболе cx^2 (т.к. диагональ явл. касат. к верхней стороне квадрата) (Рассматриваем рис. 3)

$f(x) = cx^2$; $f'(x) = 2cx$

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0) \\ y = x - r \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 1 = 2c\cdot x_0$

$A = (x_0; y_0)$, ~~причём~~ $\cancel{x_0 = y_0}$ в силу симметрии относ. прямой $y = x$

$AB = 1$ по усл. $\Rightarrow AP = \frac{1}{2} = x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$

Значит: $1 = 2c\cdot x_0 = 2\cdot c\cdot \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$

Из ур-ния (*) ~~касат.~~ следует: $-r = -f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0) =$
$= -2\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

см. стр 2

55-97-15-36
(124.23)

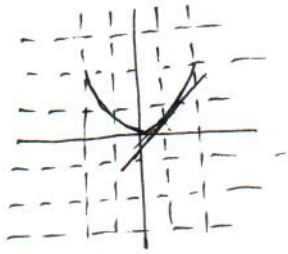
Черков.

$y = Cx^2$

1

$\cancel{y(x)} = r + Cx^2$

$f' = 2cx = 1 \qquad c = \frac{1}{2}$



$y = \cancel{xx} \quad f$

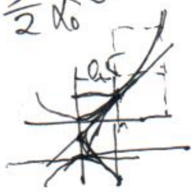
$y = f'(x - x_0) + f(x_0)$

$y = \cancel{2x}\ 2 \cdot \frac{1}{2}(x - x_0)^{\cancel{2}} + \frac{1}{2}x_0^{2} = \cancel{x^2 - 2xx_0 + x_0^2} + \frac{1}{2}x_0^2$

$x - x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 \quad \cancel{x^2 - 2xx_0} + \frac{3}{2}x_0^2$

$y = kx + b = x + b$

$x - x_0 + \frac{1}{2}x_0^2$



$f(x) = r + cx^2$

$f'(x) = 2cx \cancel{=}$ $\quad f$

$y = f'(x - x_0) + f(x_0) = 2 \cdot c \cdot x - 2 \cdot c \cdot x_0 + cx_0^2$

$y = x + b \qquad = x - \cancel{2}x_0 + \frac{1}{2}x_0^2$

$y(\frac{1}{2}) = 2c(x - \cancel{\frac{1}{2}}) + \cancel{f}\, c \cdot \frac{1}{4} = x + b$

$c - \frac{1}{2}$

$\cancel{y = \frac{1}{2}x^2} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$f(1) = \frac{1}{2}$

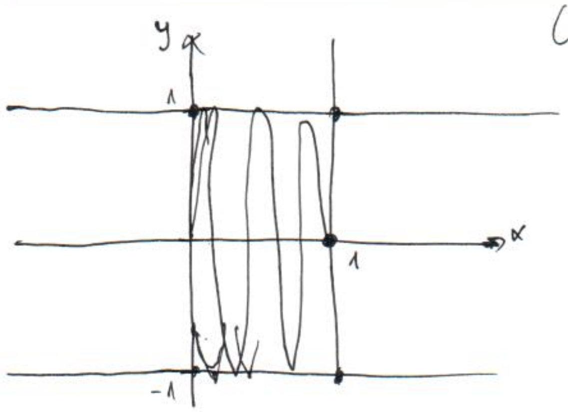
$f'(x) = \cancel{\frac{1}{4}}\, x \qquad f'(1) = 1 \qquad f'(x_0) = 1 = 2cx_0$

$f'(2) = 2 \qquad f'(x_0) = 2cx_0 = 2c \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = 1$

$y = f'(x - x_0) \qquad f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) =$

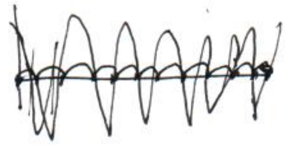
$f'(x_0) \cdot x\ \boxed{- x_0 \cdot f'(x_0) + f(x_0)}$

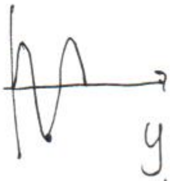
$r = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot (\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



Чернов

$y = \sin k\pi x$





$y_1 = \sin 11\pi \cdot x$

$y_2 = \sin 13\pi \cdot x$

$y_3 = \sin 15\pi \cdot x$

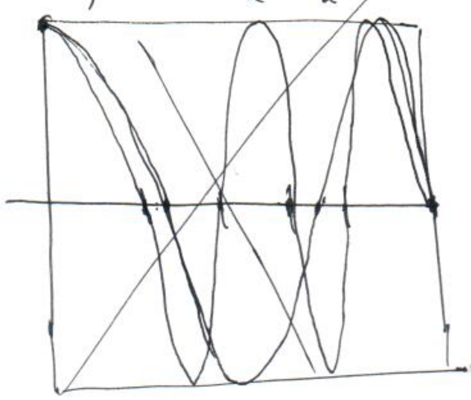
$y_1(1) = \sin 11\pi = 0$

$y_2(1) = \sin 13\pi = 0$

$y_3(1) = \sin 15\pi = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\alpha = \pi k$ $x = \frac{1}{11}; \frac{2}{11} \dots \frac{11}{11}$

$\sin\alpha = -1$ $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$



$y_1 = 0$ — 11 раз

$y_2 = 0$ — 13 раз

$y_3 = 0$ — 15 раз

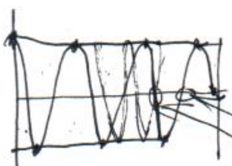
3; 5; 7

Значит на оси:

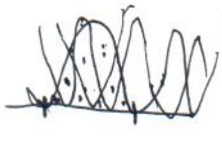
10 раз

12 раз

14 раз



от y_1!



Значит $y_1 = 1$ 5 раз

(рис каждой пары по (-ому)

$y_2 = -1$ 6 раз

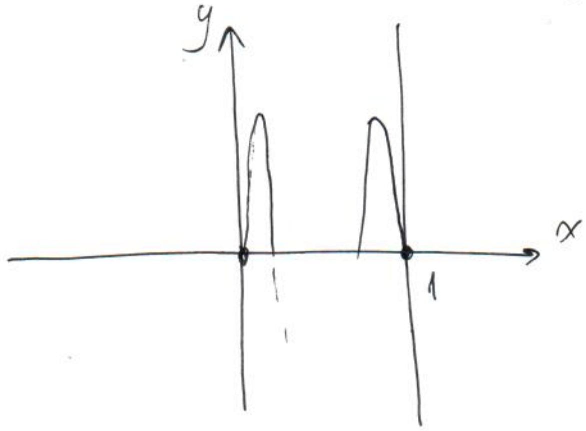
$y_3 = -1$ 7 раз

нашлось две клетки

одна клетка

одна клетка

№4 (Черновик)



$y_1 = \sin 11\pi \cdot x$ $\quad y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$

$y_2 = \sin 13\pi \cdot x$ $\quad y_1(1) = y_2(1) = y_3(1) = 0$

$y_3 = \sin 15\pi \cdot x$

На промежутке $[0;1]$ ф-ция y_1 обнулялась при: $x=0$; $x=\frac{1}{11}$; $x=\frac{2}{11}$ ... $x=1$ – 12 раз

значит y_2 обнулялась 14 раз

y_3 обнулялась 16 раз.

Т.е. графики проходили через ось Ox 12; 14; 16 раз

(т.к. ~~$y_1 = \sin 11\pi$~~ $y_1\left(\frac{1}{11}\right) = \sin\left(11 \cdot \pi \cdot \frac{1}{11}\right) = \sin\pi = 0$)

Каждая из ф-ций ~~...~~ ~~...~~ ~~...~~ $y_i(1-\Delta)$ при малых Δ ~~...~~ положительна. Т.е. до последнего пер-ния с Ox на промежутке $[0;1]$ ф-ция положительна.

y_1 на промежутке $[0;1]$ приравнивалась $\frac{12-2}{2} = 5$ раз.

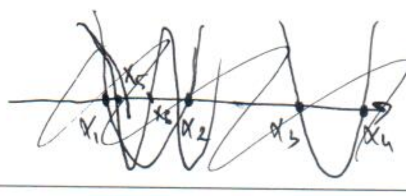
y_2 – 6 раз

y_3 – 7 раз.

Значит очевидно, что: для y_1 и y_3 найдётся ~~два~~

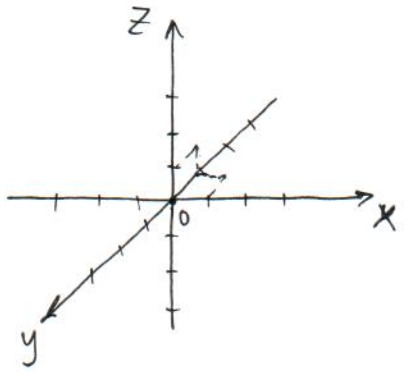
~~x_1 и x_2 и x_3 и x_4 так~~ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8

такие, что: ~~x~~



см. стр. 1

№3 (Чистовик)



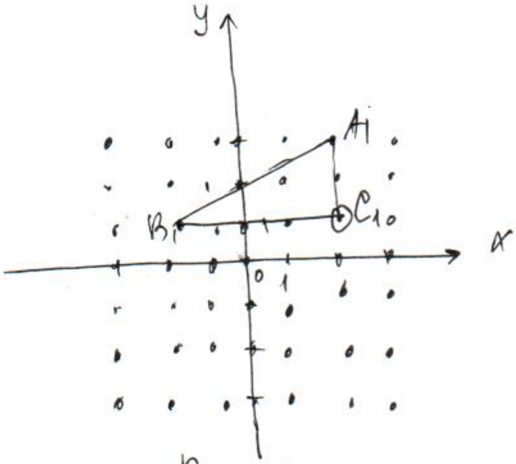


Рис. 2.

1. Д-ем, что $O=C$, где C - вершина прямоуг. Δ-ка, лежащая против гипотенузы.

~~Пусть Б.О.О. С=~~

1) Пусть ~~вершина~~ точка C – вершина прямоуг. Δ-ка, леж. против гипотенузы.

~~Значит если С может принадлежать:~~

~~а) одной из осей: тогда АС и~~

2) Заметим, что т.к. катеты сонапр. с осями, то каждый тр-ник из условия лежит в плоскости, пар-льной одной из трём плоскостям ((OYX); (OZX); (OYZ)). Посчитаем кол-во таких плоскостей. Для каждого из направлений: XY, XZ; YZ сущ. по 7 плоскостей. ~~Значит всего таких~~ (с условием, что координаты по модулю не больше 3). Значит всего плоскостей, в которых могут быть Δ-ки, $7\cdot 3=21$

3) Для каждой из них расп. Δ-ов идентичное, поэтому рассм. Б.О.О. плоскость, пар-льную плоскости (OXY) и проход. через т. (0;0;1)

~~4 Рис. 2.~~

~~Заметим, если точка т. $C \notin OY$ и $\notin OX$, если что если $C \neq 0$, то $C \notin OY$ и $C \notin OX$, т.к.~~

Рассм. рис. 2. На нём отмечены все точки, ~~их~~ принадлеж. мн-ву F и леж. в данной плоскости. Их кол-во $7 \cdot 7 = 49$.

Рассм. точку $C_1(x_1 y_1)$: для неё ~~существуют~~ ~~все~~ треугольники, подходящие под условие, т.е. с катетами: $AC \parallel OX$ и $BC \parallel OY$ такие, что вершина A ~~на одной вертикали с~~ на одной вертикали с C_1 (т.е. координата по x одинакова), вершина B на одной горизонтали (координата по y одинак.).

Точки A и B б.о.о. Расположение точек такое, т.к. в противном случае, если, например, $A = (x_2 y_2)$, $AC \nparallel OX$; $AC \nparallel OY$ — противор. с условием.

Значит для точки C_1 в качестве вершины против гипотенузы Δ-ов $6 \cdot 6 = 36$

Точек 49, значит различных Δ-ов $49 \cdot 36$

~~4)~~ В данной плоскости $49 \cdot 36$ Δ-ов

4) ~~Пост~~ Плоскостей 21, значит Δ-ов: $49 \cdot 36 \cdot 21$

Ответ: $49 \cdot 36 \cdot 21$.

Черив

$\overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots (a_1+a_2+\ldots+a_n) = 9m$

число хотя бы 9

когда число ⋮ на сумму своих цифр?

Значит число $\overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots 9$

$\Rightarrow (a_1+a_2+\ldots+a_n) \vdots 9$

$\Rightarrow \overline{a_1a_2\ldots a_n} \vdots 81$

$81\cdot2=162$ $\quad 81\cdot3=243$ $\quad 81\cdot4=324$ $\quad 81\cdot5=405$

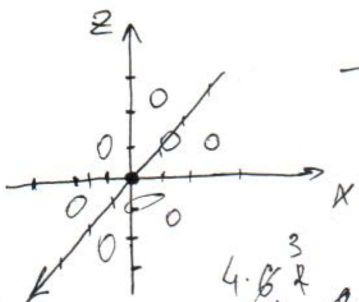
$162:9=18$ $\quad 243:9=27$ $\quad 324:9=36$

$81\cdot6=486$ $\quad 81\cdot7=567$ $\quad 81\cdot10=810$ $\quad 81\cdot11=891$

$81\cdot12=972$

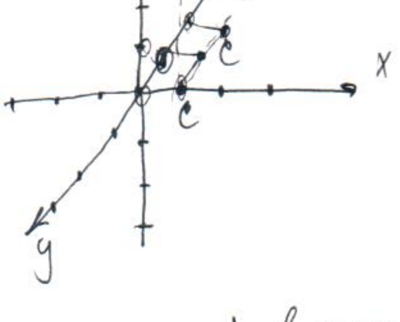
$$\begin{array}{r} \times\,81 \\ 21 \\ \hline 81 \\ 162 \\ \hline 1701 \end{array}$$

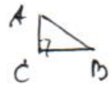
~~1600~~
1620

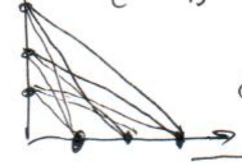


№3.

$\frac{4\cdot 6 \cdot 7}{32} = \cancel{8}12$







Пусть $C \neq 0$:

Б.О.О. $C=(1;0;0)$

катет AC ~~...~~ $\parallel OY$ – ✗, т.к

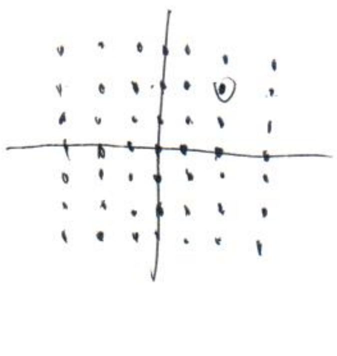
$A \in OY$ или $A \in OX$
или $A \in OZ$

Аналогично $\parallel OZ$

~~$AC \parallel OX$~~ катета два,

~~но~~ ни один из них не $\parallel OY$ и OZ – (✗)

$C=0$; 12 направлений по 3 Δ-ов



36

№1 (чистовик)

$\sqrt{6}\sqrt{1-ctg^2x}=4\cos x$

$\cos x>0$; $\sin x\neq 0$

$6(1-ctg^2x)=16\cos^2x$

$6-6\cdot\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=16\cos^2x \quad |\cdot\sin^2x$

$6\cdot\sin^2x-6\cdot\cos^2x=16\sin^2x\cdot\cos^2x$

$-6\cdot\cos 2x = 4\sin^2 2x \quad |:2$

$-3\cos 2x=2\cdot\sin^2 2x$

$-3\cos 2x=2(1-\cos^2 2x)$

$-3\cos 2x=2-2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x-3\cos 2x-2=0$

$D=9+4\cdot2\cdot2=9+16=25$

$\cos 2x=\frac{3\pm5}{4}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$

$4\sin^2 2x=4\cos^2 2x-4\cos 4x$

$4\sin 2x = 4\sin x\cdot\cos x$

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$

$4\sin^2 2x=4\sin x\cdot\cos x$

$4\sin^2 2x=16\sin^2x\cdot\cos^2x$

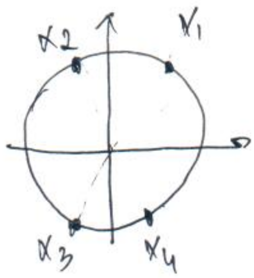
$\cos 2x=\frac{8}{4}=2$

– противор.

$\cos 2x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$



т.е. $x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

$x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$x_3=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$x_4=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

С учётом ограничений: x_2 и x_3 не подходят.

$\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

№2 (Чистовик)

Рассм. число, удовлетвор. условию (рассм. трёхзн. число):

$\overline{a_1a_2a_3}$

По условию: $\overline{a_1a_2a_3} : (a_1+a_2+a_3) = 9m$

где $m \in \mathbb{N}$. (m – не ноль, т.к. ~~иначе~~ в таком случае $\overline{a_1a_2a_3}=0$, $a_1+a_2+a_3=0$ и получаем деление на ноль)

$$\left(\frac{\overline{a_1a_2a_3}}{(a_1+a_2+a_3)}\right) \vdots\ 9 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3} \ \vdots\ 9$$

Трёхзначное число $\vdots 9$, значит сумма его цифр кратна 9 : $(a_1+a_2+a_3) \vdots 9$

Т.е. число $\overline{a_1a_2a_3}$, поделённое на $(a_1+a_2+a_3)$, в которое входит „9" со степенью вхождения хотя бы 1. Но тогда степень вхождения „9" в $\overline{a_1a_2a_3}$ хотя бы 2. Т.е. $\overline{a_1a_2a_3} \ \vdots\ 9^2$

$\overline{a_1a_2a_3} = 81 \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Т.е. все трёхзначные числа у мн-ва A имеют вид $81 \cdot k$

Значит это числа: $81 \cdot 2$ ^{1}; $81 \cdot 3$; $81 \cdot 4$; $81 \cdot 5$; $81 \cdot 6$; $81 \cdot 7$ ^{6}; $81 \cdot 8$; $81 \cdot 9$; $81 \cdot 10$; $81 \cdot 11$; $81 \cdot 12$ ^{11}

$S = 81 \cdot 2 + 81 \cdot 7 + 81 \cdot 12 = 81 \cdot 21 = 1701$

Ответ: 1701