0 582421 910002

58-24-21-91
(123.21)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

демидфф

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Соломченко Егора Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» марта 2026 года

Подпись участника

 70 (семьдесят)

58-24-21-91 (123.21)

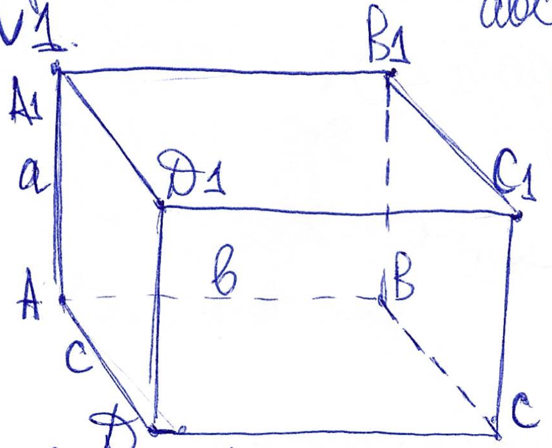
Черновик

N1.

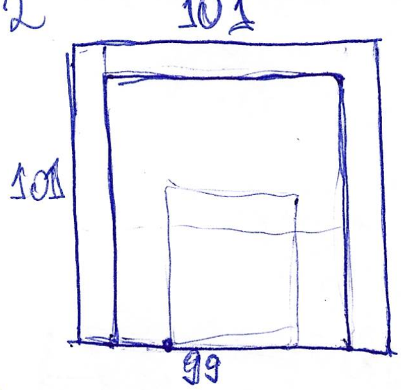
$abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) = 2026$

$\min abc - ?$

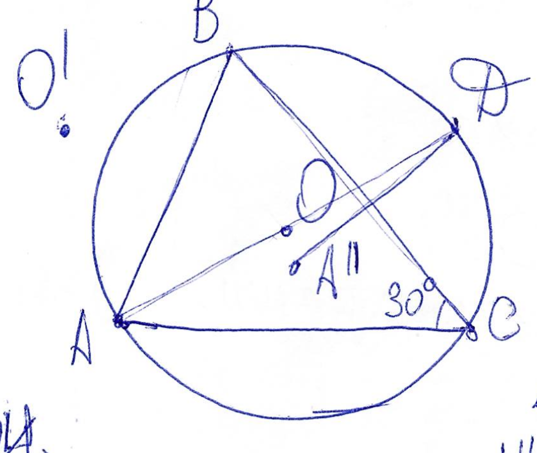
$a, b, c \in \mathbb{N};\ a \neq b, b \neq c, c \neq a.$

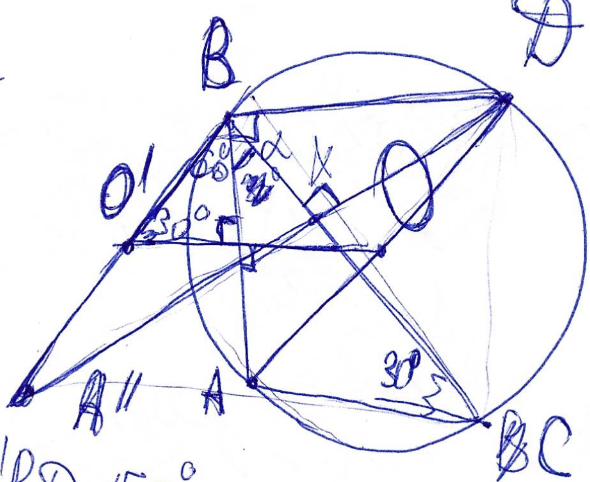


N2



N3.





~~N4.~~

$\angle A''BD = 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A''BK = 75° \Rightarrow \boxed{\angle B = 15°}$

N4.

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

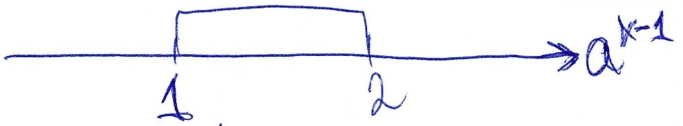
$a \neq 1,\ a > 0$

$$\frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{\log_2 a} \geq 0 \qquad \frac{(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0$$

Черновик №4.

I сл. $0<a<1$: $\log_2 a<0$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0$



$1\le a^{x-1}\le 2$

$a^0\le a^{x-1}\le a^{\log_a 2}$ $a<1$, знак мен.

$0\ge x-1\ge \log_a 2$

$1\ge x\ge 1+\log_a 2$

~~Отрезок дл~~ $1-(1+\log_a 2)+1=2026$

$\log_a 2=-2025$

$a^{-2025}=2$

$1 \vee 2^{-\frac{1}{2025}}$ | $\wedge$ $a=\sqrt[(-2025)]{2}$ $\boxed{a=2^{-\frac{1}{2025}}}$

$\boxed{1<2}$

II сл. $1<a<2$. $\log_2 a<0$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0$

$1\le a^{x-1}\le 2$ $a>1$, знак не мен.

$0\le x-1\le \log_a 2$

$1\le x\le 1+\log_a 2$

$\log_a 2=2025$

$a^{2025}=2$

$2>a=2^{\frac{1}{2025}}>1$

III сл. $a\ge 2$ $\log_2 a>0$

$a^{x-1}\ge 2$ $x-1\ge \log_a 2$

$a^{x-1}\le 1$ $x\ge 1+\log_a 2$

$x-1\le 0$

$x\le 1$ — не отрезки.

№5 $0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$

$x+y+z=\frac{\pi}{2}$

max: $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$ - ?

58-24-21-91 (123.21)

Черновик N5

$\cancel{0<x<y<z<\frac{\pi}{2}}$ $x\le\frac{\pi}{6}$, $z\ge\frac{\pi}{6}$

$x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$3\sqrt[3]{tgx\,tgy\,tgz}\le tgx+tgy+tgz$

$\cancel{tgx+tgy+tgz}$

$\le tgx+tgy+tgz$

$\boxed{tgx\,tgy\cdot ctg(x+y)}$ $\boxed{\begin{matrix}0<x,y<\frac{\pi}{2}\\ 0<x+y<\frac{\pi}{2}\end{matrix}}$

$tgx\,tgy\,tgz$

$\boxed{x=y=z}$

$\boxed{0<a,b,c}$

$a=tgx$ $c=tgz=ctg(x+y)=\frac{1}{tg(x+y)}=$

$b=tgy$ $x+$

$=\frac{1-tgx\,tgy}{tgx+tgy}=$

$0<a,b,c$

$c=\frac{1-ab}{a+b}$ $=\frac{1-ab}{a+b}$

max $ab\frac{1-ab}{a+b}$

$1-ab>0$

$a>1$

$b<1$

$a+b+\frac{1+ab}{a+b}=\frac{a^2+b^2+ab+1}{a+b}\ge\frac{2\frac{3}{2}(a^2+b^2)+1}{a+b}$

$\frac{ab(1-ab)}{a+b}\le\frac{1}{4}\frac{1}{a+b}$

$a\le b$

$\cancel{a(1-a)\le\frac{1}{4}}$

$\cancel{\frac{ab(1-ab)}{a+b}\le\frac{1}{4}(a+b)(1-ab)}$

$ab<1$ $ab<1$

$a<\frac{1}{b}$

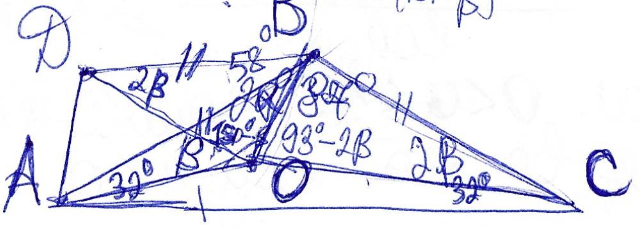
N6 $4\alpha=180^\circ-64^\circ$

$\alpha=45^\circ-16^\circ=29^\circ$

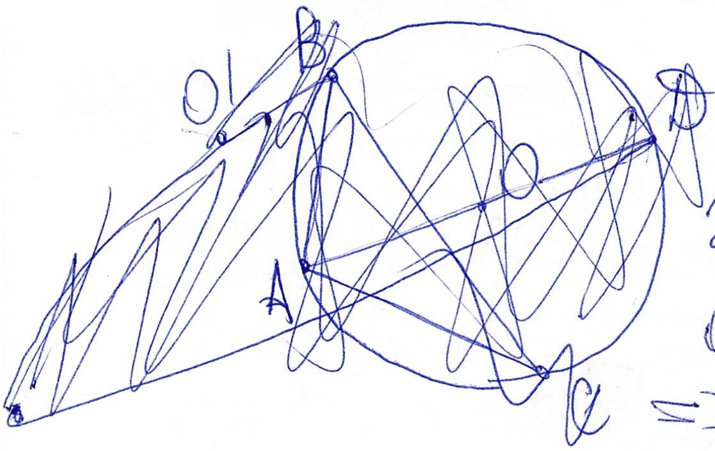
$\frac{OB}{\sin 2\beta}=\frac{BC}{\sin(93^\circ-2\beta)}$

$\frac{OB}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin(151^\circ-\beta)}$

$\angle AOD=\beta+58^\circ$

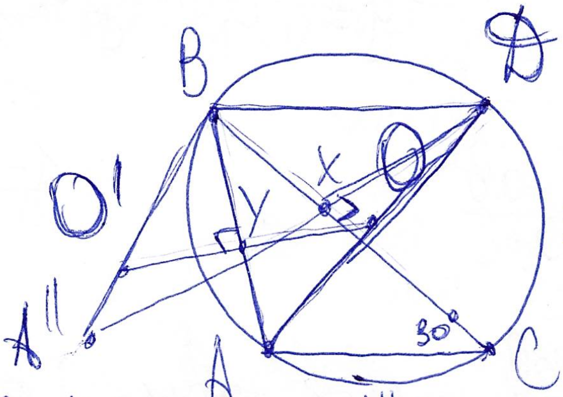


Чистовик №3.



Решение: 1) Пусть D — диам. противо-е т. A,
$X = BC \cap DA''$
$Y = OO' \cap AB$.

2) $\angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$ (как центральный)
$OA = OB$ (как радиусы)
$\Rightarrow \triangle OAB$ — р/ст. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OBA = 60^\circ$.



В силу симметрии $\angle O'BA = \angle OBA = 60^\circ$.

3) $\angle ABD = 90^\circ$ (как впис., опир. на диаметр)

В силу симметрии $\angle A''BC = \angle DBC$.

4) $\angle A''BD = \angle A''BA + \angle ABD = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CBD = \frac{\angle A''BD}{2} = 75^\circ = \angle A''BC = \angle A''BA + \angle B = 60^\circ + \angle B$.

Значит, $\angle B = 15^\circ$. $\boxed{\text{Ответ: } 15^\circ}$

№4. $\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \mid : a^2$ ($a^2 > 0$, т.к. $a > 0$, потому что $\log_2 a$ сущ.)

$$\frac{\frac{a^{2x}}{a^2} - \frac{3a^x}{a} + 2}{\log_2 a} \geq 0$$

$$\frac{(a^{x-1} - 1)(a^{x-1} - 2)}{\log_2 a} \geq 0.$$

Iсл. $0 < a < 1$: Домножим обе части нер-ва на $\log_2 a < 0$.

58-24-21-91
(123.21)

Чистовик №4 (продолжение) $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0$

$\overset{+}{\longrightarrow}\underset{1}{|}\overset{-}{\longrightarrow}\underset{2}{|}\overset{+}{\longrightarrow} a^{x-1}$ $\quad 1\le a^{x-1}\le 2$

$a<1$, знак меняется $\quad 0\ge x-1\ge \log_a 2$

$1\ge x\ge 1+\log_a 2$

Мн-во реш — отрезок длины 2026, поэтому

$1-(1+\log_a 2)+1=2026$

$\log_a 2=2025$

$a^{-2025}=2 \qquad a=2^{-\frac{1}{2025}}$. $\cancel{1<2}>0$

$2^{-\frac{1}{2025}}\vee 1 \;|\;{}^{\wedge}2025$

$\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{2025}}<1$.

~~II сл. $1<a<2$. Домножим обе части нер-ва на $\log_2 a<0$~~

~~$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\le 0 \qquad 1\le a^{x-1}\le 2$~~

~~$a>1$, знак не изм.~~

~~$0\le x-1\le \log_a 2 \qquad 1\le x\le 1+\log_a 2$~~

~~Мн-во реш. — отр- длины 2026, поэтому~~

~~$1+\log_a 2-1+1=2026 \qquad \log_a 2=2025 \qquad a^{2025}=2$~~

~~$1<a=2^{2025}<2$~~

III сл. $\cancel{a>2}$ $a>1$. Домножим обе части на $\log_2 a>0$.

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\ge 0$

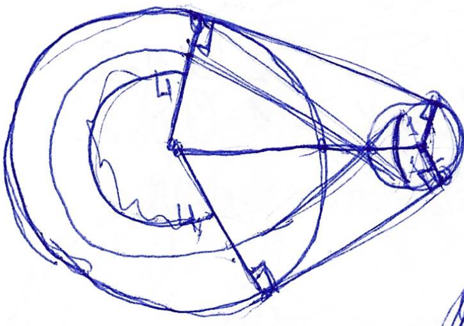
$\overset{+}{\longrightarrow}\underset{1}{|}\overset{-}{\longrightarrow}\underset{2}{|}\overset{+}{\longrightarrow} a^{x-1}$ $\quad \left[\begin{array}{l} a^{x-1}\le 1\\ a^{x-1}\ge 2\end{array}\right.$

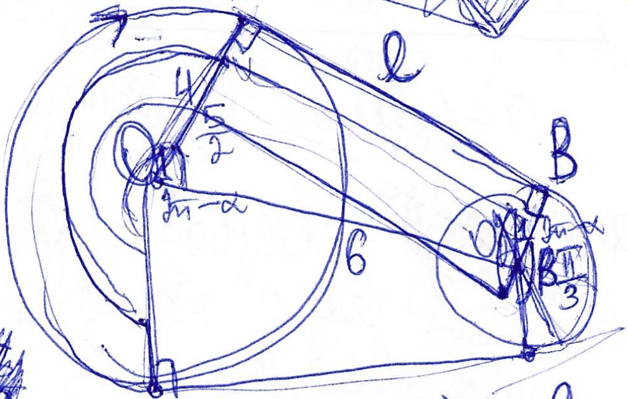
$\left[\begin{array}{l} x\le 1\\ x\ge 1+\log_a 2\end{array}\right.$ — мн-во реш. не явл. отрезком.

$\boxed{\text{Ответ: } a=2^{-\frac{1}{2025}}}$

Черновик №7.

$\boxed{ab+2(a+b)=2026}$



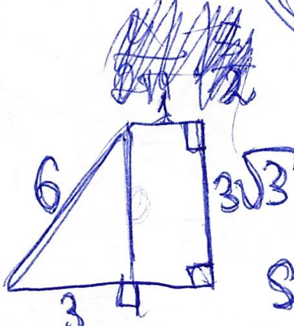


$AB=\sqrt{}$

$3\sqrt{3}$

Кол-во $3\sqrt{3}$

всех − кол-во дырок − кол-во половин



$\alpha\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(2\pi-\alpha)+2l=$

$=\boxed{\pi+2\alpha+2l}$

$\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle AOB=\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

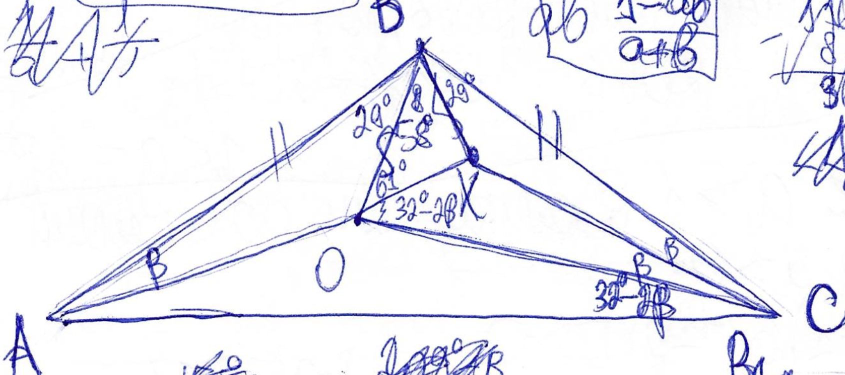
$\Rightarrow\angle AOB=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{5\pi}{3}+6\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{13\pi}{3}+6\sqrt{3}$

$ab<1$ $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y$ $\frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)}=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y$ $\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}$

$\boxed{a+b+\frac{1-ab}{a+b}}$ $ab\ \frac{1-ab}{a+b}$ $\boxed{ab\ \frac{1-ab}{a+b}}$

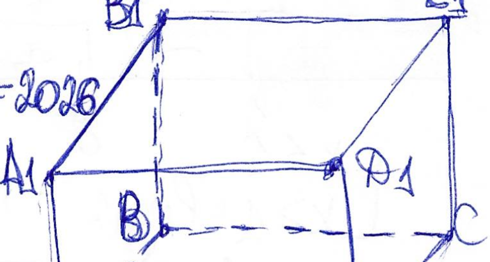
$\frac{-b^2\cdot a^2+b\cdot a}{b+a}$

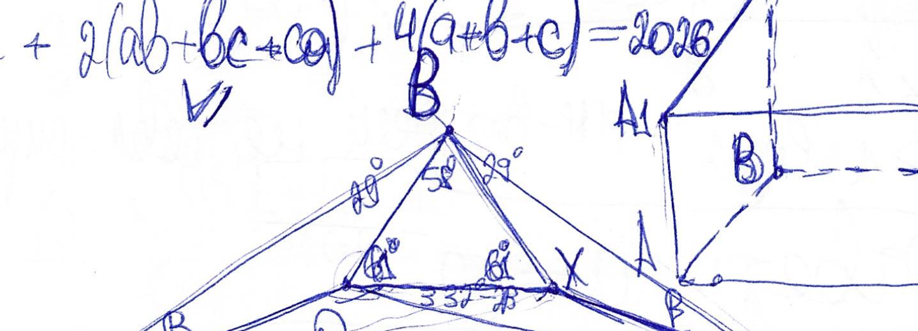


~~$\angle AOX=180°-(32°-\beta)$~~

~~$148°+\beta$~~

$abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)=2026$



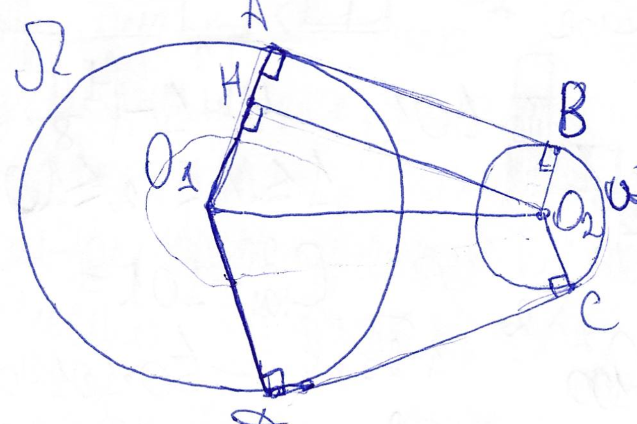


Чистовик №7

1) Пусть Ω – окр-ть с рад. 4, центром O_1, ω – окр-ть с рад. 1, центром O_2.

AB, CD – общие кас-е к Ω и ω.

По усл-ю $O_1O_2 = 6$.



2) $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$ (как рад., провед. в т. кас-я) $\Rightarrow O_1A \parallel O_2B$.

Д.п.: $O_2H \perp O_1A$, $H \in O_1A$.

$\left.\begin{array}{l} AB \parallel O_2H,\ AH \parallel O_2B \\ AH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow ABO_2H$ – прямоуг-к $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_2H = AB$ (по св-ву прямоуг-ка)

$AH = BO_2 = 1$.

$O_1H = O_1A - AH = 3$.

$\cos\angle AO_1O_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AO_1O_2 = \frac{\pi}{3}$.

$O_2H = O_1O_2 \cdot \sin\angle AO_1O_2 = 3\sqrt{3}$.

3) Аналогично $CD = 3\sqrt{3}$ и $\angle O_2O_1D = \frac{\pi}{3}$.

$\angle BO_2C$ сонаправлен с $\angle AO_1D$, поэтому $\angle BO_2C = \angle AO_1D = \frac{2\pi}{3}$.

4) Пусть косилка начинает в т. Д. По пути из Д в А она едет по дуге окр-ти радиуса $4 - 1{,}5 = \frac{5}{2}$. Дуга имеет размер $2\pi - \angle AO_1D = \frac{4\pi}{3}$. Она проедет $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{6}\pi$.

Из А в В едет по прямой длины $AB = 3\sqrt{3}$.

Из В в С едет по дуге окр-ти радиуса $1{,}5 - 1 = \frac{1}{2}$. Дуга имеет размер $\angle BO_2C = \frac{2\pi}{3}$. Проедет $\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{6}$.

Из С в Д едет по прямой длины $CD = 3\sqrt{3}$.

5) ~~Всего~~ Длина линии равна $\frac{20}{6}\pi + \frac{2\pi}{6} + 6\sqrt{3} = \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{11\pi}{3} + 6\sqrt{3}}$

дешифр

Черновик №2.

Кол-во всех: $\left(C_{102}^2\right)^2$

101

$1 \le x_1 \le x_2 \le 101$

$\frac{2}{7}$

$\frac{4}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$

$\left(C_{100}^2\right)^2$

$C_{101}^2 + 101 = 50 \cdot 101 + 101 = 51 \cdot 101$

$1 - 2b \vee b$

Кол-во дырок:

Кол-во половин:

$2 \cdot C_{100}^2$

$a \ge b$ $\quad C_n^2 + n = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad \frac{n(n+1)}{2}$

99

$\frac{(a-1-\sqrt{2b})(a-1+\sqrt{2b})}{(a+b)^2}$

$5151 - 4950 =$

Ответ: $\left(C_{102}^2\right)^2 - \left(C_{100}^2\right)^2 - 2C_{100}^2 =$

$51 \cdot 101 = 5151$

$10301 - 9900$
401

$30301 - 99$

$= 51 \cdot 101 \left(\frac{102 \cdot 101}{2} - \frac{100 \cdot 99}{2}\right)$

$(51 \cdot 101)^2 - (50 \cdot 99)^2 - 100 \cdot 99 =$

$2010000 +$
$+ 20100 + 201 -$
$- 9900 =$

$= 5151^2 - 4950^2 - 9900 =$

$= 201 \cdot 10101 - 9900$

$= 2030301 - 9900 = \boxed{2020401}$

$\frac{(-2b+1)(a+b) + (ba^2 - a)}{(a+b)^2} = \frac{ba^2 - 2ba - 2b^2 + b}{(a+b)^2}$

$\frac{a^2 - 2a + 1 - 2b}{(a+b)^2}$

$(a - 1 - \sqrt{2b})(a - 1$

$a > 0$

$f(a) = \frac{-b^2 \cdot a^2 + b \cdot a}{a+b}$

$f'(a) = \frac{(-2b^2 + b)(a+b) - (b^2 \cdot a^2 + ba)}{(a+b)^2} =$

$= \frac{b^2a^2 + b^2 - 2ab^2 - 2b^3}{(a+b)^2}$

Чистовик №2. ~~...~~ Занумеруем столбцы и строки квадрата от 1 до 101. Кол-во нужных прямоуг-в — это кол-во всех прямоуг-в за разностью тех, что раскладают квадрат надвое и тех, что образуют в нём дыру.

Кол-во всех прямоуг-в, меньших чем квадрат:

Пусть $1 \le x_1 \le x_2 \le 101$, $1 \le y_1 \le y_2 \le 101$.

$(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ — коорд. нижнего левого и правого верхнего углов кв-та. Кол-во

$1 \le x_1 \le x_2 \le 101$ равно $C_{101}^2 + 101$

$1 \le y_1 \le y_2 \le 101$ равно $C_{101}^2 + 101$.

Значит, кол-во прямоуг-в равно $(C_{101}^2+101)^2 - 1$.

Вычли 1, т.к. учли прямоуг-к, равный всему квадрату

Кол-во создающих дыру: Пусть $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ — левый нижний и правый верхний углы такого прямоуг-ка. Тогда ~~$2 \le x_1 \le x_2 \le$~~ $2 \le x_1 \le x_2 \le 100$, $2 \le y_1 \le y_2 \le 100$. Кол-во таких равно $(C_{99}^2 + 99)^2$.

Кол-во разрезающих квадрат надвое:

Если ~~...~~ прямоуг-к разрезает квадрат надвое, то ровно одна из его ~~коорди-нат равна 101, а~~ ~~...~~ сторон равна 101, а также он граничит ровно с двумя сторонами исх. квадрата. Кол-во таких прямоуг-в равно $(C_{99}^2+99) \cdot 2$.

Чистовик №2 (продолжение). Кол-во нужных прямоуг-в:

$$(C_{101}^2+101)^2-1-(C_{99}^2+99)^2-2(C_{99}^2+99)=$$

$$=(50\cdot101+101)^2-1-(\cancel{50\cdot99}\;49\cdot99+99)^2-2(49\cdot99+99)=$$

$$=5151^2-4950^2-1-9900=$$

$$=201\cdot10101-1-9900=2020400$$

$\boxed{\text{Ответ: } 2020400}$

~~Чистовик №8. После 1-й заправки вер-ть равна 1:~~

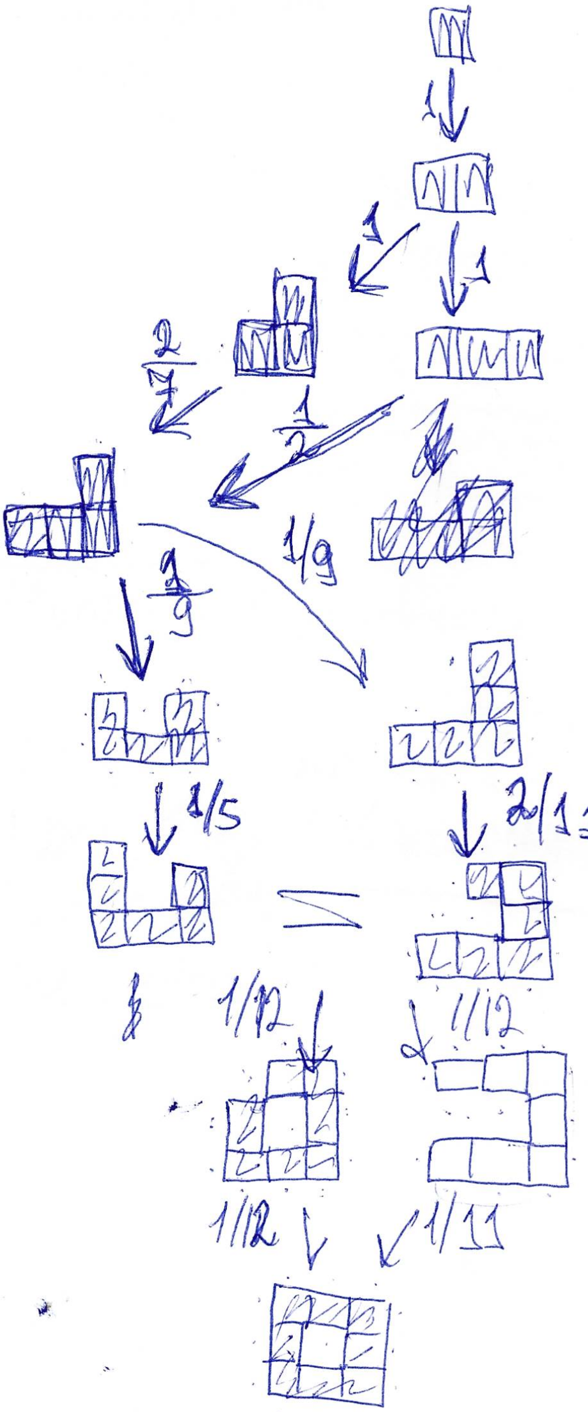
~~После 2-й тоже 1:~~

~~После 3-й возможно 2 варианта:~~ или

~~После 4-й:~~

Чистовик №8:

~~Черновик №8~~ Чистовик №8. Построим граф переходов к состояниям, которые могут вести к нужному. На рёбрах написаны вероятности перехода. Состояние с точностью до поворота фигуры.



Исх. вер-ть — это ~~$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11}$~~ сумма по в ~~[illegible]~~ произведений по всем цепочкам от посл-й к первой.