+1 лист А. [signature]

0 265786 970002

26-57-86-97
(123.13)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Сорокина Даниила Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

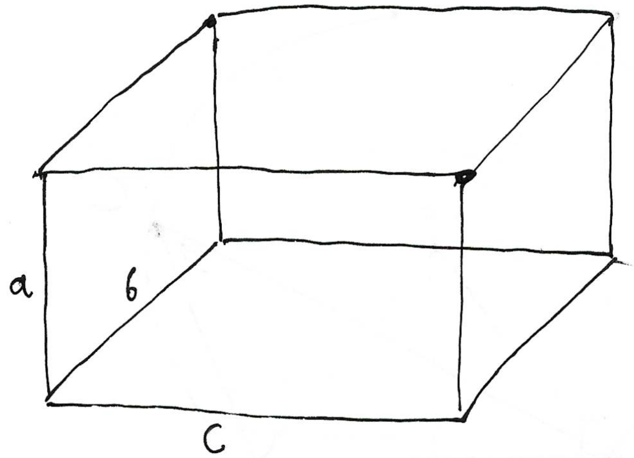
Подпись участника

100 (сто)

26-57-86-97
(123.13)

Чистовик лист 1 из 8

N1



Выражение из условия

$$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) = 2026$$

$$\Updownarrow$$

$$abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) + 8 = 2026+8$$

$$\Updownarrow$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2034 = 2\cdot 3^2\cdot 113$$

И т.к. среди a, b, c нет равных $\Rightarrow$ среди натуральных $a+2, b+2, c+2$ тоже

$\Rightarrow$ У нас 4 простых множителя и 3 числа $\Rightarrow$ два из трех чисел $a+2, b+2, c+2$ будут простыми, а третье будет равно произведению простых. Т.к. a, b, c – нат $\Rightarrow a+2, b+2, c+2 \geq 3$ $\Rightarrow$ числа $\neq 2$ $\Rightarrow$ произведение простых будет $2\cdot 3$ $\Rightarrow$ числа $a+2, b+2, c+2$ будут равны $6, 3, 113$

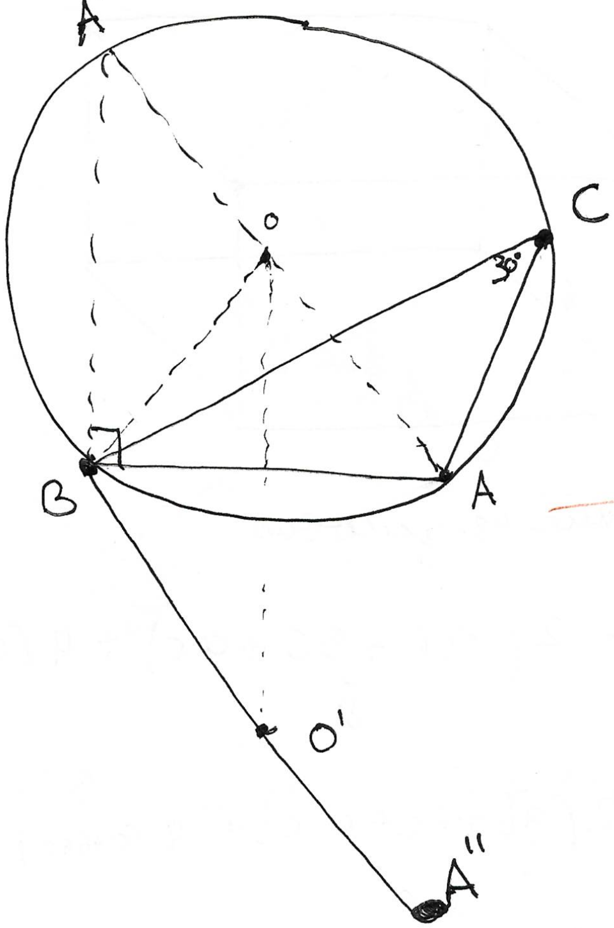
$\Rightarrow$ числа a, b, c будут равны $4, 1, 111$

$V = a\cdot b\cdot c = 444$ Ответ: 444

2

Чистовик Лист 2 из 8

№3



A' – точка диам прот A

т.к. $\angle C = 30° \Rightarrow \angle BOA = 60° \Rightarrow OAB$ – равностор

$\Rightarrow BO'A$ – равносторонний причем O' и C в разных полупл отн AB т.к. $\angle C < 90°$

$\Rightarrow \angle O'BA = 60° \Rightarrow \angle O'BC = 60° + \angle B$

Но с другой стороны т.к A'', O', B на одн прямой причем O' и A'' в одной полупл отн BC $\Rightarrow$

$\angle B + 60° = \angle O'BC \Rightarrow \angle A''BC = \angle A'BC$

$= \angle A'BA - \angle B = 90° - \angle B \Rightarrow \angle B + 60° = 90° - \angle B$

$\Rightarrow \angle B = 15°$

Ответ: $\angle B = 15°$

26-57-86-97
(123,13)

Чистовик Лист 3 из 8

№4

$$\frac{a^{2x}-3a^{x+1}+2a^2}{\log_2 a} \geqslant 0$$

ОДЗ:
$a>0$
$a\neq 1$
$\Updownarrow$
$\log_2 a \neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(a^x-a)(a^x-2a)}{\log_2 a} \geqslant 0$$

$\Updownarrow$ т.к $a\neq 0$

$$\frac{(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)}{\log_2 a} \geqslant 0$$

Разбор случаев:

$\boxed{А}$ $a>1 \Leftrightarrow \log_2 a>0$

$\Rightarrow$ $(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\geqslant 0$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a^{x-1}\geqslant 2 \\ a^{x-1}\leqslant 1 \end{array}\right.$$

Заметим, что все $x-1\geqslant \log_a 2$ подходят

$\Rightarrow$ решения отн x не представляют из себя отрезок

$\boxed{Б}$ $0<a<1 \Rightarrow \log_2 a<0 \Rightarrow$

$(a^{x-1}-1)(a^{x-1}-2)\leqslant 0$

$\Updownarrow$

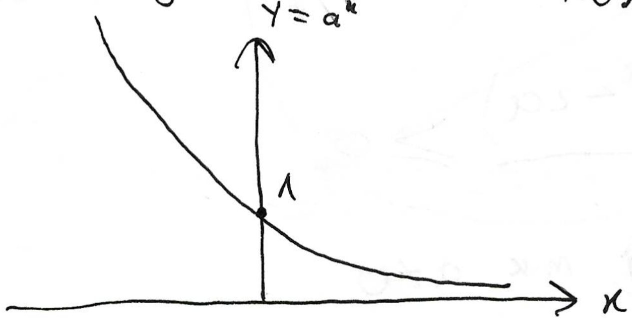
$1\leqslant a^{x-1}\leqslant 2$

Заметим, что $x=1$ подходи

Чистовик лист 4 из 8

№ 4 (продолжение)

Заметим, что $x=1$ подходит и график $y = a^x$ где $0<a<1$ выглядит так:



Поэтому решениями будут являться x такие что:

$0 \geq x-1 \geq \log_a 2$ => по условию длина отрезка решений равна 2026:

$1 \geq x \geq \log_a 2$

=> $\log_a 2 = -2026$ => $\log_2 a = -\frac{1}{2026}$

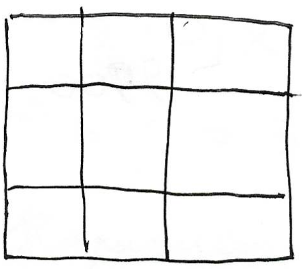
=> $a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

Ответ: $a = 2^{-\frac{1}{2026}}$

Чистовик Лист 5 из 8

№ 2 Докажем лемму, что всего прямоугольников в квадрате $n \times n$ можно выбрать $\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$:

В квадрате $n \times n$ будем выбирать по две горизонтали и две вертикали — границы нашего прямоугольника.



Они могут совпадать ⇒ способов выбрать горизонтали: $C_n^2 + n$ и

↑ если не совп ↖ если совп

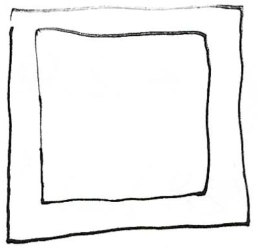
аналогично у вертикали:

⇒ $C_n^2 + n = \frac{n\cdot(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ⇒ всего вариантов $\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

Теперь решим основную задачу

Всего прямоугольников у нас $\left(\frac{101\cdot 102}{2}\right)^2$

А „дырок" всего $\left(\frac{99\cdot 100}{2}\right)^2$ т.к. они лежат во внутренней квадр. 99×99



А разделяющих квадрат на две части

$2\cdot\left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right) = 2\cdot\frac{100\cdot 99}{2} = \cancel{101\cdot 102}\ 9900$

↖ выбрать горизонтали + выбрать вертикали

Чистовик лист 6 из 8

N 2

$$\left(\frac{101\cdot102}{2}\right)^2-\left(\frac{99\cdot100}{2}\right)^2-99\cdot100$$

$$=\left(\frac{101\cdot102}{2}-\frac{99\cdot100}{2}\right)\left(\frac{101\cdot102}{2}+\frac{99\cdot100}{2}\right)-9900$$

$$=\left(\frac{10302-9900}{2}\cdot\frac{10302+9900}{2}\right)-9900$$

$$201\cdot10101-9900$$

$$\Downarrow$$

$$200\cdot10101+10101-9900$$

$$2020200+201$$

$$\shortparallel$$

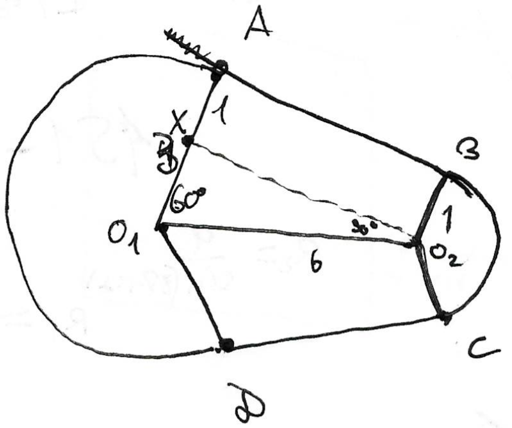
$$2020401$$

и ещё -1 (весь квадрат)

Ответ: 2020400

Чистовик лист 7 из 8

N7



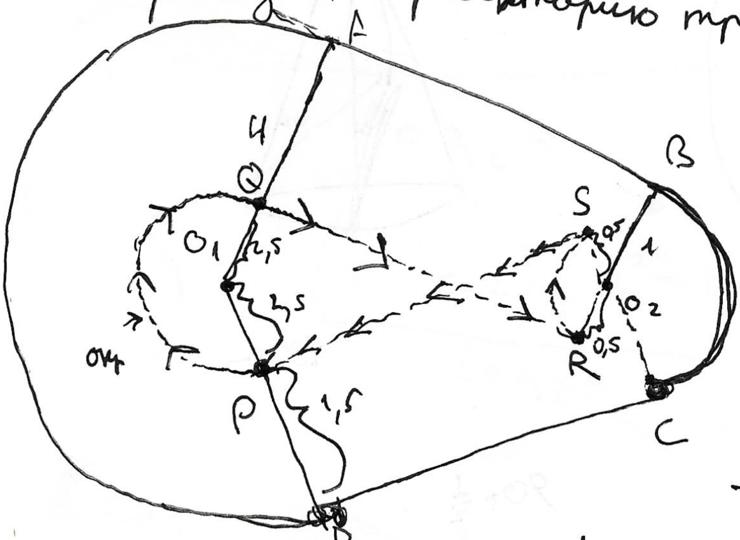
Выпустим перп X из O_2 на AO_1

тогда $O_1X = O_1A - O_2B = 4-1 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1X = 3 = \frac{O_1O_2}{2} \Rightarrow \angle XO_2O_1 = 30^\circ \Rightarrow \angle AO_1D = 120^\circ$

$\Rightarrow AB = DC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 = 3\sqrt{3}$

Нарисуем траекторию травы



Отметим ключевые точки

Отрезок

1) $PQ \to$ окр с рад 2,5 причем только $\frac{2}{3}$ окр т.к. $\angle QO_1P = 120^\circ$

$\Rightarrow L(PQ) = 2\cdot\pi\cdot 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}\pi$

2) $QR \parallel AB$ и равен $\Rightarrow L(QR) = 3\sqrt{3}$

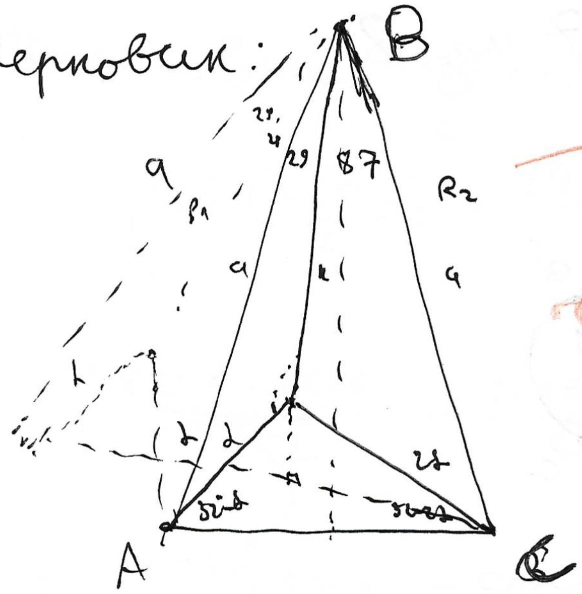
3) $RS \to \frac{1}{3}$ окружности с радиусом 0,5

$\Rightarrow L(RS) = \frac{1}{3}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$

4) $SP \parallel DC$ и равна $DC \Rightarrow SP = 3\sqrt{3} \Rightarrow L =$
$= 2\cdot 3\sqrt{3} + \frac{11}{3}\pi$

Ответ: $\frac{11}{3}\pi +$ ~~2...~~ $6\sqrt{3}$

черновик:



24 29+2

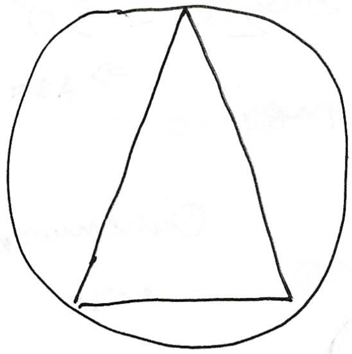
451−2

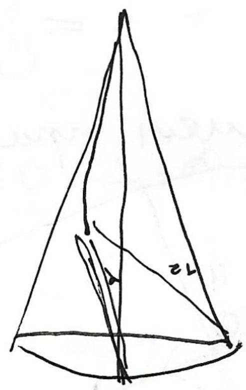
$R_2=\frac{a}{\sin(87+2\alpha)}$

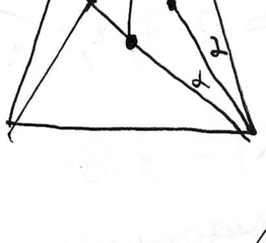
$R_1=\frac{a}{\sin 29+\alpha}$

$P_1=\frac{x}{\sin 2\alpha}$ $R_2=\frac{x}{\sin\alpha}$

$=\frac{R_1}{P_2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha$







180−

$90+\frac{1}{2}$

$90-\alpha-2,$

$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2$

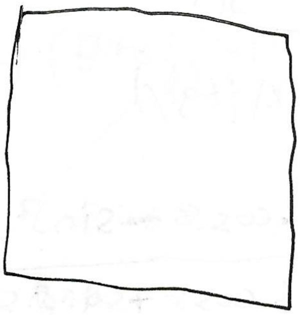
$=\left(\frac{n^2+n-(n-1)(n-2)}{2}\right)\left(\frac{n^2+n+(n-1)(n-2)}{2}\right)$

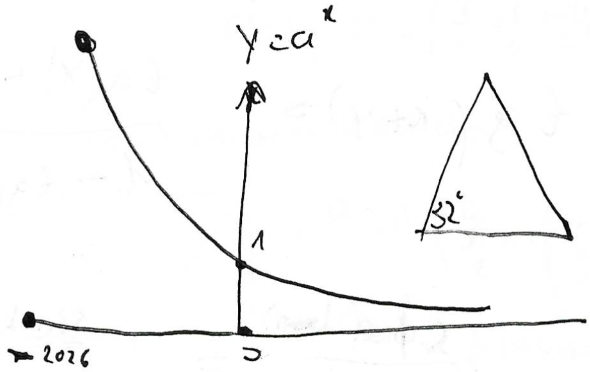
$=\frac{n^2+n-(n^2-3n+2)}{2}\cdot\frac{n^2+n+n^2-3n+2}{2}$

$=(2n-1)\cdot(n^2-n+1)$ $\cancel{(n^2+n)}$ $-(n-1)(n-2)$

Черновик:

$0 < x < 1$





$a^{-2026} = 2$

$$\frac{(a^x)^2 - 3\cdot a^x \cdot a + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

$\log_a 2 = -2026$

$a^{-2026} = 2$

$\log_2 a = -\frac{1}{2026}$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{2026} = 2$

2^{-}

$$\frac{(a^x - 2a)(a^x - a)}{\log_2 a} \geq 0$$

151

$$\frac{(a^{x-1} - 2)(a^{x-1} - 1)}{\log_2 a} \geq 0$$

$\log_2 a \geq 0$

$\log_2 a$ и $a-1$ одного знач

$a \neq 1$

I сл: $a \geq 1$

$$\left[\begin{array}{l} a^{x-1} \geq 2 \\ a^{x-1} \leq 1 \end{array}\right.$$

$x > \log_a 2$ все подх

можно

II сл: $0 < a < 1$

$1 \leq a^{x-1} \leq 2$

$x=1$ подх.

$C_n^2 + C_n^2 +$

$(C_n^2 + n)^2$

$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

$\frac{n\cdot(n-1)}{2} + n$

n^2

$$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x)(tg(y))}$$

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\frac{tg(\alpha) \pm tg(\beta)}{1-}$$

$$x \leq y \leq 2$$

$$tg(x-y) = \frac{tg(x)-tg(y)}{1+t}$$

$$\left(1-\frac{tg(x)+tg(y)}{t(x+y)}\right)$$

$$tg(k+s) \cdot tg(s-k)$$

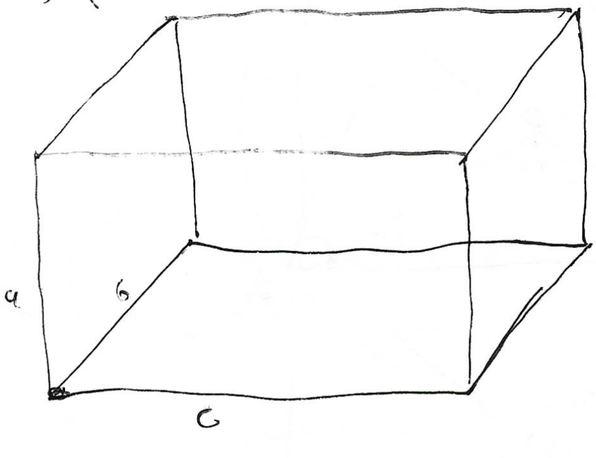
$$\frac{tg(s)+tg\,k}{1-tg(s)\,tg(k)} \cdot \frac{tg(s)-tg(k)}{1+tg(s)\,tg(k)}$$

$$\frac{tg^2(s)}{1} \lor \frac{tg^2(s)-tg^2(k)}{1-(tg(s)\,tg(k))^2}$$

Черновик:

$abc\left(1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4\left(\frac{1}{b}\right.\right.$

$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab+bc+ac) + 4(a+b+c) + 8$



$\left(\frac{a}{2}-1\right)\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(\frac{c}{2}-1\right)$

$\frac{abc}{8} - \frac{1}{4}(ab+bc+ac)$

$a \neq b \neq c$

1017

$2 \cdot 9 \cdot 113$

$2 \cdot (900 + 900 + 27$

$a \cdot b \cdot c + 2 \cdot (ab + ac + bc) + 4(a+b+c)$

$= 2026$

$90 - \angle B = \angle B + 60^\circ$

$\Downarrow$

$\angle B = 15^\circ$

Метод штурма:

2034

$a \leftrightarrow b$

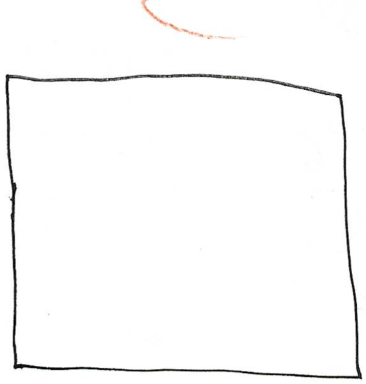
$8+1$

$4+2$

$1 \cdot 2 \cdot c + 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot c + 2 \cdot c) + 4(1+2+c)$

$= 2026$

$2c + 2 \cdot (3c+2) + 4(c+3) = 2026$



$12c + 16 = 2026$

$12 \cdot c = 2010$

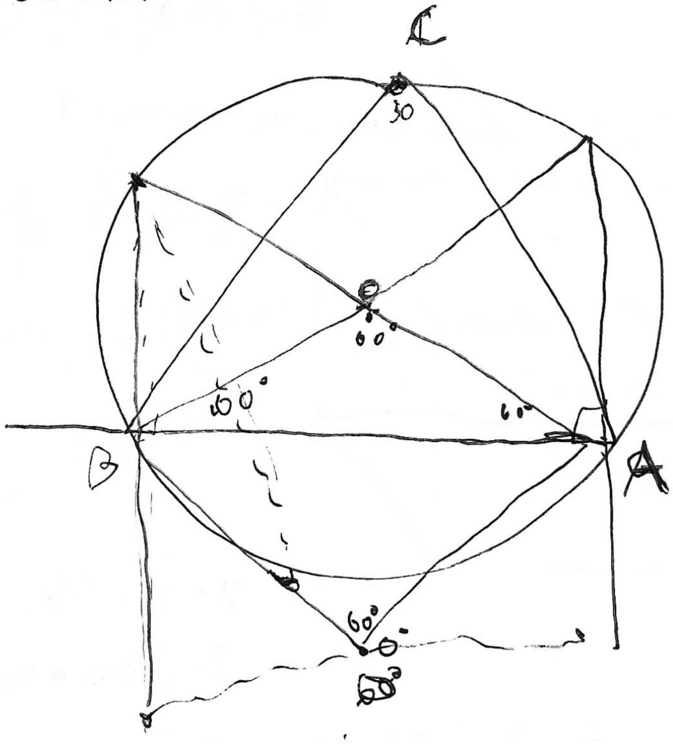
1017

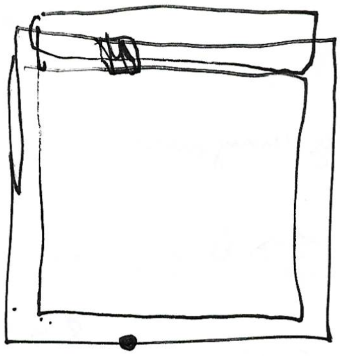
$2 \cdot 3 \cdot 339$

$4 \cdot 1 \cdot 111$

$2 \cdot 3^2 \cdot 113$

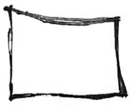
Черновик:

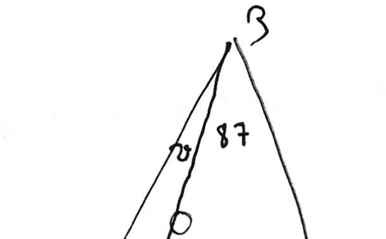




Всего градус

$$\frac{101^2\cdot(101^2-1)}{4}$$





84

$$\frac{116}{4}$$

29

26-57-86-97 (123.13)

чистовик лист 8 из 8

N 5

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Заметим, что

$$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-(tg(x)\cdot tg(y))}$$

$\Downarrow$

Пусть есть x и y где $k = \frac{x-y}{2}$ и $S = \frac{x+y}{2}$

$x \geq y$

$$tg(x) \cdot tg(y) = tg(k+S)\cdot tg(k+S)$$

$$= \frac{tg(S)+tg(k)}{1-tg(S)tg(k)} \cdot \frac{tg(S)-tg(k)}{1+tg(S)+tg(k)}$$

$\Downarrow$

$$\frac{tg^2(S) - tg^2(k)}{1-(tg(S)tg(k))^2}$$

Из этого следует, что чем меньше k, тем больше произведение $\Rightarrow$ будем сближать x, y, z суммы к $\frac{x+y+z}{3}$ с сохранением и в таком случае x, y, z будут равны 30° $\Rightarrow$ $tg(x) = tg(y) = tg(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$