78-03-34-52
(124.30)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Спектора Максима Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

(+1)

Дата

«29». 03. 2026 года

Подпись участника

100 (сто) процентов

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Черновик

78-03-34-52 (124.30)

№1 $\sqrt{6(1-tg^2 x)} = 4\sin x$

$6(1-tg^2 x) = 16\sin^2 x$

$6 - 6tg^2 x = 16\sin^2 x$

$6 - 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 16\sin^2 x$

$16\sin^2 x + 6\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 6 = 0 \quad :2$

$8\sin^2 x + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 = 0$

$\frac{8\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3 = 0}{\cos^2 x \neq 0}$

$8\sin^2 x(1-\sin^2 x) + 3\sin^2 x - 3 = 0$

$8\sin^2 x - 8\sin^4 x + 3\sin^2 x - 3 = 0$ $t = \sin^2 x$

$t \in [0; 1]$

$11\sin^2 x - 8\sin^4 x - 3 = 0$

$11t - 8t^2 - 3 = 0$

$8t^2 - 11t + 3 = 0$ $D = 121 - 4\cdot 8\cdot 3 = 25 = 5^2$

$121 - 96 = 25$

$t_1 = \frac{11+5}{16} = \frac{16}{16} = 1$

$t_2 = \frac{11-5}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

ОДЗ:

$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 1\\ \sin^2 x = \frac{3}{8}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x = \pm 1\\ \sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}\end{array}\right.$

ОДЗ:

$\begin{cases} \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

№2

$a_1 > 99$

$a_1 < 1000$

$a_1 = 100a + 10b + c$

$100a + 10b + c \,\vdots\, 9$

самая маленькая цифра которой равна 1

117 – это

117 = 9·13

12 6

18 6

2

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

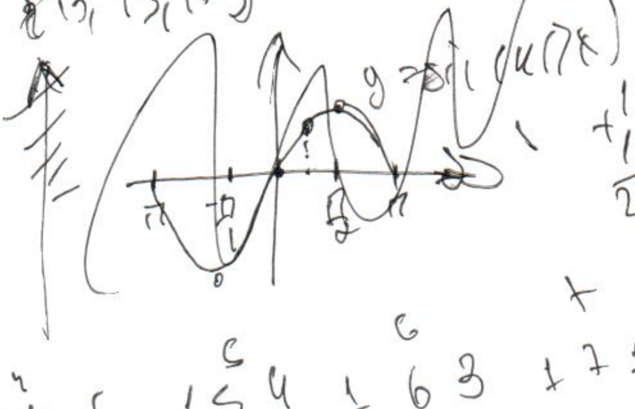
№ 4

перв 117 втор 126 135

$y = \sin(\pi x)$ $K \in \{13, 15, 17\}$

$0 \le x \le 1$

$-1 \le y \le 1$



$126 + 154 = 270$

№ 4 2 3 4 5 6

117 126 135 146 154 163 171

1000 - 9890 - нолей

$S = 126 + 154 + 981$

$270 + 981 = 1251$

$S = 1251$

981 - прадши

117 126 135 144 153 ~~162~~ 173

$H = 6$ м

$h = 2$ м

№ 7 $y = \pm\frac{x^2}{2} + C$ (-3; 7)

$3x^2 \log - \log_x - 2x \le 0$

A B (0;0) (3;0) (3;9)

№1

$$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 6(1-tg^2x) = 16\sin^2 x \quad (1) \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $3\cdot(1-tg^2x) = 8\sin^2 x$

Используем: $tg^2x = \dfrac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}\ 1-\sin^2 x}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $3\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\right) = 8\sin^2 x$

Замена: $\sin^2 x = t$

$3\left(1 - \dfrac{t}{1-t}\right) = 8t$ $\Rightarrow$ $\cancel{\dfrac{3(1-t)-3t-8t(1-t)}{1-t} = 0}$

$$\frac{3(1-t)-3t-8t(1-t)}{1-t} = 0$$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} t \neq 1 \\ 8t^2 - 14t + 3 = 0 \end{cases}$

$8t^2 - 14t + 3 = 0$

$D = 14^2 - 8\cdot 3\cdot 4 = 100$ $\Rightarrow$ $\left\{ \cancel{t_1 = \dfrac{14+10}{16} = \dfrac{24}{16} > 0} \right.$

$\Rightarrow$ $t_1 = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16} > 1$, не подходит т.к $t \le 1$.

$t_2 = \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

№2 Пусть n - трехзначное число, а $S(n)$ - сумма его цифр. Тогда $\frac{n}{S(n)} = 9k \Rightarrow n = 9k \cdot S(n) \Rightarrow$

$n \,\vdots\, 9 \Rightarrow S(n) \,\vdots\, 9$. НО n - трехзначное число, зн. $S(n) \in [1; 27]$ $(n \in [100; 999])$

Т.к $S(n) \,\vdots\, 9 \Rightarrow S(n) \in \{9, 18, 27\}$.

1) случай $S(n) = 27 \Rightarrow n = 999$, тогда $\frac{999}{27} = 37$, $37 \not\vdots\, 9$ - не подходит

2) случай $S(n) = 18 \Rightarrow n = 9k \cdot 18 = 162k$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

k	n	$S(n)$	$\frac{n}{S(n)}$
1	162	9	X
2	324	9	X
3	486	18	27
4	648	18	36
5	810	9	X
6	972	18	54

$\Rightarrow n \in \{486; 648; 972\}$

3) иначе.

$S(n) = 9 \Rightarrow n = 9k \cdot 9 = 81k$

$\Rightarrow$

k	n	$S(n)$	$\frac{n}{S(n)}$
2	162	9	18
3	243	9	27
4	324	9	36
5	405	9	45
6	486	18	X
7	567	18	X
8	648	18	X
9	729	18	X
10	810	9	90
11	891	18	X
12	972	18	X

$\Rightarrow n \in \{162, 243, 324, 405, 810\}$

Итого: $n \in \{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$

Ответ: 1539

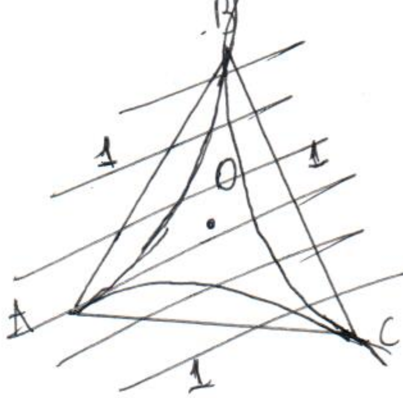
№3 Количество возможных значений для каждой координаты $4+4+1=9$. Зн, всего точек $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.

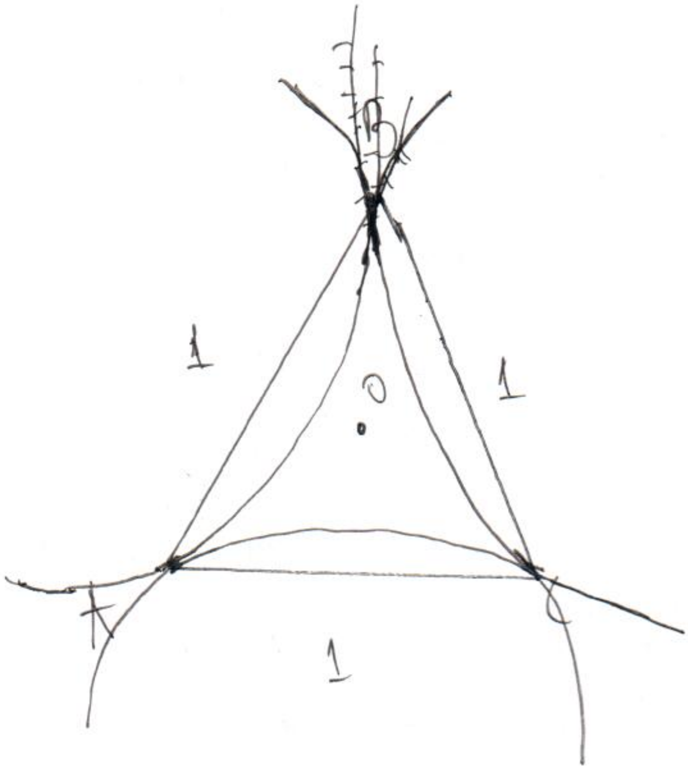
Пусть $Б, A, B_k$ вершины прямоуг. треугольн.

, где S – вершина прямого угла.
SA и SB должны быть перпендик. друг другу и параллельны осям коорд, тогда каждый треуг. задаётся так: 1) ~~Выбрать~~ Выбор вершины S; 2) Выбор пары коорд. осей, кот. будут паралл. SA и SB; 3) Выбор 2 верши A и B на соотв. прямых. Выбрать вершину S 729 способов. Выбрать пару осей 3 способа. Выбрать вершину A на соотв. прямой $9-1=$ 8 способов (все кроме S), аналогично, вершину B 8 способов.
Понятно, что так мы учли все треугольники по одному разу, так. как может быть один прямой угол А гипотенуза точно не параллельна ни одной из осей. Итого $729 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8 = 139\,968$ способов

Ответ

№5





Пусть вершины треугольника ABC. Рассмотрим одну из парабол, содержащую точки A и B, в ее системе координат. Т.к $AB = 1 \Rightarrow$ координаты A и B следующие: $(-\frac{1}{2}; y_0)$ и $(\frac{1}{2}; y_0)$. В силу симметрии и касания парабол изменение угла наклона касательной в т. A при переходе к касательной в т. B составляет $120°$.

$Y = CX^2 \Rightarrow Y' = 2CX$. Пусть в т. A касательная имела угол наклона α. Тогда в точке $(\frac{1}{2}; y_0)$ этот угол $-\alpha$. Т.е $2\alpha = 120$

$\Rightarrow \alpha = 60 \Rightarrow tg(60) = 2C \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$C = \sqrt{3}$. Найдем высоту дуги параболы, это разность ординат т. B и вершины параболы: $\frac{\sqrt{3}}{4} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Пусть O – центр фигуры $\Rightarrow$ найдем расстояние от O до AB. ~~AB~~ $\triangle ABC$ равносторонний со стороной 1, а O – его центр, значит расстояние от O до AB равно $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Получаем, что искомый радиус это модуль разности этих двух значений:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

V

№4 По формуле Эйлера: $R = 1 + \cancel{?} + E - \cancel{B}$, где R – искомое кол-во областей, V ~~B~~ – кол-во точек пересечения между графиками и сторонами прямоугольника, E – кол-во отрезков линий между вершинами. Отметим, что мы специально в формуле Эйлера берем 1, а не 2, чтобы не считать внешнюю грань.

1) Подсчет V:

У нас есть вершины следующих типов, углы прямоугольников (4 вершины), начало и конец графиков: т. $(0;0)$ и т. $(1;0)$ – лежат на боковых границах (2 вершины), точки

Точки касания верх. границы. Это максимумы функций $\sin(k\pi x)$. Для k их кол-во в т. $(0;1)$ равно $\lceil \frac{k}{2} \rceil$, т.е 6, 8 и 9 ~~соо~~ соответственно. Общих максимумов у них нет (не максимумов) $\Rightarrow$ 23 вершины.

Аналогично с точками касания нижней границы, только их уже $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, т.е 5, 7 и 8. Функции при $k = 11$ и $k = 15$ имеют ровно один общий минимум в $x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ всего вершин 19.

Заметим, что $\sin(a\pi x) = \sin(b\pi x)$ ~~когда и т~~ $\Leftrightarrow$ $2\sin\left(\frac{a-b}{2}\pi x\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\pi x\right) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2n}{a-b}, \ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2n+1}{a+b}, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Внутренние пересечения: $\in (0,1)$

1) Для $k = 11$ и $k = 15$. $\frac{2n}{4} \in (0;1)$

$\Rightarrow n \in (0;2) \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow$ всего одна точка, но она уже подсчитана, как т. касания с $y = -1$.

$\frac{2n+1}{26} \in (0;1) \Rightarrow 2n+1 \in (0;26)$

$\Rightarrow n \in (0,5;\ 12,5) \Rightarrow$ всего 13 точек.

НО! При $n = 6$ лежит на границе.

2) $k = 17$ и $k = 11$: $\frac{2n}{6} \in (0;1) \Rightarrow$

$n \in (0;3) \Rightarrow$ две точки.

[crossed out] $\frac{2n+1}{28} \in (0;1)$

$\Rightarrow n \in (-0,5;\ 13,5) \Rightarrow$ 14 точек

Из этих точек на границах $y = \pm 1$ точек нет. $\Rightarrow$ ~~берем~~ $\cancel{x = 16}$

3) $k = 15$ и $k = 17$

$\frac{2n}{2} \in (0;1) \Rightarrow$ нет точек

$\frac{2n+1}{32} \in (0;1) \Rightarrow n \in (-0,5;\ 15,5)$

$\Rightarrow$ всего 16 точек.

При проверке среди них нет граничных.

Также нужно проверить на тройные пересечения.

Из пар $k = 11$ и $k = 15$ кандидаты только $\frac{2n+1}{26}$. Из $k = 15$ и $k = 17$ только $\frac{2m+1}{32}$.

$\frac{2n+1}{26} = \frac{2m+1}{32} \Rightarrow 16 \cdot (2n+1) = 13(2m+1)$

$\Rightarrow 2n+1 \vdots 13 \Rightarrow$ ~~$m+1$~~ $2n+1 = 13$ т.к

$2n+1 \leq 25$. Следовательно $n=6$, $x=0{,}5$

для $k=17$ в $x=0{,}5$ значение $\underline{1}$, а для

$k=11$ и $k=15$ оно -1. Следовательно кратных

пересечений нет.

$V = 4+2+23+19+44 = 92$

2) Подсчет E.

Точек на периметре: $4+2+23+19 \Rightarrow$

отрезков на периметре 48. Ребра графиков:

когда кривая разбивается своими вершинами на

отрезки. Число отрезков на кривой равно числу

вершин на ней -1.

$k=11$: 2 (касан) + 6 (осям.) + 5 (мин.) + 12 (пересеч. с 15) + 16 (пересеч. с 17) = 41 $\Rightarrow$

40 ребер

$k=15$: $2+8+7+12+16 = 45$ вершин $\Rightarrow$

44 ребра.

$k=17$: $2+9+8+16+16 = 51 \Rightarrow$

50 ребер.

$\Downarrow$

$E = 48+40+44+50 = 182 \Rightarrow$

$R = 1 + 182 - 92 = 91$

Ответ: 91

№6 Пусть $H = 6$ — высота полёта светлячка, а $h = 2$ высота забора. Тень $f(X,Y)$ в точке забора от светлячка $S(x_s, y_s)$ на землю находим из подобия треугольников.

$$\begin{cases} y = y_s + \dfrac{0-H}{h-H} \cdot (0 - y_s) = -y_s\left(\dfrac{h}{H-h}\right) = -0{,}5y_s \\ x = x_s + \dfrac{H}{H-h} \cdot (x_z - x_s) = \dfrac{H \cdot x_z - h \cdot x_s}{H-h} = 1{,}5x_z - 0{,}5x_s, \end{cases}$$

где x_z — точка забора, принадлежащая $[0;1]$

Светлячок летит из $A(-3;7)$ в $B(3;5)$

В точке A: границы по X: от $1{,}5 \cdot 0 - 0{,}5 \cdot (-3) = 1{,}5$ до $1{,}5 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot (-3) = 6$;

$y = -3{,}5$.

В точке B: границы по X: от $1{,}5 \cdot 0 - 0{,}5 \cdot 3 = -1{,}5$ до $1{,}5 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 3 = 3$;

$y = -2{,}5$.

Область тени представляет собой многоугольник, объединяющий все граничные т., т.е. $(0;0)$; $(3;0)$;

(6; −3); (1,5; −3,5); (−1,5; −2,5) ÷

(т. (3; −2,5) − уже лежит внутри)

Вычислим площадь

$S = \frac{1}{2} \cdot |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_5 + x_5 y_1) - (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 + y_4 x_5 + y_5 x_1)|$

$= \frac{1}{2} \cdot |(0 - 10{,}5 - 21 - 3{,}75 + 0) - (0 + 0 - 5{,}25 + 5{,}25 + 0)| =$

$\frac{1}{2}$ 17,625

Ответ: 17,625

№8 $8x^2 \log_a x - \log_x a - 2x \leq 0$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$

$\log_x a = \frac{1}{\log_a x} \Rightarrow \frac{8(x \cdot \log_a x)^2 - 2(x \log_a x) - 1}{\log_a x} \leq 0$

Т.к $x > 0$, то домножим знам на x. Знак не поменяется

З.П $y = x \log_a x$

$\frac{8y^2 - 2y - 1}{y} \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{(4y+1)(2y-1)}{y} \leq 0$

$\Rightarrow y \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup (0; \frac{1}{2}]$

$y = \dfrac{x \ln x}{\ln a}$; $y' = \dfrac{\ln x + 1}{\ln a}$

ед. т. экстремума $x = \frac{1}{e}$, значение в ней $y = -\frac{1}{e \ln a}$

Проанализируем случай ... от a:

$a \in (0; 1)$

на $(1; +\infty)$ $y(x)$ строго убывает от 0 до $-\infty$. $\Rightarrow$ $y(x) \leq -\frac{1}{4}$. Будет выполняться на некотором луче $[x_0; +\infty)$. Мн не содерж. не в полу-инт. не в луч $\Rightarrow$ случай не подходит.

2) $a > 1$, $(\ln a > 0)$ $\Rightarrow$

$y(x)$ убывает на $(0; \frac{1}{e}]$ от 0 до

$m =$