0 645407 840004

64-54-07-84
(124.33)

Время выхода: 13:44
Время возвращения 13:47

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Степанова Сергея Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«29» 03. 2026 года

Подпись участника

64-54-07-84
(124.33)

Белозих

№1. $\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad \uparrow^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-6tg^2x = 16\sin^2 x \\ 4\sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin^2 x + 3\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 = 0; \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$8 - 8\cos^2 x + 3tg^2 x - 3 = 0;$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \mid : \cos^2 x;$

$tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

$\begin{cases} 5 - 8\cos^2 x + 3\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 0; \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$

$t \geq 0$

$-8\cos^2 x + \dfrac{3}{\cos^2 x} + 2 = 0; \quad \cos^2 x = t, \quad 8t - \dfrac{3}{t} - 2 = 0 \mid \cdot t;$

$8t^2 - 2t - 3 = 0;$

$\dfrac{D}{4} = 1 + 8\cdot 3 = 25$

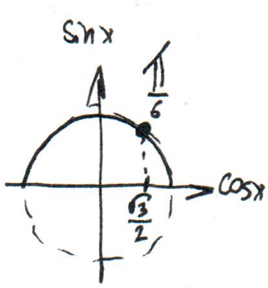
$t = \dfrac{1 \pm 5}{8} \Rightarrow t_1 = \dfrac{3}{4}$

$t_2 = -\dfrac{1}{2}$

неуд $t \geq 0$

1) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4};$

$\begin{cases} \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$



$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$

$\overline{abc} \in A$

№2. $\overline{abc} : (a+b+c) = 9n \quad - A_2 + A_6 + A_n - ?$

$100a + 10b + c = 9n(a+b+c);$

т.к. $\overline{abc} \vdots 9$, то $a+b+c \vdots 9$, $a+b+c = 9k$: $\overline{abc} = 81nk$,

Тогда множество A состоит из трехзнач. $1 \leq k \leq 3$

чисел, кратных 81: $A_2 = 81\cdot 3$, $A_6 = 81\cdot 7$

$A_1 = 81\cdot 2$, $\underline{A_n = 81(n+1)}$, $81\cdot 13 > 999 \Rightarrow A_n = 81\cdot 12$

Тогда $\Sigma = 81\cdot 3 + 81\cdot 7 + 81\cdot 12 = \underline{81\cdot 22}$

Ответ: $81\cdot 22 = 1782$

Черновик

$81\cdot 0+81\cdot 3$ $\quad \sin 0=0$ $\quad \sin x$, $T=2\pi$

$81\cdot 3=243$

$\sin 11\pi x$, $13\pi x$, $17\pi x$

$81\cdot 20+81$

$81 \times 22 = 162 + 162 = 1782$

$x_0+m,\ y_0$ $\quad x_0,\ y_0$

cx^2 $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \sin(k\pi x$

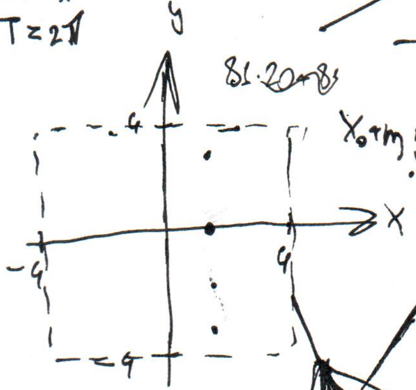
$(0;0)$

$(x; cx^2)$

$\log_3 9=2$

$\frac{k}{11}=\frac{m}{15}$

$x_0,\ y_0+k$



$\frac{a^2\sqrt3}{4}=\frac12\cdot h$

4×4

$\left(\frac12;\ \frac{c}{4}\right)$

$h=\frac{\sqrt3}{2}$

$a=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt3}{3}$

$\sin(k\pi x)$

$T=\frac{2\pi}{k\pi}=\frac{2}{k}$

$T_1:\ 11/2=5$

$T_2:\ 13/2=6$

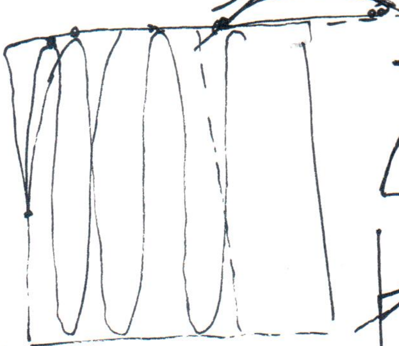
$T_3:\ 17/2=8$

кол-во периодов

$k=11$ $\quad \sin \pi x$

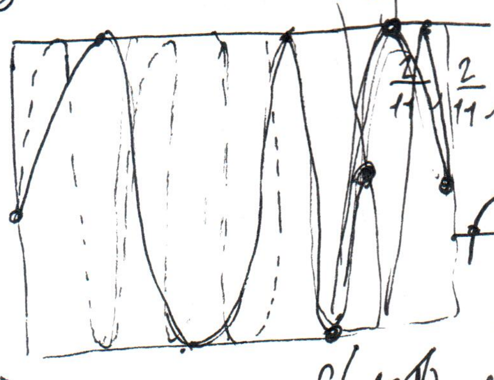
$T_1=\frac{2}{11}$, $T_2=\frac{2}{13}$,

$T_3=\frac{2}{17}$



1 период

$\frac{2}{11}$, $\frac{2}{11}$, ..., $\frac{1}{11}$

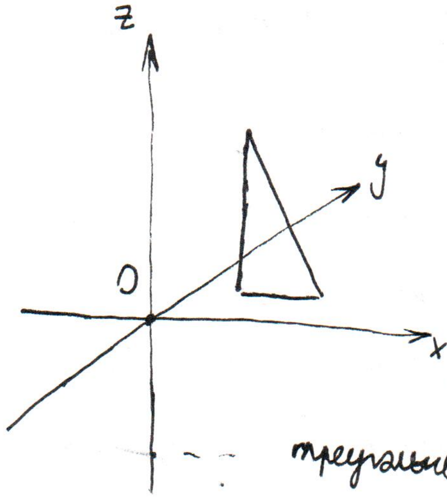


$\frac{\sqrt3}{3}$

$f(13\pi)=f(\pi)=$

№3. $(x; y; z)$ – , $|x|, |y| \le 4$, $x, y \in \mathbb{Z}$ $+z$ Белявик

Кол-во прямоугольных Δ, каждый из катетов ∥ одной из осей



Рассмотрим по отдельности 3 равносильных случая, когда стороны параллельны одной из трех пар осей x, y; y, z; ~~x, y~~ x, z.

Тогда задача сводится к нахождению всех нужных Δ в плоскости (полученный треугольник можно смещать, изменяя координату по третьей неиспользованной оси – всего таких параллельных переносов – 4 + 4 + 1 = 9 – кол-во всех коор, не превосх. ~~|z|~~ по модулю 4).

В плоскости:

Пусть вершина при прямом угле в координатах $(x_0; y_0)$. Тогда 2 другие вершины имеют координаты $(x_0+m; y_0)$, $(x_0; y_0+k)$, $m, k \in \mathbb{Z}$. Кол-во способов выбрать 2 оставшиеся вершины:
$8 \cdot 8 = 64$
↑
любой из 8 незанятых узлов по одной оси

Кол-во способов выбрать вершину при прямом угле: любой из узлов сетки – $9 \cdot 9 = 81$ (в квадрате 8×8)

Тогда всего Δ ∃: $\underbrace{64 \cdot 81}_{\Delta \text{ в плоскости}} \cdot 9 \cdot 3$

смещение по 3-ей оси

одна из пар ∥ ~~плоскостей~~ осей.

Ответ: $64 \cdot 81 \cdot 9 \cdot 3 =$

$\boxed{\text{Беловик}}$

№4. $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ $y = \sin k\pi x$, $k \in \{11, 15, 17\}$

Сколько пересекающихся областей.

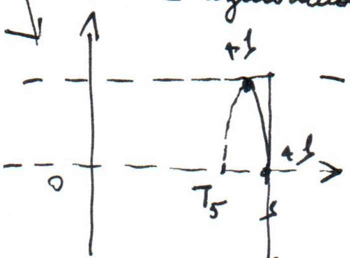
$f_1(x) = \sin 11\pi x$ — $T_1 = \frac{2\pi}{11\pi} = \frac{2}{11}$ — 5 полных периодов

$f_2(x) = \sin 15\pi x$ — $T_2 = \frac{2}{15}$ — 7 полных.

$f_3(x) = \sin 17\pi x$ — $T_3 = \frac{2}{17}$ — 8 полных.

Найдем, на сколько частей делит f_1 полоску.

$f_1(1) = \cancel{1}\ \sin 13\pi = 0$. — каждый раз когда функция принимает значение (-1) или 1 — кол-во областей увеличивается на 1. $\underbrace{5 \cdot 2}_{\text{из 5 полных периодов}} + \underbrace{2}_{\text{оставшиеся}} + \underbrace{1}_{\text{1 изначальная область}} = 13$ областей



— после пяти полных периодов еще два раза пересекает границу полоски.

Теперь добавим f_2. ~~если бы не было f_1, она разделила бы полоску на 7·2~~ Она делит полоску так же, но теперь, принимая все значения на промежутке от $[-1; 1]$ — пересечет f_1 1 раз, поделив плоскости на 2 новые и наоборот.

Тогда f_2 поделит ~~плоскость~~ полоску еще на $\overset{29}{\overbrace{7 \cdot 2 + 1 + 7 \cdot 2}}$

7 полных периодов

так же пересечет полоску в $y=1$, но при этом $f_1(1) = f_2(1) = 0$, поэтому новых областей не появится

пересечение 7 раз обеих синусоид

Теперь добавим f_3:

всего областей добавится

$\underbrace{8 \cdot 2}_{16} + 1 + \underbrace{8 \cdot 2 \cdot 2}_{32} = 49$

пересечения с f_2 и f_3

Тогда всего областей: $13 + 29 + 49 =$

$=$ ~~82~~ ~~92~~ 91

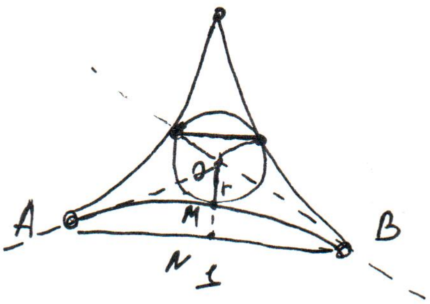
Ответ: ~~82~~ ~~922~~ 91.

№4. при этом все точки, где синусоиды пересекают только, различны (кроме $x=1$), т.к. пусть $\frac{2k}{11} = \frac{2m}{15}$, $k, m \in N$.

$15k = 11m \Rightarrow k \vdots 11 \Rightarrow \frac{2k}{11} > 1$ (все числа 11, 15, 11 ~~-то~~ попарно взаимнопростые)

$\boxed{\text{Беловик}}$

№5. $y = Cx^2$ $\quad r - ?$

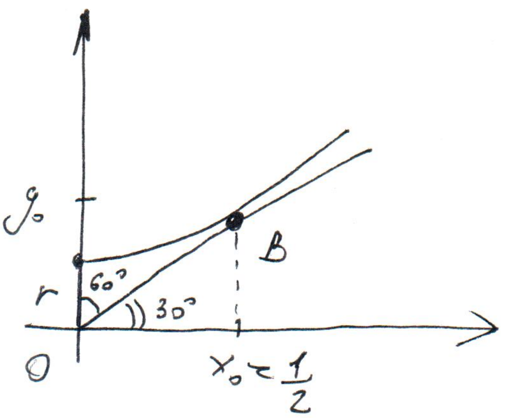


Т.к. треугольник симметричный, то точки касания находятся в вершинах парабол. $\angle AOB = 120^\circ$

$\angle NOB = 60^\circ$ - из симметрии, $NB = \frac{1}{2}$

OB - касательная к параболам, т.к. угол нулевой,

Тогда:



ур-ние прямой OB:

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ - т.к. угол с $OX = 30^\circ$

$f(x) = Cx^2 + r$.

в точке x_0: $f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $2Cx_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда $f(x_0) = y_0$, где $y_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (~~$tg 30^\circ = \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y_0}{1/2}$~~

$tg 30^\circ = \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 2y_0$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} + r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Ответ: $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$8x^2\log_a x - \log_x a - 2x \geq 0.$ $\quad a, x > 0$ $\quad \boxed{\text{Беловик}}$

полуинтервал и точка. $\quad a, x \neq 1.$

$$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \geq 0; \Big| \cdot \log_a x,\ \log_a x > 0.$$

1) $\log_a x > 0.$

$\cancel{8x^2}$ $\quad 8x^2\log_a^2 x - 2x\log_a x - 1 \geq 0;$

$x\log_a x = t:$ $\quad 8t^2 - 2t - 1 \geq 0;$

$$D = 4 + 4\cdot 8 = 36$$

$$t = \frac{2\pm 6}{16} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{cases} x\log_a x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ \log_a x > 0. \Rightarrow (a-1)(x-1) > 0 \end{cases}$$

2) $\log_a x < 0:$ $\begin{cases} 8t^2 - 2t - 1 \leq 0 \\ \log_a x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\log_a x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \\ \log_a x < 0 \Rightarrow (a-1)(x-1) < 0 \end{cases}$

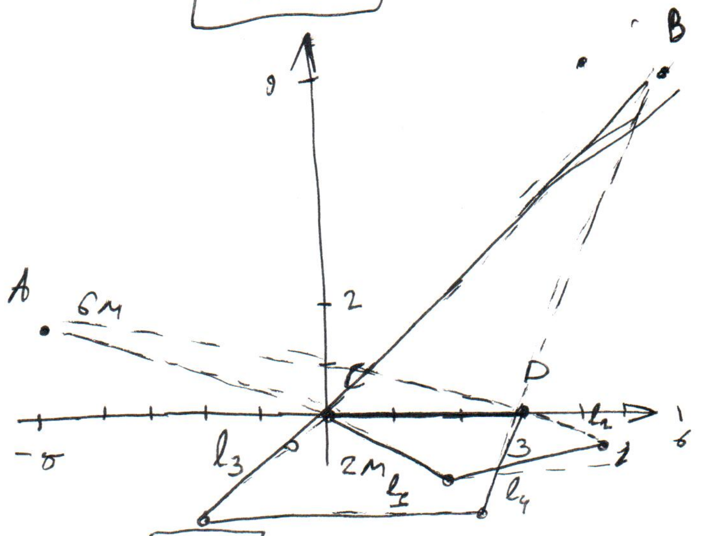
Если $a > 1$:

$f(x) = x\log_a x$ — возрастающая.

$\cancel{f(0) = f \to 0}$ $\quad x \to 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$, $\quad x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

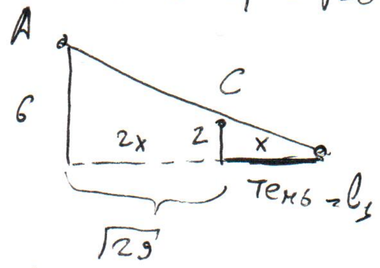
1) $\begin{cases} x > 1 \\ x\log_a x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cancel{\Rightarrow x \in} \end{cases}$

№6 Беловик



Найдем тень, отбрасываемую в точке A:

$AC = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$



$l_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$AD = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$l_2 = \sqrt{17}$

Тень в точке B:

$BC = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$

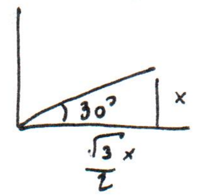
$l_3 = \sqrt{117}$

$BD = \sqrt{\cancel{16}\ 9+81} = \sqrt{90}$

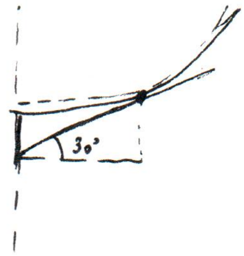
$l_4 = \frac{\sqrt{90}}{2}$

Тогда затененная область — есть пересечение полученных четырехуголь-
ников.

Черновик

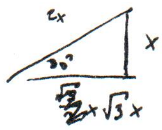


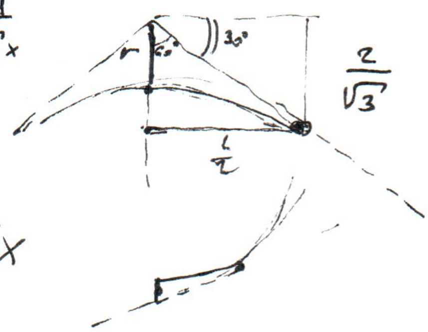
$y = \frac{2}{\sqrt{3}} x$



$y' = 2Cx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cancel{x} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}} x$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x^2 + r.$ $\cancel{g(x) = f(x) + f'(x)}.$





$\frac{2}{\sqrt{3}}$

$g(x) = f'(x_0)$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$

$tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y_0}{\frac{1}{2}}$

$y_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$

В при $x_0 = \frac{1}{2}$! $y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$Cx^2 = 2Cx = \frac{1}{\sqrt{3}}$ при $x = \frac{1}{2}$!

$2C \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} x^2.$

$\cancel{Cx^2 + r}$ $\frac{1}{\sqrt{3}} x^2 + r$

$\frac{1}{\sqrt{3}} x_0^2 + r = y_0$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + r = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{4\sqrt{3}} + r = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$r = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{8-1}{4\sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}}$