0 683703 020003

68-37-03-02
(124.38)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Стюхина Артёма Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» 03 2026 года

Подпись участника

Ст

85 (Восемьдесят пять)

68-37-03-02 (124.38)

Чистовик

N 1

$$\sqrt{3(1-ctg^2x)}=2\sqrt{2}\cos x \quad ; \sin x\neq 0$$

$$\begin{cases}\cos x\geq 0 & (1)\\ 3\dfrac{(\sin^2x-\cos^2x)}{\sin^2x}=4\cdot 2\cos^2x & (2)\end{cases}$$

(2): $-3\cos 2x=2\sin^2 2x \quad ; \sin x\neq 0$

$-3\cos 2x=2(1-\cos^2 2x)$

$-3\cos 2x=2-2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x-3\cos 2x-2=0$

Пусть $\cos 2x=t$

$2t^2-3t-2=0$

$D=9+4\cdot 2\cdot 2=25$

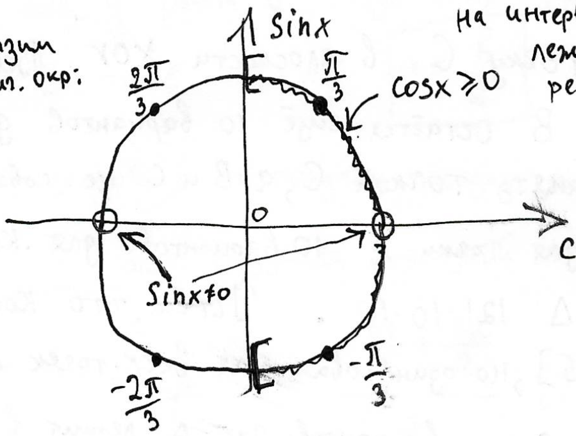
$t=\dfrac{3\pm 5}{4}$ $\quad t_1=2$ $\quad t_2=-\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{ll}\cos 2x=2 & \text{Нет корней}\\ \cos 2x=-\frac{1}{2} & 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k; k\in Z\end{array}\right.$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases}\cos x\geq 0\\ \sin x\neq 0\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k; k\in Z\end{cases}$$

Изобразим на триг. окр:



На интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ лежат только серии решений $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

Системе удовлетворяют только $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z$

N 2

Пусть n – натуральное число; S(n) – сумма его цифр

Тогда $\dfrac{n}{S(n)}=9\cdot k$, где $k\in\mathbb{N}$ т.к. $S(n)$ по смыслу задачи $\in\mathbb{N}$, то

$n=S(n)\cdot 9k$; правая часть кратна 9, значит и левая часть тоже.

$n \vdots 9$ т.к. n кратно 9, то сумма цифр также кратна 9

Тогда правая часть равенства делится на $9\cdot 9=81$ => $n \vdots 81$

В множестве A все числа кратны 81.

№2 (продолж.)

Чистовик

Перечислим все трёхзначные числа, кратные 81:

① $81\cdot2=162$	$S(162)=9$	⑥ $81\cdot\cancel{6}7=567$	X	⑪ $81\cdot12=972$ | $S(972)=18$
② $81\cdot3=243$	$S(243)=9$	⑦ $81\cdot8=648$	$S(648)=18$	
③ $81\cdot4=324$	$S(324)=9$	⑧ $81\cdot9=729$	X	
④ $81\cdot5=405$	$S(405)=9$	⑨ $81\cdot10=810$	$S(810)=9$	
⑤ $81\cdot6=486$	$S(486)=18$	⑩ $81\cdot11=891$	X	

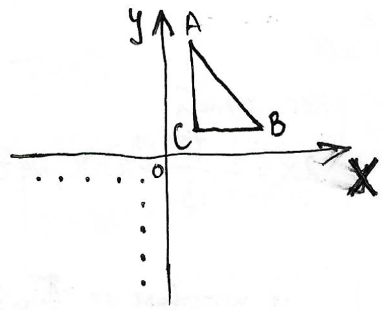
Числа, отмеченные X, не удовл. условию задачи, т.к. сумма их цифр = 18, но они нечётны. Нетрудно заметить, что остальные числа обладают таким свойств.

② + ⑤ + $\cancel{⑩}$ ⑨ $= 81\cdot3+81\cdot6+81\cdot10 = 81\cdot(3+6+10) = 81\cdot\cancel{20}\,19 = \cancel{1620}\ 810+729 =$
$= \underline{1539}$

Ответ: см. выше. ② + ⑤ + предпослед $= 1539$

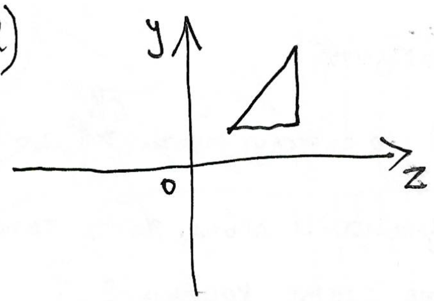
№3 Если две прямые параллельны, то они лежат в одной плоскости.
Треугольник может быть расположен 1) в плоскости XOY (если его катеты ∥ OX и OY соотв.)
2) в плоскости YOZ (если его катеты ∥ OY и OZ)
3) в плоскости XOZ (если его катеты ∥ OX и OZ)

1)

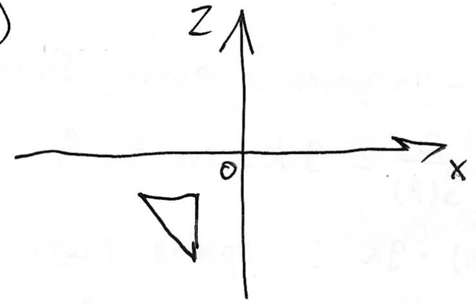


Выберем точку C в плоскости XOY. Всего $11\cdot11=121$ вариант.
Для точки B остаётся ещё 10 вариантов для координаты X (одна из 11 возможных занята точкой C, а B и C не совпадают). ($y_B=y_C$ $z_B=z_C$ $x_B\neq x_C$)
Аналогично для точки A 10 вариантов для координаты Y.
Тогда всего Δ $121\cdot10\cdot10$. Учтём, что координата Z может быть любой $\in[-5;5]$, но одинаковая для всех точек Δ ($z_A=z_B=z_C$)
Тогда общее число вариантов, где Δ лежит в плоскости, параллельной или совпадающей с XOY: $121\cdot10\cdot10\cdot11=11^3\cdot10^2$

2)



3)

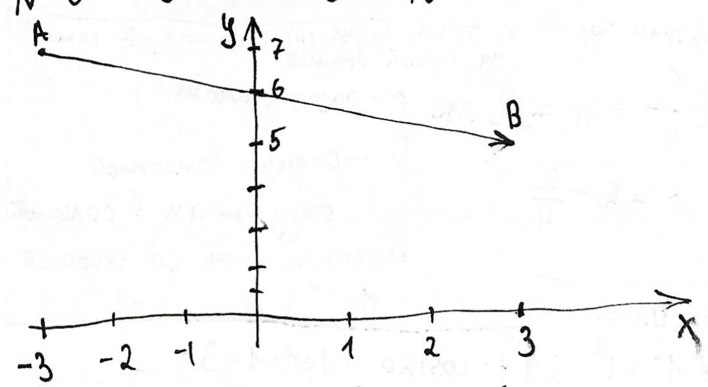


Для случаев с плоскостями YOZ и XOZ кол-во такое же.
Тогда общее число треугольников в множестве F: $11^3\cdot10^2\cdot3=399\,300$
Ответ: 399300

68-37-03-02
(124.38)

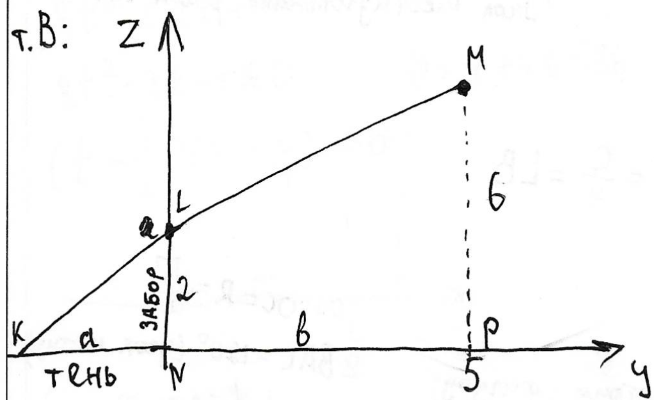
Чистовик

N 6 Введём систему координат:



Рассмотрим точку на векторе сбоку:

т.В:



$\Delta KLN \sim \Delta KMP$ по 2 углам

$\angle K$ - общий

$\angle KLN = \angle KMP$ соотв при $LN \parallel MP$ и KM-сек.

$\frac{MP}{LN} = \frac{KP}{KN}$ $\quad \frac{6}{2} = \frac{5+a}{a}$

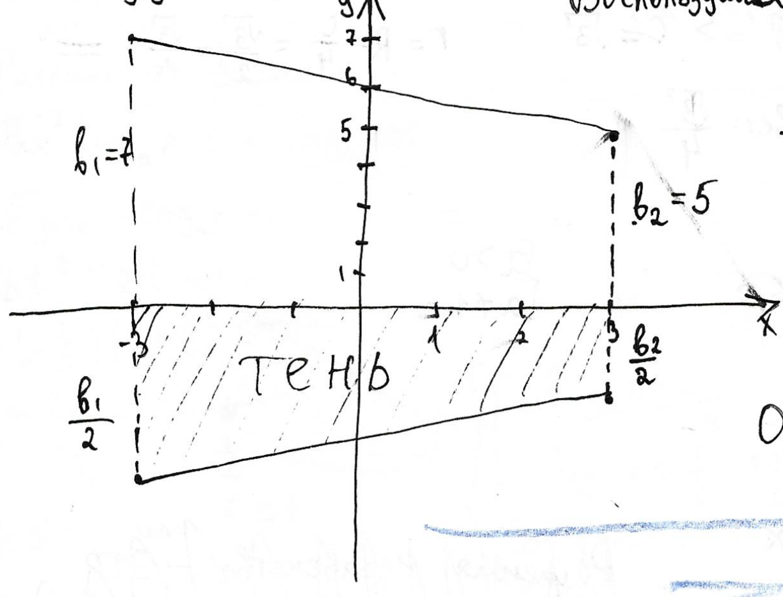
$3a = 5+a$

$a = \frac{5}{2}$

Для всех точек на векторе $\vec{AB}$ построенные таким образом треугольники сохраняют отношение $\frac{MP}{LN} = \frac{6}{2} = 3$, т.к. высота постоянна.

Пусть координата света по оси y равна $в$, тогда тень будет в полоске длиной a: $\frac{a+в}{a} = 3$ $\quad 3a = a+в$ $\quad 2a = в$ $\quad \boxed{a = \frac{в}{2}}$

Просуммируем тонкие полоски длиной a и получим площадь, она численно равна площади под графиком:



Воспользуемся формулой площади трапеции:

$$\frac{\frac{в_1}{2}+\frac{в_2}{2}}{2} \cdot (3-(-3)) =$$

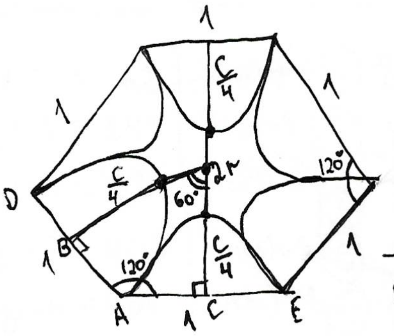
$$= \frac{в_1+в_2}{4} \cdot 6 = \frac{7+5}{2} \cdot 6 =$$

$$= 18$$

Ответ: 18

N5

Чистовик



Из симметрии параболы точки O (центр), вершина, т. B лежат на одной прямой.

$2\cdot\frac{C}{4}+2r=2R$, где r – радиус (искомый)

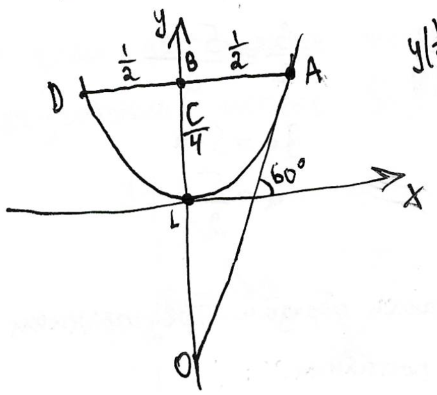
$r=R-\frac{C}{4}$

R – радиус вписанной окружности в большой шестиугольник со стороной 1.

По т. cos в $\triangle DAE$:

$(2R)^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos120=1+1+1=3$

$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Угол шестиугольника равен 120°.

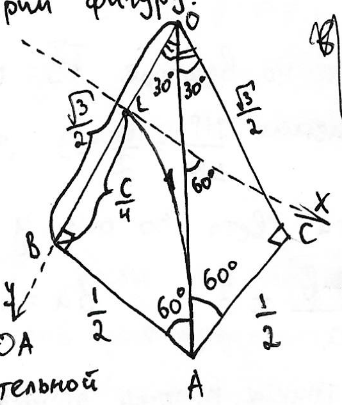


$y(\frac{1}{2})=C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{C}{4}=LB$

$OB=OC=R=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle BAC=120^\circ$ (угол шестиуг)

Рассмотрим фигуру:



$\angle BOC=180-120=60^\circ$

OA – бисс, т.к. $\triangle BOA=\triangle AOC$ по 2 катет.

в т. A прямая OA является касательной к параболе.

Тангенс угла наклона прямой $=tg60^\circ=\sqrt{3}$

$y'=2Cx$

$y'(\frac{1}{2})=2C\cdot\frac{1}{2}=tg60^\circ=\sqrt{3} \Rightarrow C=\sqrt{3}$

$r=R-\frac{C}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=$

$r=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

N8

① $\begin{cases}8x^2\log_a x-\log_x a-2x\le0\\ x>0\\ x\ne1\end{cases}$; $\begin{cases}a>0\\ a\ne1\end{cases}$

①: $8x^2\log_a x\le 2x+\frac{1}{\log_a x}$

$8x^2\log_a x\le\frac{2x\log_a x+1}{\log_a x}$

~~Решения неравенства – это полуинтервал от b до +∞ причем b > 1~~

68-37-03-02
(124.38)

Чистовик

~~I сл. Единственная точка на интервале (0;1)~~
~~II сл. Единственная точка на интервале от 1 до б~~ ~~не включ.~~

I сл. $\log_a x > 0$ II сл. $\log_a x < 0$

~~Рассмотрим II случай и $a>1$, тогда $\log_a x > 0$~~ Рассмотрим I сл.

$8x^2 \log^2_a x \le 2x \log_a x + 1$

Пусть $x \cdot \log_a x = t$

$8t^2 \le 2t + 1$

$8t^2 - 2t - 1 \le 0$ $D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$ $t_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{16}$

$(t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{4}) \le 0$

+ $-\frac{1}{4}$ − $\frac{1}{2}$ + t

$t \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

$\begin{cases} x \cdot \log_a x \ge -\frac{1}{4} \\ x \cdot \log_a x \le \frac{1}{2} \\ \log_a x > 0 \\ x \in (0;1) \cup (1;+\infty) \end{cases}$

т.к. $x>0$ и мы рассматриваем $\log_a x > 0$ то решение : $x > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot \log_a x \le \frac{1}{2} \\ \log_a x > 0 \\ x \in (0;1) \cup (1;+\infty) \end{cases}$

$x \cdot \log_a x \le \frac{1}{2}$

$\log_a x^x - \log_a a^{\frac{1}{2}} \le 0$

~~$(a-1)(x^x - a^{\frac{1}{2}}) \le 0$~~

~~$\log_a \frac{x^x}{a^{\frac{1}{2}}} \le 0$~~

$(a-1)(x^x - a^{\frac{1}{2}}) \le 0$

Если $a \in (0;1)$, тогда $x^x \ge a^{\frac{1}{2}}$

Если $a > 1$, тогда $x^x \le a^{\frac{1}{2}}$

Рассмотрим II сл.

$8x^2 \log^2_a x \ge 2x \log_a x + 1$

Пусть $x \log_a x = t$

$8t^2 - 2t - 1 \ge 0$

$(t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{4}) \le 0$

+ $-\frac{1}{4}$ − $\frac{1}{2}$ + t

$t \le -\frac{1}{4}$ или $t \ge \frac{1}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \cdot \log_a x \le -\frac{1}{4} \\ x \cdot \log_a x \ge \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \log_a x < 0 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{array} \right.$

т.к. $x>0$, мы рассматриваем $\log_a x < 0$, то произведение < 0
Нет корней

Чистовик

$$\begin{cases} x\cdot\log_a x \le -\frac{1}{4} \\ \log_a x < 0 \\ x\in(0;1)\cup(1;+\infty) \end{cases}$$

$\log_a x^x + \log_a a^{\frac14} \le 0$

$\log_a x^x \cdot a^{\frac14} \le 0$

$(a-1)(x^x\cdot a^{\frac14}) \le 0$

т.к. $a>0$ и $x>0$, то скобка положительна

$a-1\le 0$

$a\le 1$, но $a>0$; $a\ne 1$

$a\in(0;1)$

Тогда чтобы $\log_a x$ был <0

$x>1$ полуинтервал

№4

$y=\sin k\pi x$

Найдём нули функции $\sin k\pi x=0$

$k\pi x=\pi n$

$kx=n$; $n\in Z$

$x=\frac{n}{k}$

Найдём пересечения $y=\sin 13\pi x$ и $y=\sin 15\pi x$

$\sin 13\pi x=\sin 15\pi x$

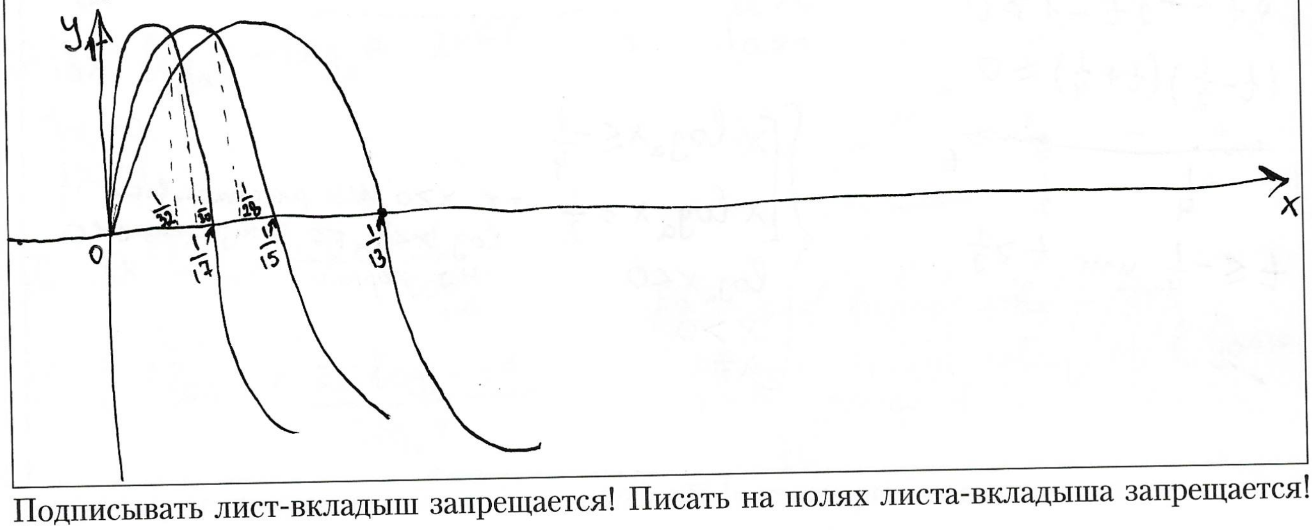
$$\left[\begin{array}{l} 13\pi x+2\pi n=15\pi x \\ \pi-13\pi x=15\pi x+2\pi n \end{array}\right. ;n\in Z \quad \left[\begin{array}{l} x=n \\ 28x+2n=1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=n \\ x=\frac{1+2n}{28} \end{array}\right. ;n\in Z$$

$\sin 15\pi x=\sin 17\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 15\pi x+2\pi l=17\pi x \\ \pi-15\pi x=17\pi x+2\pi l \end{array}\right. ;l\in Z \quad \left[\begin{array}{l} x=l \\ 32x=2l+1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=l \\ x=\frac{1+2l}{32} \end{array}\right.$$

$\sin 13\pi x=\sin 17\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 13\pi x=17\pi x+2\pi m \\ \pi-13\pi x=17\pi x+2\pi m \end{array}\right. ;m\in Z \quad \left[\begin{array}{l} 4x=2m \\ 30x=1+2m \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{m}{2} \\ x=\frac{1+2m}{30} \end{array}\right.$$



Чистовик

Всего пересечений $y=\sin 13\pi x$ и $y=\sin 15\pi x$:

На участке $x \in [0;1]$: ~~12 в точках x=0 и x=1~~

$\underline{14 \text{ точек}}$ + 2 точки $(0;0)$ $(1;0)$

$$0 \le \frac{1+2n}{28} \le 1 \qquad 0 \le 1+2n \le 28$$
$$-1 \le 2n \le 27$$
$$-\frac{1}{2} \le n \le \frac{27}{2}$$
$$n \in \{0;1;2;3;4;\dots;12;13\}$$

Кол-во пересечений $y=\sin 17\pi x$ и $y=\sin 15\pi x$: на участке $x \in [0;1]$

$\underline{16 \text{ точек}}$ + 2 точки $(0;0)$ $(1;0)$

$$0 \le \frac{1+2l}{32} \le 1 \qquad 0 \le 1+2l \le 32$$
$$-1 \le 2l \le 31$$
$$-\frac{1}{2} \le l \le \frac{31}{2}$$
$$l \in \{0;1;2;3;\dots;15\}$$

Кол-во пересечений $y=\sin 17\pi x$ и $y=\sin 13\pi x$: на участке $x \in [0;1]$

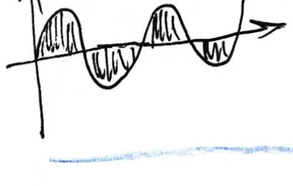
$\underline{15 \text{ точек}}$ + 2 точки $(0;0)$; $(1;0)$

$$0 \le \frac{1+2m}{30} \le 1 \qquad 0 \le 1+2m \le 30$$
$$-1 \le 2m \le 29$$
$$-\frac{1}{2} \le m \le \frac{29}{2}$$
$$m \in \{0;1;2;\dots;14\}$$

$$\frac{1+2n}{28} = \frac{1+2l}{32} \qquad 32+64n = 28+56l$$
$$4+64n = 56l$$
$$1+16n = 14l$$
$$1+16n \equiv_{14} 0$$
$$2n+1 \equiv_{14} 0$$

Нет места кроме $x=0$ и $x=1$, где все 3 графика пересекаются в одной точке.

Каждое пересечение $y=\sin 17\pi x$ с $y=\sin 15\pi x$ или $y=\sin 13\pi x$ разделяет уже существующую на две => их количество возрастает на 1.



Изначальное кол-во областей = 17

$17+15+16+14 = 62$ Ответ: 62

Черновик

$\sqrt{3\left(1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)7} = 2\sqrt{2}\cos x$ $\quad \cos x \geq 0 \; t$

$8x^2\log_a^2 x \leq 2x\log_a x+1$

$3\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)}{\sin^2 x} = 4\cdot 2\cos^2 x$ $\quad 2t^2 \leq 2t+1$

$\frac{2x\cdot\log_a x+1}{\log_a x}$ $\quad \times\frac{81}{2}$ $\quad 162$ $\quad \overline{abc}$ $\quad :(a+b+c) = K = 9n$

$-3\cos 2x = 2\sin^2 2x$

$8x^2\log_a x - \frac{81\cdot 2}{9} = 18$ $\quad a>0$ $\quad a\neq 1$

(кратное 9)$\cdot$(сумма цифр) кратна 9

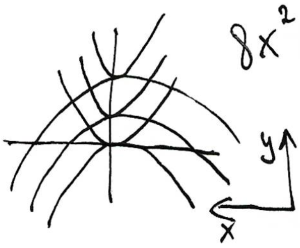
$8x^2\log_a x \leq 2x+\log_a x$

$= $ число $\leftarrow$ кратно 81

кратно 9

$\frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$ $\quad \log_a x$

$\frac{81}{9} = 9$



$(x_2; y_1; z_1)$ $(x_1; y_1; z_1)$

$a^t = x$ $\quad x>0$ $\quad x\neq 1$

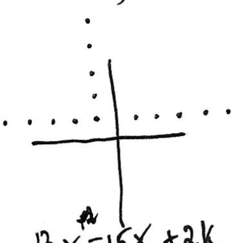
$8a^{2t} - \frac{1}{t}$ $+2a^t \leq 0$

$8x^2\log_a x - \frac{1}{\log_a x} - 2x \leq 0$

121
11
121
121
1331
3
3993

$\pi - x$

x



$x>0$

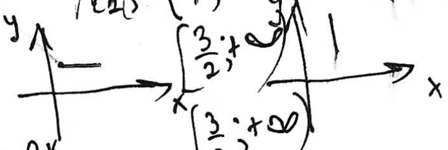
$x\neq 1$

$(1; +\infty)$

$13x = 15x + 2k$

$x=0$

$\left[\begin{array}{l} 13\pi x = 15\pi x + 2\pi K \\ \pi - 13\pi x = 15\pi x + 2\pi K \end{array}\right.$



$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ $\quad \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

$1-13x = 15x+2K$

$28x + 2k = 1$

$x = \frac{1-2K}{28}$

$\frac{1}{13} < \frac{3}{28}$

$\frac{28}{28\cdot 13} < \frac{3\cdot 13}{28\cdot 13}$

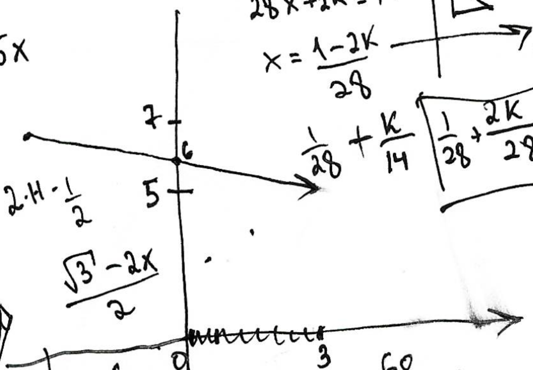
$1-13x = 15x$

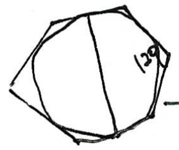
$x = \frac{1}{28}$

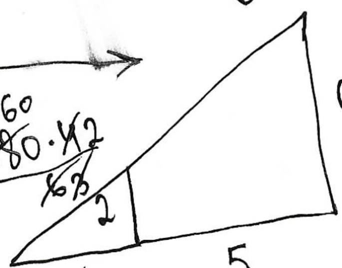
$\frac{1}{28} + \frac{K}{14}$ $\quad \frac{1}{28}+\frac{2K}{28}$

$1+1+2\cdot H\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}-2x}{2}$







60

$\frac{180\cdot 4}{6}$

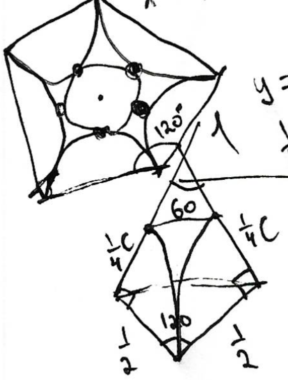
$180\cdot 4$

720°

$x = \frac{K}{13}$ $\quad \frac{6}{2} = \frac{5+x}{x}$

$13x = K$ $\quad 3x = 5+x$

$13\pi x = \pi K$ $\quad x = \frac{5}{2}$



120°

Ответ

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{C}{4}$?

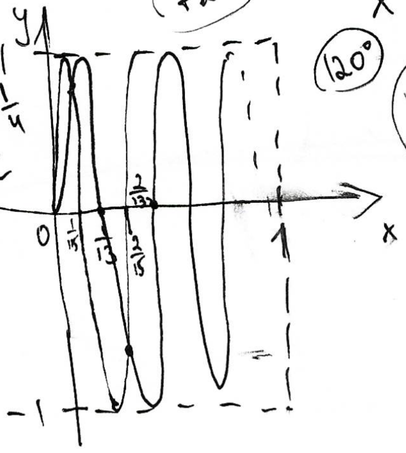
$y = C\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}C$

$y = \sin 13\pi x$

$y = \sin 15\pi x$

$y = \sin 17\pi x$



$\frac{1}{13}$ $\quad \frac{1}{15}$

$\sin 13\pi x = \sin 15\pi x$

$13\pi x = 15\pi x$