0 679367 460002

67-93-67-46
(124.40)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по ~~матема~~ математике
профиль олимпиады

Сурковой Ульяны Олеговны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«29» марта 2026 года

Подпись участника

67-93-67-46 (124.40)

80 (Восемьдесят)

черновик

№1

$\sqrt{6(1-tg^2x)} = 4\sin x \quad |^{\wedge 2}$

$6(1-tg^2x) = 16\sin^2x$

$6 - 6tg^2x = 16\sin^2x \quad | \cdot \cos^2 x$

$6 - 6\sin^2x = 4\sin 2x$

$6 - 6tg^2x - 16\sin^2x$

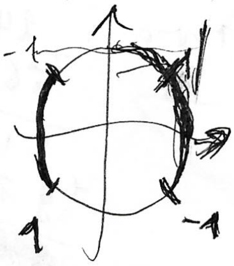
$6 - \sin^2x\left(\frac{6}{\cos^2x} - 16\right) = 0$

$6(1-tg^2x) \geq 0$

$1 - tg^2x \geq 0$

$tg^2x \leq 1$

$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$



№2

Все числа

$k \in [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$

$81 \times 12 = 162 + 81\ldots = 972$

$81 \times 3 = 243$

n - число

$100 \leq n \leq 999$

$81 \times 1 = 81$

$81 + 81 = 891$

$k = 6$

$999 = 27$

$999 : 27 = 37$

-81

189

$999 = 9 \cdot 111$

Числа делятся на 9

$81 \times 6 = 486$

Первое число 108

117

$3\,99 \times 3$

$111 : 3 = 37$

-9

21

~~Чтоб~~ Число представляет как $n = 8 \cdot 9 \cdot k$

$27 \times 37 = 189 + 81 = 999$

$37 \cdot 27 = 999$

Чтобы число делилось на 9, сумма цифр = 9, то есть число делится на 81

27 - наиб

$n = 81 \cdot k$ $k =$

$100 \leq n \leq 999$

Черновик

№2 Черновик

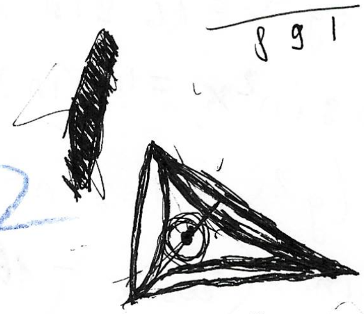
числа [162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972]

$81 \times 3 = 243$ $\quad 81 \times 4 = 324$ $\quad 81 \times 5 = 405$ $\quad 81 \times 6 = 486$ $\quad 81 \times 7 = 567$ $\quad 81 \times 8 = 648$ $\quad 81 \times 9 = 729$ $\quad 81 \times 11$

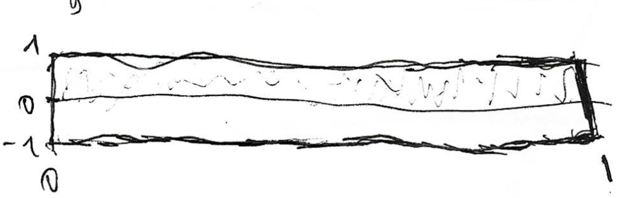
$729 + 81 = 810$ $\quad 81 + 810 = 891$

$81 \times 12 = 162$ $\quad 81 + 891 = 972$

Сумма: $243 + 567 = 810$ $\quad 810 + 972 = 1782$

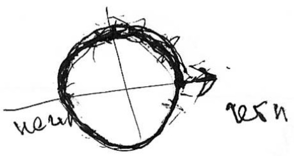


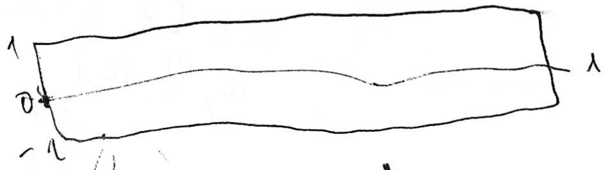
№3.



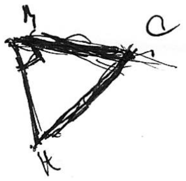
$y = \sin k\pi x$

1) ~~$y = \sin \pi x \pi$~~ $\quad y = \sin 11\pi$





№4



A(x_1, y_1)
B(x_2, y_2)
C(x_3, y_3)

$AB = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
длина $= \sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2}$
$AC = (x_1 - x_3; y_1 - y_3)$
длина $= \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2}$
$BC = (x_2 - x_3; y_2 - y_3)$
длина $= \sqrt{x_{23}^2 + y_{23}^2}$

~~Пусть гипотенуза AC~~

$x_{12}^2 + y_{12}^2$

кол-во гипотенуз: $\frac{81(81-17)}{2}$ параллельность осей

У каждой гипотенузы есть 2 треугольника поэтому их $81(81-17)$
их домножаем на 17 из-за симметрии

~~Чистовик~~ ~~черновик~~ ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

67-93-67-46
(124.40)

Черновик

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

~~Черновик~~

Черновик

$$\begin{array}{r} \overset{2}{18} \\ \times\ 3 \\ \hline 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{4}{18} \\ \times\ 6 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 648 & 18 \\ -54 & 36 \\ \hline 108 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 648 & 45 \\ -45 & 1 \\ \hline 198 & \end{array}$$

Чистовик

№3

Такие треугольники ~~пр~~ параллельны либо OXY, либо OXZ, либо OYZ.

Из-за симметрии можно посчитать только треугольники Oz = 0, и домножить на 9·3.

Подсчитаем количество гипотенуз:

$$\frac{81\cdot(81-1-8-8)}{2},$$

вычитаем 17, чтобы брать гипотенузы параллельные осям.

Гипотенузе соответствует 2 треуг. => их 81·64

=> Следовательно, всего 81·64·9·3 = 139968

№2

Число поделили на сумму цифр и частное делится на 9 => число делилось на 9.

К это трехзначное число $\overline{abc}$.

$\overline{abc} \,\vdots\, 9 \Rightarrow a+b+c \,\vdots\, 9$, так как $\overline{abc} - (a+b+c) =$

$99a + 9b = 9(11a+b)$

$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} \,\vdots\, 9 \Rightarrow \overline{abc} \,\vdots\, 9(a+b+c) \Rightarrow$

$= \overline{abc} \,\vdots\, 81$

Переберем все числа до 1000, дел. 81 и проверим их

$81 < 100$

$\frac{162}{9} = 18 \qquad 18 \,\vdots\, 9$

$\frac{243}{9} = 27 \qquad 27 \,\vdots\, 9$

$\frac{324}{9} = 36 \qquad 36 \,\vdots\, 9$

$\frac{405}{9} = 45 \qquad 45 \,\vdots\, 9$

$\frac{486}{18} = 27 \qquad 27 \,\vdots\, 9$

$567 \not\vdots\, 18$

$\frac{648}{18} = 36 \qquad 36 \,\vdots\, 9$

$729 \not\vdots\, 18$

$\frac{810}{9} = 90 \qquad 90 \,\vdots\, 9$

$891 \not\vdots\, 18$

чистовик

$\frac{972}{18}=54 \qquad 54 \vdots 9$

Ответ: $A=\{162, 243, 324, 405, \cancel{648}, 485, \overset{648}{\cancel{648}}, 810, 972\}$

$243+648+972=1863$

№1

$\underbrace{\sqrt{6(1-tg^2x)}}_{\geq 0} = \underbrace{4\sin x}_{\geq 0} \quad \Big|\,{}^{2}$

$\begin{cases} 6(1-tg^2x)=16\sin^2x \\ 1-tg^2x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow tg^2x\leq 1 \Rightarrow \begin{cases} tg\,x\leq 1 \\ tg\,x\geq -1 \end{cases}$

$3\,\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x} = 8\sin^2x$

$3\cos 2x = 8\sin^2x\cdot\cos^2x$

$3\cos 2x = 2\underbrace{\sin^2 2x}_{1-\cos^2 2x}$

$3\cos 2x = 2-2\cos^2 2x$

$2\cos^2 2x+3\cos 2x-2=0$

$\cos 2x = t$

$-1\leq t\leq 1$

$2t^2+3t-2=0$

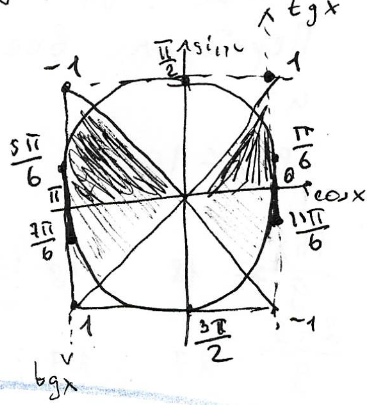
$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4}$ -2, невозм; $t\geq -1$; $\frac{1}{2}$

$\cos 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$



№4 Чистовик

$f_k = $ [illegible] $- k\pi x$, где $k \in \{11, 15, 17\}$.

Внутр. область $D = (0;1) \cdot (-1;1)$

Число областей N вычислим по формуле Эйлера для плоских графов:

$\forall f_k$ – добавл. кривой добавляется $1+k$ областей (за счет 1 перехода от $x=0$ до $x=1$ и k касаний границ, $y=\pm1$),

$+1$ область за каждое внутр. пересечение. построенными

$N = 1 + \sum(1+k) + O_{11;15} + O_{11;17} + O_{15;17} - O_{11;15;17}$, где

$O_{a;b}$ – кол-во точек пересеч. f_a и f_b без учета границ внутри D.

1. $O_{11;15}$

$\sin 15\pi x = \sin 11\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} 15x = 11x + 2m \Rightarrow x = \frac{m}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 15x = 1 - 11x + 2m \Rightarrow x = \frac{2m+1}{26} \Rightarrow 13 \text{ корней}, \ 3m = 6, \ x = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\exists x = \frac{1}{2}$ имеет $y = -1$ – точка на границе $\Rightarrow$

$O_{11;15} = 13 - 1 = 12$

2. $O_{11;17}$

$$\left[\begin{array}{l} 17x = 11x + 2m \Rightarrow x = \frac{m}{3} \Rightarrow 2 \text{ корня} \\ 17x = 1 - 11x + 2m \Rightarrow x = \frac{2m+1}{28} \Rightarrow 14 \text{ корней} \end{array}\right.$$

$\underbrace{11(2m+1)}_{\text{нечет.}} \overset{\text{невозможно}}{=} \underbrace{14(2k+1)}_{\text{чет.}}$

$\Downarrow$

общих корней с границей нет

$O_{11;17} = 2 + 14 = 16$

3. $O_{15;17}$

$$\left[\begin{array}{l} 17x = 15x + 2m \Rightarrow x = m \Rightarrow 0 \text{ корней} \\ 17x = 1 - 15x + 2m \Rightarrow x = \frac{2m+1}{32} \Rightarrow 16 \text{ корней} \end{array}\right.$$

$\underbrace{15(2m+1)}_{\text{нечет}} \overset{\downarrow}{=} \underbrace{16(2k+1)}_{\text{чет}}$

невозможно

$\Downarrow$

общих корней с границей нет

$O_{15;17} = 16$

4. $O_{11;15;17}$ – невозможно, т.к нет пересеч. $O_{15;17}$ и $O_{11;17}$.

Итого: $N = 1+46+12+16+16+0 = 47+44 = 91$

Ответ: 91

№5.

a, b, c – вершины Δ

Из симметрии => a, b, c – вершины правильного Δ

радиус опис. окр. R =