0 583745 160005

58-37-45-16

(122.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Табаченковой Киры Михайловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

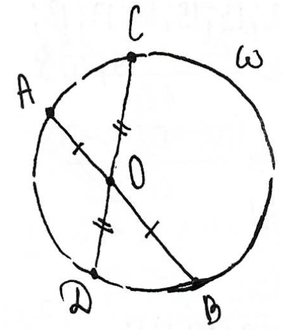
Дата

«29» МАРТА 2026 года

Подпись участника

Чистовик

Задача 1.



Рассмотрим хорды AB и CD окружности ω, пересекающиеся в точке O так, что $AO=BO$ и $CO=DO$ (см. рисунок).

$$\left.\begin{aligned} Pow_\omega(O) &= -AO\cdot BO = -AO^2 \\ Pow_\omega(O) &= -CO\cdot DO = -CO^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -AO^2 = -CO^2 \Rightarrow AO = CO,$$

но тогда $AO=CO=BO=DO \Rightarrow$ точка O - центр ω, то есть любая третья хорда, проходящая через точку O, также будет являться диаметром и, в условиях данной задачи, будет иметь длину $2\cdot 5=10$.

Ответ: 10.

Задача 2.

$10^3 \le n < 10^4 \Rightarrow 10^6 \le n^2 < 10^8$, т.е. n^2 содержит от 7 до 8 цифр

1) $10^6 \le n^2 < 10^7$ (n^2 содержит 7 цифр)

$n^2 = n\cdot 10^3 + k$, где ~~k-трехзначное~~ $k<10^3$ и $k \ge 0$

$n(n-10^3) = k \Rightarrow k \vdots n$, но $k<10^3$, а $n>10^3 \Rightarrow n>k \Rightarrow k=0$

$n^2 = n\cdot 10^3$

$n(n-10^3)=0$

$n \ne 0 \Rightarrow n=1000$ $(1000^2 = \underline{1000}000)$.

2) $10^7 \le n^2 < 10^8$ (n^2 содержит 8 цифр)

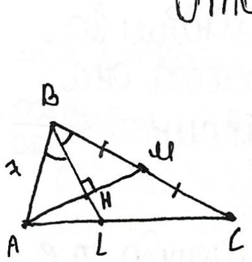
$n^2 = n\cdot 10^4 + k$, где $k<10^4$ и $k\ge 0$

$n(n-10^4) = k \ge 0 \Rightarrow n(n-10^4)\ge 0$, $n>0 \Rightarrow n-10^4 \ge 0$

$n \ge 10000$, но n - четырехзначное $\Rightarrow$ подходящих n в данном диапазоне нет.

Ответ: 1000.

Задача 4.



Пусть $BL \cap AM$ в точке H. Тогда BH - одновременно и биссектриса, и высота в $\triangle ABM \Rightarrow \triangle ABM$ - равнобедренный ($AB=BM$).

$BC = 2BM = 2AB = 14$.

По неравенству треугольника: $\begin{cases} AB+BC>AC \\ AB+AC>BC \\ BC+AC>AB \end{cases}$

Чистовик Задача 4 (продолжение)

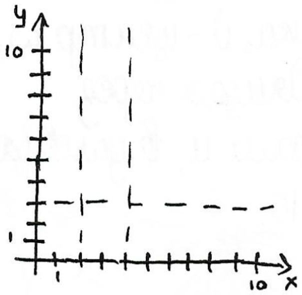
$$\begin{cases} 21 > AC \\ 7 + AC > 14 \\ AC + 14 > 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC < 21 \\ AC > 7 \\ AC > -7 \end{cases}$$

По условию $AC \in \mathbb{Z}$ и $AC \neq AB$, $AC \neq BC$, значит $AC \in \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

$$P_{ABC} \in \{\underset{}{\overset{21+8}{29}}; \overset{21+9}{30}; 31; 32; 33; 34; 36; 37; 38; 39; 40; \overset{21+20}{41}\}$$

Ответ: 29; 30; 31; 32; 33; 34; 36; 37; 38; 39; 40; 41

Задача 3.



Заметим, что каждому искомому треугольнику соответствуют единственные 2 прямые, образующие его катеты (при том ~~перпендикулярные~~ параллельные осям координат) и 2 точки на данных прямых, отрезок, соединяющий которые, является гипотенузой данного треугольника.

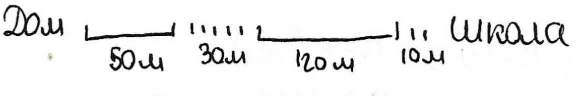
Т.к. все точки имеют ~~целые~~ натуральные координаты, не превосходящие 10, кол-во способов выбрать 2 прямых для катетов, одна из которых || оси абсцисс, а другая || оси ординат равно 10^2.

А число способов выбрать 2 точки (по одной с каждой прямой), образующие гипотенузу, равно 9^2 (не считаем точку пересечения прямых).

$$10^2 \cdot 9^2 = 8100$$

Ответ: 8100

Задача 5.



Так как зеленый свет на первом переходе загорится только спустя 30 секунд после того, как Агриппина выйдет из дома, на дорогу до первого перехода она потратит ≥ 30 секунд, т.е. ее скорость $\leq \frac{50}{30} \left(\frac{м}{с}\right)$. Тогда на дорогу до второго перехода она потратит $\geq \frac{50+30+120}{\frac{50}{30}} = 120$ (с.), но за это время светофор уже успеет загореться красным во второй раз ($10 + 50 \cdot 2 = 110$ (с.)), т.е. на дорогу до второго перехода она должна потратить $\geq 10 + 50 \cdot 3 = 160$ (с.) $\Rightarrow$ скорость Агриппиной $\leq \frac{200}{160} = \frac{5}{4} \left(\frac{м}{с}\right)$.

При скорости $\frac{5}{4}\left(\frac{м}{с}\right)$ она пройдет первую дорогу за 40 секунд, т.е. на первом переходе уже 10 сек. будет гореть зеленый; она пройдет переход за 24с. (чего ей хватит). До второго перехода он дойдет ровно в тот момент, когда загорится зеленый и пройдет его за 8с.

Ответ: $\frac{5}{4}\left(\frac{м}{с}\right)$

58-37-45-16 (122.2)

Чистовик Задача 6. Стр. 3 из 4

$$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}-\frac{3x^2}{a^3}\le 0,\quad x\in[n;n+2026],\quad a\ne 0$$

$$\frac{a^2+2xa-3x^2}{a^3}\le 0$$

$$\frac{(a-x)(a+3x)}{a^3}\le 0$$

1) $a>0$ $(a^3>0)$

$$f(x)=\frac{(a-x)(a+3x)}{a^3}$$

$-\quad a\quad +\quad -\frac{a}{3}\quad -$; $a>0$, $-\frac{a}{3}<0$

$-\quad -\frac{a}{3}\quad +\quad a\quad -$; $-\frac{a}{3}<0$, $a>0$

При $x=0$: $f(x)=\frac{a^2}{a^3}>0$

$x\in(-\infty;-\frac{a}{3}],[a;+\infty)$

не подходит по усл.

2) $a<0$ $(a^3<0)$

$$f(x)=\frac{(a-x)(a+3x)}{a^3}$$

$+\quad a\quad -\quad -\frac{a}{3}\quad +$; $a<0$, $-\frac{a}{3}>0$

При $x=0$ $f(x)=\frac{a^2}{a^3}<0$

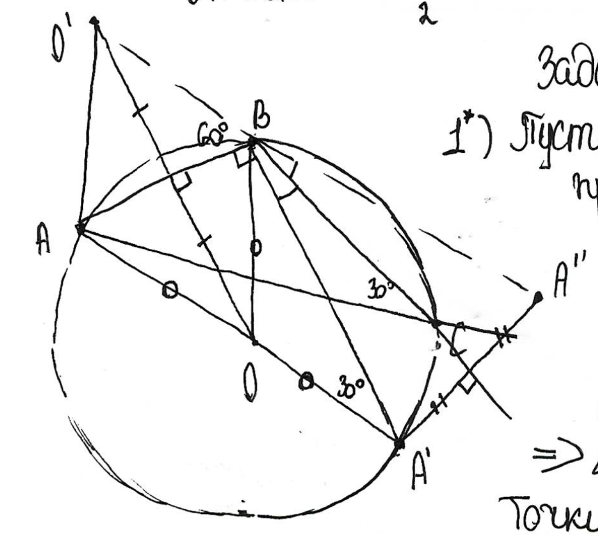
$x\in[a;-\frac{a}{3}]$

$$a+2026=-\frac{a}{3}$$

$$-\frac{4}{3}a=2026$$

$$a=-\frac{1013\cdot 3}{2}=-\frac{3039}{2}$$

Ответ: $-\frac{3039}{2}$.



Задача 7.

1*) Пусть точка A' диаметрально противоположна точке A. Тогда $\angle ABA'=90°$.

$\angle AA'B=\angle ACB=30°$.

$\angle A'AB=180°-\angle ABA'-\angle AA'B=60°$.

$AO=BO$, $\angle OAB=60° \Rightarrow \triangle AOB$ - правильный $\Rightarrow \angle ABO=60°$.

Точки O и O' симм. отн. $AB \Rightarrow \angle O'BA=\angle OBA=60°$; A' и A'' симм. отн. $BC \Rightarrow \angle A'BC=\angle A''BC$.

Точки O', B, A'' лежат на одной прямой $\Rightarrow \angle O'BA+\angle ABA'+\angle A'BA''=180°$

$60°+90°+2\angle A'BC=180° \Rightarrow \angle A'BC=15°$.

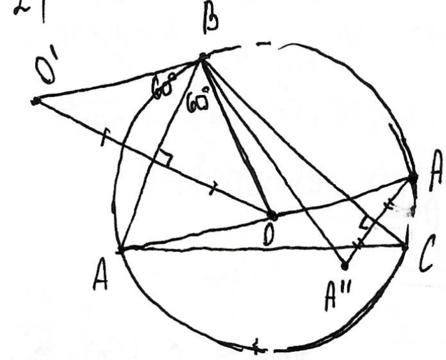
$\angle ABC=\angle ABA'+\angle A'BC=90°+15°=105°$.

* Случай 1 подразумевает, что $\angle B\ge 90°$

Чистовик

Задача 7 (продолжение)

2)



$\angle OBO' = \angle O'BA + \angle OBA = 120°$

$\angle A''BO = 180° - \angle OBO' = 60°$

$\angle ABA'' = \angle A''BO + \angle ABO = 120°$, но тогда

$\underset{90°}{\angle ABC} > \angle ABA'' = 120°$ – противоречие

Ответ: 105°.

Задача 8.

Казимир начал с „угловой" клетки, т.к. иначе на предпоследнем ходу он окажется в угловой кл. и не сможет закрасить центральную. ~~Выбор первого хода ни на что не~~ выбор второго направления ~~влияет~~ равна.

$\cancel{\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{2^{15}}}$ $1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{4^7} = \frac{2}{2^{14}} = \frac{1}{2^{13}}$.

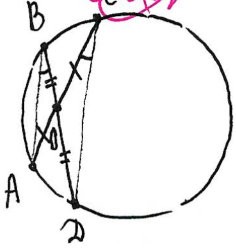
~~Ответ:~~ Ответ: $\frac{1}{2^{13}}$.

58-37-45-16
(122.2)

100 (сто)

Нет —

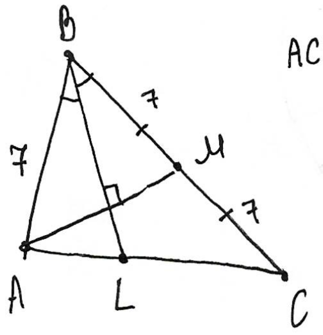
ЧЕРНОВИК



$\Delta ABO \sim \Delta DCO \Rightarrow \frac{BO}{CO} = \frac{AO}{DO}$

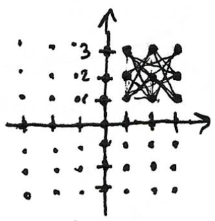
$AO^2 = BO^2 \Rightarrow AO = BO = DO = CO \Rightarrow AC = BD$

AC, BD – диаметры!



$AC \in [8; 20]$, $AC \in \mathbb{Z}$, $AC \neq 14$

8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20



$3 \cdot C_3^2 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 36$

$2 \cdot C_9^2 = 2 \cdot \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 8 \cdot 9 = 72$

$72 - 12 = 60$

$60 - 6 = 54$

$n^2 = 10^k n + m$, $m < 10^k$

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$

$10^k n(n-1) = m$

$\underbrace{\quad}_{n}\underbrace{\quad}_{k \text{ цифр}}$

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

$6 - 4 = 2$

$\frac{1013}{2} + \frac{3039}{2} =$

$= 2026$

$10^k (n-1) n < 10^{k+1}$

$(n-1)(n) < 10$

$n^2 - n - 10 < 0$

$\mathcal{D} = 41$

$n = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$

~~$n^2 - n - 1 < 0$~~

~~$\mathcal{D} = 5$~~

~~$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$~~

$36 - 18 = 18$

$18 \cdot 2 = 36$

$2 \cdot 2$

1) $10^6 \le n^2 < 10^7$

$10^3 \le n < 10^4$

$10^6 \le n^2 < 10^8$

$n^2 = 100n + k$, $k < 100$

$n^2 \ge 10^7$

$k = n(n - 100)$

$k \vdots n$??

$k = 0$

$n > 1000\sqrt{10}$

3001×3001: 3001, 9003.., 3004001

1000000

$n(n - 100) < 100$

$n^2 - 100n - 100 < 0$

$\mathcal{D} = 10000 + 400 = 10400$

$n(n - 10^k) < 10^k$

$n^2 - 10^k n - 10^k < 0$

$\mathcal{D} = 10^{2k} + 4 \cdot 10^k$

$a < -\frac{a}{3}$

$a + 2026 = -\frac{a}{3}$

$x \in [a; -\frac{a}{3}]$

1) $a < 0 \Rightarrow (a - x)(a + 3x) \ge 0$

$x_1 = a$, $x_2 = -\frac{a}{3}$

$-$ a $+$ $-\frac{a}{3}$ $-$ x

$n(n - 1000) = 0$

$n = 1000$

$\frac{50}{v} \ge 30$

~~$v = \frac{50}{30}$~~

2) $n^2 = 10000n + k$

Д 60м 30м 120м 10м Ш

$v \le \frac{50}{30}$

$v \ge \frac{30}{50}$

$\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3} \le 0$

$x \in [i; i + 2026]$

$\frac{(a - x)(a + 3x)}{a^3} \le 0$

$\frac{a^2 + 2xa - 3x^2}{a^3} \le 0$

$\frac{(x + a)^2 - 4x^2}{a^3} \le 0$

$\frac{(x + a - 2x)(x + a + 2x)}{a^3} \le 0$

~~$200 \cdot \frac{5}{3} = \frac{1000}{3}$~~

$\frac{200}{\frac{5}{3}} = 120$

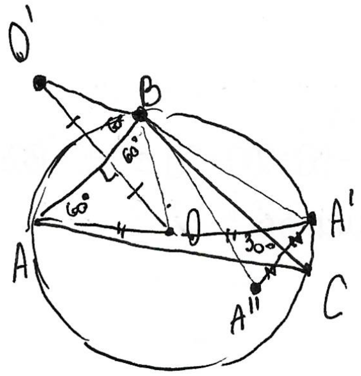
$\frac{200}{v} \ge 160$

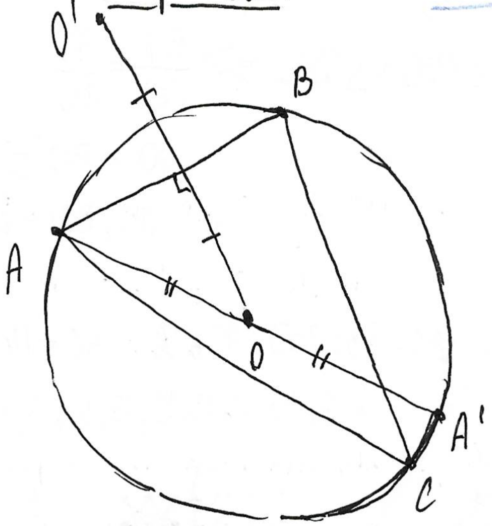
$\frac{3}{5} \le v \le \frac{5}{4}$

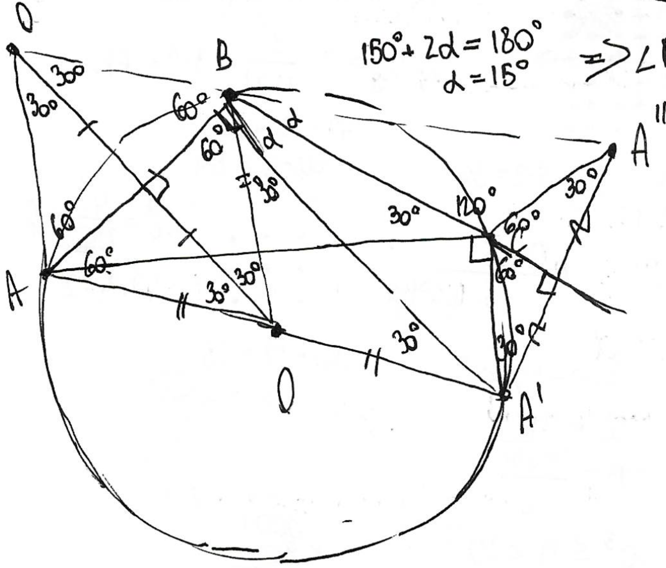
$\frac{50}{\frac{5}{4}} = 40$

$\frac{30}{\frac{5}{4}} = 24$

Черновик







$150° + 2\alpha = 180°$
$\alpha = 15°$

$\Rightarrow \angle B = 105°$

$4000^2 = 16000000$

$10^2 = 100$

$100 \cdot 9^2 = 8100$